




Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Обзорная статья

УДК 530.182


DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-571-602

Оптимальные эмпирические модели динамических систем с внешними воздействиями: общий подход и примеры из климата

Д. Н. Мухин , А. Ф. Селезнев, А. С. Гаврилов, А. М. Фейгин

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики

Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия

E-mail:  mukhin@ipfran.ru, aseleznev@ipfran.ru, gavrilov@ipfran.ru, feigin@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 31.05.2021, принята к публикации 29.06.2021, опубликована 30.07.2021

Аннотация. Цель данной статьи – обзор недавних результатов (за последние три года), полученных в Институте прикладной физики (ИПФ РАН), в части приложений метода построения оптимальных эмпирических моделей к климатическим системам. **Методы.** Этот метод, разработанный авторами статьи, включает в себя построение редуцированных моделей исследуемой системы в форме случайных динамических систем. В сочетании с байесовой оптимизацией структуры модели, данный метод позволяет реконструировать статистически обоснованные законы, лежащие в основе наблюдаемой динамики. **Результаты.** В статье описаны результаты применения этого метода к моделированию трех климатических подсистем, соответствующих различным временным масштабам: климат плейстоцена, характеризующийся ледниковыми циклами, Эль-Ниньо – Южное колебание в современном климате – явление с масштабом порядка года, и климат тропической части Тихого океана на столетних масштабах. **Заключение.** По представленным результатам можно заключить, что используемый метод построения оптимальных моделей является полезным инструментом для верификации механизмов, лежащих в основе наблюдаемой климатической изменчивости, включая анализ отклика системы на внешние сигналы.

Ключевые слова: эмпирические модели, случайные динамические системы, обратное моделирование, анализ временных рядов, моделирование климата.

Благодарности. Описанные в разделах 1, 2.1 и 2.2 результаты получены при поддержке Российского научного фонда (грант 19-42-04121). Результат из раздела 2.3 получен при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-02-00502).

Для цитирования: Мухин Д. Н., Селезнев А. Ф., Гаврилов А. С., Фейгин А. М. Оптимальные эмпирические модели динамических систем с внешними воздействиями: общий подход и примеры из климата // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 571–602. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-571-602

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Optimal data-driven models of forced dynamical systems: General approach and examples from climate

D. N. Mukhin[✉], *A. F. Seleznev*, *A. S. Gavrilov*, *A. M. Feigin*

Federal research center Institute of Applied Physics
of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: ✉mukhin@ipfran.ru, aseleznev@ipfran.ru, gavrilov@ipfran.ru, feigin@appl.sci-nnov.ru
Received 31.05.2021, accepted 29.06.2021, published 30.07.2021

Abstract. *Purpose.* Purpose of this article is to review recent results (over the past three years) obtained at the Institute of Applied Physics (IAP RAS) relating of applications of the method for constructing optimal empirical models to climatic systems. *Methods.* This method, developed by the authors of the article, includes the construction of reduced models of the system under study in the form of random dynamical systems. In combination with Bayesian optimization of the model structure, this method allows us to reconstruct statistically justified laws underlying the observed dynamics. *Results.* The article describes results of applying this method to modeling three climatic subsystems corresponding to different time scales: the Pleistocene climate characterized by glacial cycles, El Niño – Southern Oscillation in the modern climate – a phenomenon with a scale of the order of a year, and the climate of the tropical Pacific Ocean on a centennial scale. *Conclusions.* Based on the presented results, it can be concluded that the method used for constructing optimal models is a useful tool for verifying the mechanisms underlying the observed climatic variability, e.g., analyzing the response of the system to external signals.

Keywords: data-driven models, random dynamical systems, inverse modeling, time series analysis, climate modeling.

Acknowledgements. The results described in the sections 1, 2.1 и 2.2 were supported by the Russian Science Foundation (grant 19-42-04121). The result from the section 2.3 was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 19-02-00502).

For citation: Mukhin DN, Seleznev AF, Gavrilov AS, Feigin AM. Optimal data-driven models of forced dynamical systems: General approach and examples from climate. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(4):571–602. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-571-602

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Необходимость построения динамических моделей по данным возникает во многих областях наук, например, в исследованиях климата, моделировании экономических и финансовых временных рядов, исследовании нейронной активности и т. д. Данной проблеме посвящено гигантское число работ, см., например, обзоры методов в [1, 2]. В наиболее типичном случае, характерном для моделирования сложных систем с многими взаимодействующими масштабами, уравнения, описывающие систему либо отсутствуют, либо не могут быть эффективно применены из-за больших неопределенностей в параметрах. В такой ситуации реконструкция уравнений по данным – единственная возможность получить информацию о законах эволюции системы с целью прогноза, исследования отклика на воздействия, а также выявления и анализа возможных критических переходов в динамике. Продолжающийся в различных областях наук прогресс в технологиях сбора и обработки данных позволяет получать временные ряды высокого разрешения (например, данные визуализации активности популяций нейронов или поля климатических характеристик), содержащие полезную информацию для реконструкции ключевых свойств системы. При этом естественные ограничения, связанные с дискретностью и конечностью анализируемых временных рядов, определяют диапазон временных масштабов, доступный для моделирования.

Мухин Д. Н., Селезнев А. Ф., Гаврилов А. С., Фейгин А. М.
Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 4

К настоящему времени опубликовано большое число работ по разработке и приложениям различных подходов к реконструкции уравнений динамики системы по наблюдаемым временным рядам (см., например, книгу [3], а также работы [4–8]). Были созданы и успешно применены методы, эффективные для важных частных случаев: систем с известным оператором эволюции и скрытыми переменными [9–12], неавтономных систем [13–16], систем с запаздыванием [17], ансамблей связанных систем, в том числе, с запаздыванием (см., например, [18, 19]), с разреженными матрицами связей [20–22], нейроосцилляторов [23, 24] и др. В частности, авторами проекта для систем различной сложности были получены результаты долгосрочного прогноза эволюции динамических режимов (включая прогноз бифуркаций) [13, 25], разработаны методы моделирования в условиях существенно зашумленных данных [12, 26], прогноза критических переходов в стохастических и высокоразмерных системах [14, 27, 28], выбора модели оператора эволюции оптимальной сложности [29, 30].

Неизбежным обстоятельством при эмпирическом моделировании системы по ограниченным выборкам данных является наличие процессов, информацию о динамике которых из данных извлечь не удастся. Это приводит к невозможности построения детерминированного описания наблюдаемой динамики, так как фактически, такие процессы эквивалентны случайным возмущениям (стохастическому форсингу) моделируемой подсистемы. Данное обстоятельство диктует задание стохастической параметризации реконструируемого оператора эволюции или, другими словами, представление законов эволюции в форме случайной динамической системы. Отталкиваясь от определения случайной динамической системы, данного в работе [31], авторы работы [14] предложили форму дискретного оператора эволюции, полезную для моделирования динамических процессов с конечной дисперсией. Предложенная модель учитывает как неоднородность стохастического форсинга в пространстве используемых переменных, так и возможную медленную неавтономность системы из-за трендов внешних (по отношению к моделируемой части системы) параметров. Поскольку функциональная форма оператора эволюции неизвестна априори, в модели использовались универсальные аппроксимации, основанные на искусственных нейронных сетях. Такая модель показала свою эффективность для предсказания и анализа критических переходов как в модельных примерах различного уровня сложности [14, 27, 28], так и в важных климатических приложениях [32, 33].

Фактически, при стохастическом описании динамической системы определяется баланс между сложностью аппроксимации оператора эволюции (детерминизмом) и неопределенностью в оценивании состояния системы в следующий момент времени (стохастичностью). В парадигме эмпирического моделирования этот баланс зависит исключительно от информативности имеющейся выборки данных: сложность реконструируемых законов должна быть обоснована имеющейся статистикой, или статистически оптимальна. Отсюда следует основное требование к хорошему методу моделирования: он должен автоматически давать на выходе модель с оптимальной по отношению к выборке структурой. Другими словами, для одной и той же анализируемой системы такой метод может дать модель, эквивалентную генератору некоррелированного шума (модель с тривиальной детерминированной компонентой) в случае очень короткой выборки, и сложную модель с нелинейными обратными связями и критическими переходами в случае выборки, представляющей собой протяженный хорошо сэмплированный временной ряд. То же относится и к моделям, в которые включаются различные физические форсинги с целью анализа отклика системы на них: любое введение в модель дополнительных факторов должно быть статистически обосновано. Важно понимать, что построение необоснованно сложной модели приводит к ее переобучению – ситуации, когда модель хорошо связывает только состояния системы, отраженные в анализируемой выборке, но генерирует неадекватную исследуемой системе динамику за пределами выборки. Очевидно, что использование такой модели приведет к неправильным предсказаниям и ложным выводам об устройстве системы. В работе [30] изложена методика построения эмпирической модели, включающая в себя оптимизацию ее структурных параметров,

на основе байесовой процедуры. В работах [32–35] демонстрируется, что эта методика оказывается полезной в реальных приложениях, в том числе, для отбора значимых внешних воздействий на систему и анализа ее отклика на них.

Анализ роли квазипериодических внешних воздействий в динамике системы требует особенно пристального внимания, поскольку при использовании нелинейных параметризаций оператора эволюции высока вероятность ложных выводов о причинных связях наблюдаемых циклов с сигналом форсинга, сделанных только на основании выхода модели без анализа статистической обоснованности. Дело в том, что синхронизация, или захват фазы (явление, при котором периоды форсинга и решения становятся связанными рациональным отношением), является общим свойством широкого класса нелинейных динамических систем. Как следствие, использование в нелинейной модели любого форсинга с характерным периодом, близким к масштабу наблюдаемой динамики, может в большинстве случаев сделать наблюдаемую динамику и динамику модели качественно похожими [36]. Применение методики построения оптимальной модели позволяет отбросить необоснованные гипотезы о роли таких форсингов, как, например, продемонстрировано в работе [33]. Следует отметить, что в ряде работ [37–40] были разработаны и использованы методы учета и исследования влияния форсингов при моделировании связанных процессов, включающие анализ статистической значимости. В данном обзоре будет описана другая методология, в которой детектирование и анализ существенных форсингов производятся в рамках байесовой процедуры построения оптимальных моделей.

В данной работе дается краткое изложение методики эмпирического моделирования, основанной на байесовой оптимизации стохастического оператора эволюции, и затем делается обзор трех климатических приложений этой методики. В первом приложении, описанном в работе [33], строится модель динамики ледниковых циклов в плейстоцене, с помощью которой удалось объяснить роль как собственной нелинейной динамики климатической системы, так и форсингов различной природы в эволюции этих циклов. Второе приложение [35] касается задачи выявления предикторов явления Эль-Ниньо – Южное колебание (ЭНЮК), позволяющих улучшить межсезонный прогноз ЭНЮК: был введен климатический форсинг, сконструированный из поля атмосферного давления в субтропиках, и показано, что он значительно улучшает эмпирическую модель индекса ЭНЮК, подтверждая описанный в литературе механизм долгосрочного влияния субтропической атмосферы на ЭНЮК. И, наконец, в третьем приложении построена модель динамики температуры поверхности океана (ТПО) в тропиках за последние 850 лет, с помощью которой подтверждена значимая связь с индексом ЭНЮК солнечной активности с характерным периодом 200 лет.

1. Построение стохастической модели

При моделировании сложной динамической системы, конечность размерности которой невозможно установить по имеющимся данным (что является случаем общего положения для природных систем), важно понимать, что оператор эволюции будет неизбежно строиться в некоторой низкоразмерной проекции фазового пространства исследуемой системы. Очевидно, что в общем случае эта проекция не является взаимно-однозначным отображением фазового пространства. Это означает, что даже бесконечная близость состояний в полученном фазовом пространстве не гарантирует их близость в следующий момент времени, то есть после применения полного оператора эволюции системы. Другими словами, детерминированное описание оператора эволюции в таком редуцированном пространстве становится невозможным из-за наличия неизвестного числа «скрытых» переменных, причем степень этой недетерминированности может быть неоднородна в используемом фазовом пространстве. Из сказанного следует простой вывод: динамика системы в выбранных фазовых переменных является стохастической, а значит, для моделирования этой динамики должен применяться аппарат случайных динамических систем. В работе [14] был предложен метод реконструкции оператора эволюции в форме дискретного случайного отображения,

а в работах [27,28] продемонстрирована его эффективность для моделирования высокоразмерных систем по временным рядам. Метод оптимизации структуры моделей такого вида был разработан в работе [30]. Эти методы составляют основу методики построения оптимальных эмпирических моделей сложных систем, используемой в ИПФ РАН, краткое изложение которой приведено в данном разделе.

1.1. Стохастическая параметризация. Пусть $\{\mathbf{U}(t_n) = \mathbf{U}_n\}_{n=1}^N$ ($\mathbf{U}(t) \in \mathbb{R}^d$) – последовательность состояний в d -мерном фазовом пространстве, построенном каким-либо образом по наблюдаемому временному ряду. Отметим, что в типичном случае $d \ll D$, где D – недостижимая размерность полной системы, которая произвела этот ряд. В соответствии с изложенными выше соображениями, будем строить в этом пространстве случайную динамическую систему, задаваемую в самом общем виде, согласно определению из [31], как отображение

$$(t, \omega, \mathbf{U}) \rightarrow \varphi(t, \omega, \mathbf{U}), \quad (1)$$

где t – время, ω – элемент вероятностного пространства, зависимость от которого определяет случайность отображения φ . Без потери общности, запишем отображение (1) в форме

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{U}_n) + \boldsymbol{\eta}(\omega, \mathbf{U}_n), \quad (2)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbb{E}(\varphi(\omega, \mathbf{U}))$, $\boldsymbol{\eta}(\omega, \mathbf{U}) = \varphi(\omega, \mathbf{U}) - \mathbf{f}(\mathbf{U})$. Такое представление позволяет явно разделить детерминированную и случайную компоненты оператора эволюции, \mathbf{f} и $\boldsymbol{\eta}$, соответственно. Для удобства вычислений модель (2) можно огрубить, представив случайную компоненту как нормальный дельта-коррелированный процесс с амплитудой, зависящей от фазовых переменных:

$$\boldsymbol{\eta}(\omega, \mathbf{U}) = \hat{g}(\mathbf{U})\boldsymbol{\zeta}(\omega), \quad \hat{g} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}_d(\mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\zeta} \sim N(0, 1). \quad (3)$$

Используемые в модели матрицы \hat{g} ограничены классом $\mathcal{L}_d(\mathbb{R})$ невырожденных нижнетреугольных матриц размера d над полем \mathbb{R} , поскольку такого класса достаточно для задания любой ковариационной матрицы $\hat{G} = \hat{g}^T \hat{g}$ случайной компоненты в (2). Хотя такое огрубление очевидно снижает общность определения (1), на практике оно оказывается полезным для моделирования стохастических возмущений широкого класса с конечной дисперсией (см., например, [14,28,30]).

Рассмотрим случай скалярного временного ряда X_1, \dots, X_N – именно такой случай имеет место в рассмотренных в настоящем обзоре приложениях. Широко известный метод реконструкции фазового пространства «по Такенсу» посредством временных смещений исходного ряда позволяет записать стохастическую модель (с учетом (2), (3)) следующим образом (см., например, приложение к работе [27]):

$$X_n = f(X_{n-1}, \dots, X_{n-L}, t_n, \mathbf{q}_n) + g(X_{n-1}, \dots, X_{n-L})\zeta_n, \quad (4)$$

где L – размерность фазового пространства, фактически определяющая глубину памяти модели. Многокомпонентный временной ряд \mathbf{q} , добавленный в модель, задает набор внешних сигналов (форсингов), действующих на систему, а явная зависимость модели от времени отражает возможные медленные тренды в параметрах системы. Последнее позволяет, в частности, экстраполировать модель за пределы выборки, что дает возможность предсказывать эволюцию качественного поведения системы [13,14,27,28].

Для параметризации априори неизвестных функций f and g нами во многих случаях используется нелинейное представление на основе простой искусственной нейронной сети в форме перцептрона с одним скрытым слоем и функцией активации в виде гиперболического тангенса:

$$\phi(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \tanh(\mathbf{w}_i^T \mathbf{z} + \gamma_i), \quad (5)$$

где m – число нейронов, (α, w, γ) – коэффициенты сети (параметры модели), z – вход сети размерности, которая равна размерности фазового пространства L для функции g и сумме L и числа форсингов для функции f . Отметим, что конкретное представление функций не имеет большого значения для моделирования, основное требование – это универсальность параметризации, то есть способность аппроксимировать любую гладкую зависимость с любой точностью. Функция (5), несомненно, удовлетворяет этому требованию [41]; увеличение точности аппроксимации достигается увеличением числа нейронов m . Медленная зависимость модели (4) от времени вводится в функцию f заданием линейной зависимости параметров внешнего слоя $\alpha = \alpha^0 + t\alpha^1$ нейронной сети (5) с новыми неизвестными коэффициентами α^0 и α^1 .

1.2. Обучение и оптимизация модели. Обозначим параметры функций f и g (коэффициенты соответствующих нейронных сетей) как μ_f и μ_g , соответственно. Обучение модели (4) состоит в максимизации ценовой функции для этих параметров, определяемой как их апостериорная плотность вероятности (ПВ), выражаемая через теорему Байеса:

$$P(\mu_f, \mu_g | X, \mathbf{q}) \propto P(X | \mu_f, \mu_g, \mathbf{q}) \times P_{pr}(\mu_f, \mu_g). \quad (6)$$

Первый множитель в правой части представляет собой функцию правдоподобия модели – плотность вероятности того, что модель с заданными параметрами и форсингами сгенерирует исходный временной ряд. Эта функция может быть выведена напрямую из выбранной формы модели (4), с учетом сделанных выше предположений о ПВ случайного процесса ζ :

$$P(X | \mu_f, \mu_g, \mathbf{q}) = C \left[\prod_{n=L+1}^N 2\pi g(x_{n-1}, \dots, x_{n-L}, \mu_g)^2 \right]^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=L+1}^N \frac{(x_n - f(x_{n-1}, \dots, x_{n-L}, t_n, \mu_f))^2}{g(x_{n-1}, \dots, x_{n-L}, \mu_g)^2} \right\}, \quad (7)$$

где C – константа, зависящая от начального сегмента X_1, \dots, X_L ряда (см. [30, 32]).

Второй множитель в (6) – априорная ПВ параметров модели. Эта функция ограничивает область обучения модели в пространстве параметров, компенсируя таким образом вырождение пространства параметров нейронной сети и упрощая, тем самым, алгоритм оптимизации. Мы используем [13, 14, 27, 30, 32] гауссову форму этой ПВ с различными дисперсиями для различных групп коэффициентов нейронной сети (α , w , and γ).

Решающим фактором в построении эмпирической модели, как упоминалось во Введении, является обоснованность уровня сложности параметризации модели (4). В нашем случае сложность задается структурными параметрами модели – глубиной памяти L и числом нейронов m в функциях f и g . Для выбора обоснованной модели мы должны протестировать различные гипотезы о структуре модели – различные наборы структурных параметров – и выбрать наиболее правдоподобную гипотезу. Кроме того, при наличии предполагаемого воздействия на систему форсингов, в множество рассматриваемых гипотез должны быть включены модели с разными комбинациями форсингов (включая модель без форсингов). В том числе, необходимо протестировать обоснованность включения в модель медленного тренда – явной зависимости от времени. Байесов путь выбора лучшей гипотезы – поиск максимума плотности вероятности сгенерировать имеющиеся данные X моделью с заданной структурой (безотносительно к ее внутренним параметрам $\mu = (\mu_f, \mu_g)$), определяемой данной гипотезой \mathbf{H}_i , по всем гипотезам:

$$P(X | \mathbf{H}_i) = \int P(X | \mu, \mathbf{H}_i) P(\mu | \mathbf{H}_i) d\mu \xrightarrow{\mathbf{H}_i} \max, \quad (8)$$

где $P(X | \mu, \mathbf{H}_i)$ и $P(\mu | \mathbf{H}_i)$ – функции правдоподобия и априорной ПВ для параметров модели, соответствующей гипотезе \mathbf{H}_i , – те же, что и в (6).

Процедура вычисления интеграла в (8), основанная на методе Лапласа (посредством квадратичной аппроксимации логарифма подинтегральной функции вблизи ее максимума), описана в работах [30, 32]. Она дает следующее выражение для критерия оптимальности:

$$-\ln P(X|\mathbf{H}_i) \cong \Psi(\mu_0) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2\pi} \nabla \nabla^T \Psi(\mu_0) \right|, \quad (9)$$

$$\Psi(\mu) = -\ln [P(\mu|X, \mathbf{q}, \mathbf{H}_i)],$$

где μ_0 – параметры, соответствующие минимуму функции $\Psi(\mu)$ – ценовой функции для обучения модели (6), $\nabla \nabla^T \Psi$ – матрица вторых производных (гессиан) функции Ψ в точке μ_0 . Выражение (9) можно интерпретировать следующим образом: первое слагаемое $\Psi(\mu_0)$ определяет, насколько хорошо обученная модель аппроксимирует имеющиеся данные, в то время как второе слагаемое «штрафует» сложность параметризации. В результате минимизация (9) обеспечивает баланс между ошибкой аппроксимации и сложностью модели. Таким образом, для выбора наилучшей модели требуется обучить каждую модель из априори заданного набора, что позволяет получить значения μ_0 для каждой модели, вычислить меру оптимальности (9) и выбрать модель, соответствующую минимальному значению этой меры.

2. Примеры из климата

2.1. Динамика климата в плейстоцене. Климат плейстоцена – эпохи, начавшейся примерно 2.6 миллиона лет назад, – характеризуется выраженными циклами оледенений–межледниковий (см. рис. 1). В раннем плейстоцене, до примерно 1–1.5 млн. лет назад, такие циклы имели четкий период примерно 41 тыс. лет, совпадающий с основным периодом колебаний угла между осью Земли и эклиптической (колебания наклона). Наблюдаемое соответствие периодов имеет понятное физическое объяснение [42]: меридиональный градиент инсоляции (приходящей солнечной энергии на единицу площади) увеличивается с увеличением наклона оси Земли, что приводит

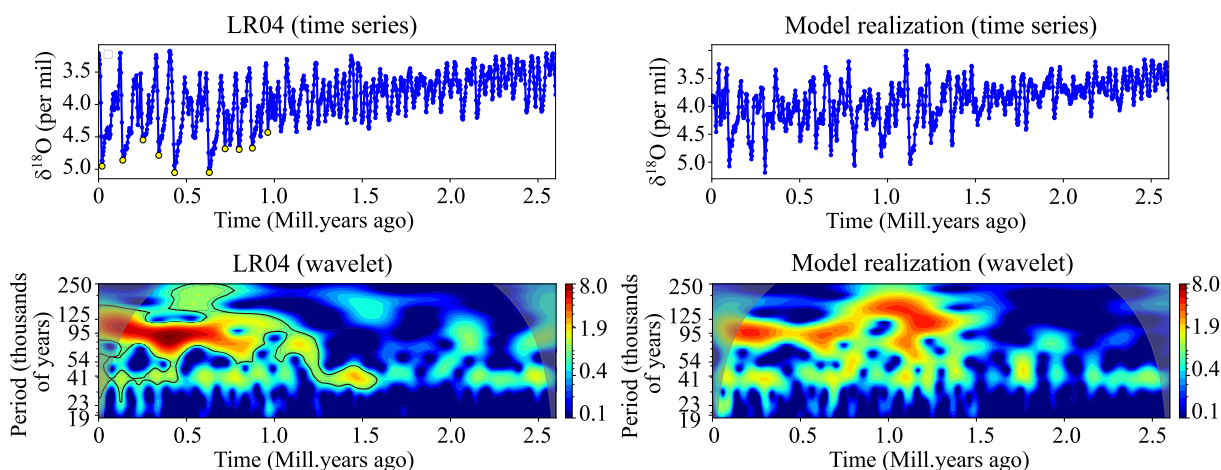


Рис. 1. Ряд LR04 и одна случайно выбранная реализации модели, вместе с их вейвлет-спектрами (показан модуль амплитуды комплексного вейвлета Морле). Желтыми кружками обозначены начала наиболее резких потеплений климата, при которых относительная концентрация $\delta^{18}\text{O}$ уменьшалась более чем на 1.1 промилей за 20 тыс. лет

Fig. 1. LR04 time series and a single, randomly taken model realization, both are shown together with their wavelet spectra (absolute values of complex Morlet wavelet amplitudes). Yellow circles indicate the beginning of the most abrupt climate warming, at which the relative concentration of $\delta^{18}\text{O}$ decreased by more than 1.1 ppm over 20 thousand years

к усилению транспорта влаги из тропиков к полюсам и, тем самым, способствует нарастанию континентальных льдов. Однако в среднем плейстоцене за относительно короткий промежуток времени около 0.5 млн. лет произошел сдвиг периодичности колебаний климата: циклы стали менее регулярными со средним периодом около 100 тыс. лет, что видно, в частности, из вейвлет-разложения, показанного на рис. 1. Изменение характерного периода сопровождалось существенным увеличением амплитуды циклов, а также изменением их формы: почти синусоидальные колебания в раннем плейстоцене сменились на пилообразные с медленными фазами оледенений, сменяющимися резкими потеплениями и уменьшением массы льда [43–45]. При этом следует отметить, что единственным внешним воздействием на климатическую систему с временным масштабом, сопоставимым с характерными периодами наблюдаемых циклов, является квазипериодическое изменение инсоляции, вызванное колебаниями орбитальных параметров Земли. Помимо уже упомянутых колебаний наклона, значимый вклад в вариации инсоляции вносят прецессии оси и орбиты Земли, определяющие спектральные линии, соответствующие периодам около 23 и 19 тыс. лет, а также колебания эксцентриситета орбиты Земли с периодом около 100 тыс. лет (рис. 2). Спектральный состав этих колебаний оставался неизменным в течение всего плейстоцена, что указывает на то, что описанный климатический сдвиг, называемый переходом среднего плейстоцена (ПСП), связан с внутренними динамическими свойствами климатической системы и их возможным откликом на медленные изменения окружающей среды.

К настоящему времени для объяснения механизма ПСП разработано большое число физических концепций, ставящих во главу угла различные обратные связи, присущие климатической системе Земли, которые учитывают такие внутренние факторы как вариации альбедо, осадков, уровня моря, изменение циркуляции атмосферы и океана, цикл CO_2 , накопление пыли, эрозия реголита и т. д. (см. работы [43, 44, 46]). Предложены различные динамические механизмы возникновения длиннопериодных ледниковых циклов, выведенные из упрощенных концептуальных моделей. В частности, к ним относятся релаксационные колебания, возникающие в результате трендов управляющих параметров системы (см. обзор соответствующих моделей [47]), нелинейные резонансы в результате воздействия колебаний орбитальных параметров [48], индуцированные мелкомасштабными процессами и орбитальным воздействием переходы между аттракторами [49], хаотический отклик на вариации инсоляции [50], стохастический резонанс [51] и т. д. Несмотря на способность многих моделей достаточно точно воспроизводить регистрируемые в палеоклиматических реконструкциях колебания глобального климата, верифицируемость той или иной модели, а значит и выбор «наиболее правильной» из всех возможных концепций ПСП, всегда вызывают сомнения ввиду ограниченных выборок данных и неочевидной корректности сделанных физических огрублений. Как следствие, причины ПСП до сих пор вызывают интенсивные дискуссии, что стимулирует дальнейшие исследования этого феномена. Описанная ситуация, когда законы динамики известны только в виде набора гипотез, а выборки данных с достаточно высоким временным разрешением достаточно короткие, является хорошей возможностью применить описанный выше байесов аппарат для реконструкции статистически оптимальных законов динамики и верификации существующих концепций ПСП.

В работе [33] методом, описанным в разделе 1, проанализирован временной ряд, характеризующий эволюцию глобального климата за последние 2.6 млн. лет (рис. 1) с шагом 2.5 тыс. лет; он охватывает эпоху, в которой ледниковые циклы стали наиболее выраженными. Этот ряд является частью широко известного стека LR04 [52] – композитного ряда, составленного на основе измерений изотопа кислорода $\delta^{18}\text{O}$ в донных отложениях в 57 географических точках, распределенных по всему Земному шару. Данный изотоп является хорошо известным прокси для глобального климата: его относительная концентрация в мировом океане антикоррелирует с

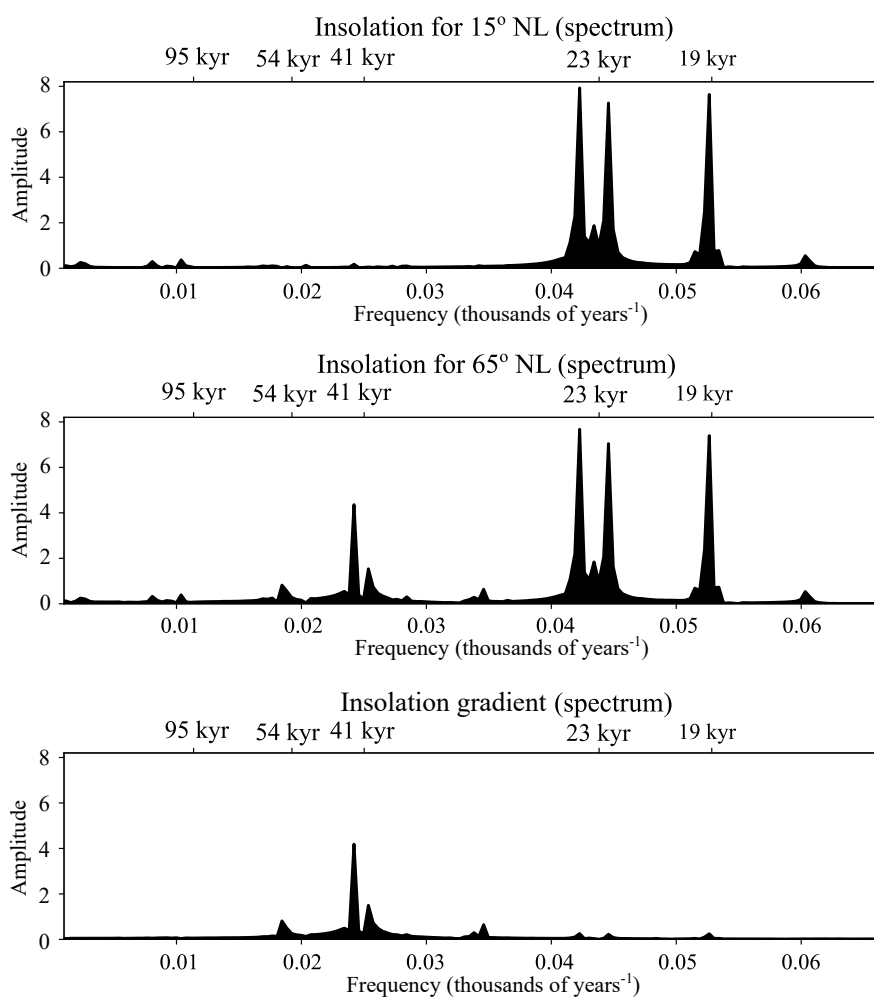


Рис. 2. Спектры мощности колебаний инсоляции на широтах 15° с.ш., 45° с.ш. и спектр мощности их разности (градиента инсоляции)

Fig. 2. Power spectra of the insolation signals at latitudes 15° NL (North latitude), 45° NL (North latitude), and the power spectrum of their difference (insolation gradient)

температурой атмосферы, поскольку меняется вместе с массой континентальных льдов, аккумулирующих из атмосферы воду с низким содержанием $\delta^{18}\text{O}$. По данному ряду строилась модель в виде неавтономной динамической системы (4); физический смысл «внешних» возмущающих сигналов q , t и ξ в данном случае состоит в следующем.

1. Величина q задает воздействие на систему, связанное с вариациями упомянутых выше астрономических параметров, «передаваемыми» климату через изменения инсоляции. Хотя состав гармоник данного сигнала не зависит от географической точки, соотношения между амплитудами гармоник зависят от широты, как видно из рис. 2. В частности, основная гармоника колебаний наклона (период 41 тыс. лет) имеет наибольшую амплитуду в высоких широтах, практически исчезая в тропиках. Чтобы учесть данную зависимость, ряд q был составлен из двух (обезразмеренных и приведенных к единичной дисперсии) рядов июльской инсоляции на 15 и 65 градусах северной широты, соответственно, (см. [53]).
2. Случайная компонента ξ отражает воздействие на систему мелкомасштабных процессов, которые находятся за пределами имеющегося разрешения 2.5 тыс. лет – тысячелетняя и более быстрая изменчивость климата. Различные исследования (см. например,

[47, 49, 51]) указывают на существенную роль таких процессов в формировании ледниковых циклов, причем интенсивность данного «шума» может зависеть от состояния климата. Поэтому стохастический член в уравнении (4), зависящий от фазовых переменных, является принципиально важным элементом модели.

3. Явная зависимость модели от времени, выраженная через линейный закон эволюции коэффициентов нейронной сети в (5), моделирует медленные тренды климата с масштабом, превышающим протяженность рассматриваемого временного ряда. В различных исследованиях указывается, что глобальное похолодание климата, начавшееся в миоцене (около 20 млн. лет назад), проявляется в плейстоцене как медленное монотонное снижение концентрации углекислого газа в атмосфере [54], а также средних глобальных температур как атмосферы [55], так и глубокого океана [56]. В частности, предполагается, что такие тренды могли привести климатическую систему к критическому переходу, после которого начала проявляться нелинейность колебаний ледяных щитов.

Оптимизированная модель вида (4) призвана дать наиболее вероятное с точки зрения ряда LR04 описание механизма отклика системы на данные форсинги. В работе [33] детерминированная часть модели была модифицирована с целью исключения заведомо нефизичных взаимодействий между форсингами различной природы, перечисленными выше:

$$\begin{aligned} f(X_{n-1}, \dots, X_{n-L}, t_n, \mathbf{q}_n) = \\ = f_1(X_{n-1}, \dots, X_{n-L}, t_n) + f_2(X_{n-1}, \dots, X_{n-L}, \mathbf{q}_n). \end{aligned} \quad (10)$$

Такое разделение не позволяет медленному тренду модели, связанному с эволюцией климатической системы, влиять непосредственно на орбитальный форсинг q внутри модели, а также исключает прямое влияние орбитального форсинга на климатический тренд. При этом отклик модели на оба форсинга остается зависимым от состояния климатической системы посредством зависимости обоих слагаемых в (10) от фазовых переменных X . Далее, для функций f_1 и f_2 использовалось представление в виде искусственной нейронной сети (5). Процедура выбора модели, описанная в разделе 1, дала наиболее оптимальную модель с $L = 10$, $m = 1, 2, 1$ для функций f_1 , f_2 и g , соответственно.

Подробное описание структуры и техники оптимизации эмпирической модели приведено в работе [33]; здесь же сформулируем основные выводы, сделанные на основе результатов этой оптимизации. На рис. 1 показано сравнение исходного временного ряда LR04 с временным рядом, сгенерированным оптимальной моделью. Из сравнения как самих рядов, так и их вейвлет-преобразований видно, что модель качественно верно воспроизводит основные черты ПСП – смену характерного периода и формы колебаний. Следует отметить, что, поскольку модель представляет собой случайную динамическую систему, то ее выход является случайной величиной с полученным апостериорным распределением вероятности. На практике для анализа характеристик этого распределения требуется ансамбль испытаний – временных рядов, сгенерированных моделью с разными шумовыми реализациями. В отличие от рис. 1, на котором для примера приведен один случайно выбранный из этого ансамбля модельный временной ряд, на рис. 3 показано вейвлет-преобразование, усредненное по большому ансамблю (10000 испытаний) модельных рядов. Видно, что модель воспроизводит как узкую спектральную линию 41 тыс. лет в течение всего плейстоцена, которая является линейным откликом на колебания наклонения, так и смещение спектральной мощности в область низких частот, достигшее кульминации в интервале от 1.3 до 1 млн. лет назад. Кроме того, как видно из рис. 4, в результате этого перехода форма модельных колебаний сменилась с почти синусоидальной до перехода на пилообразную после.

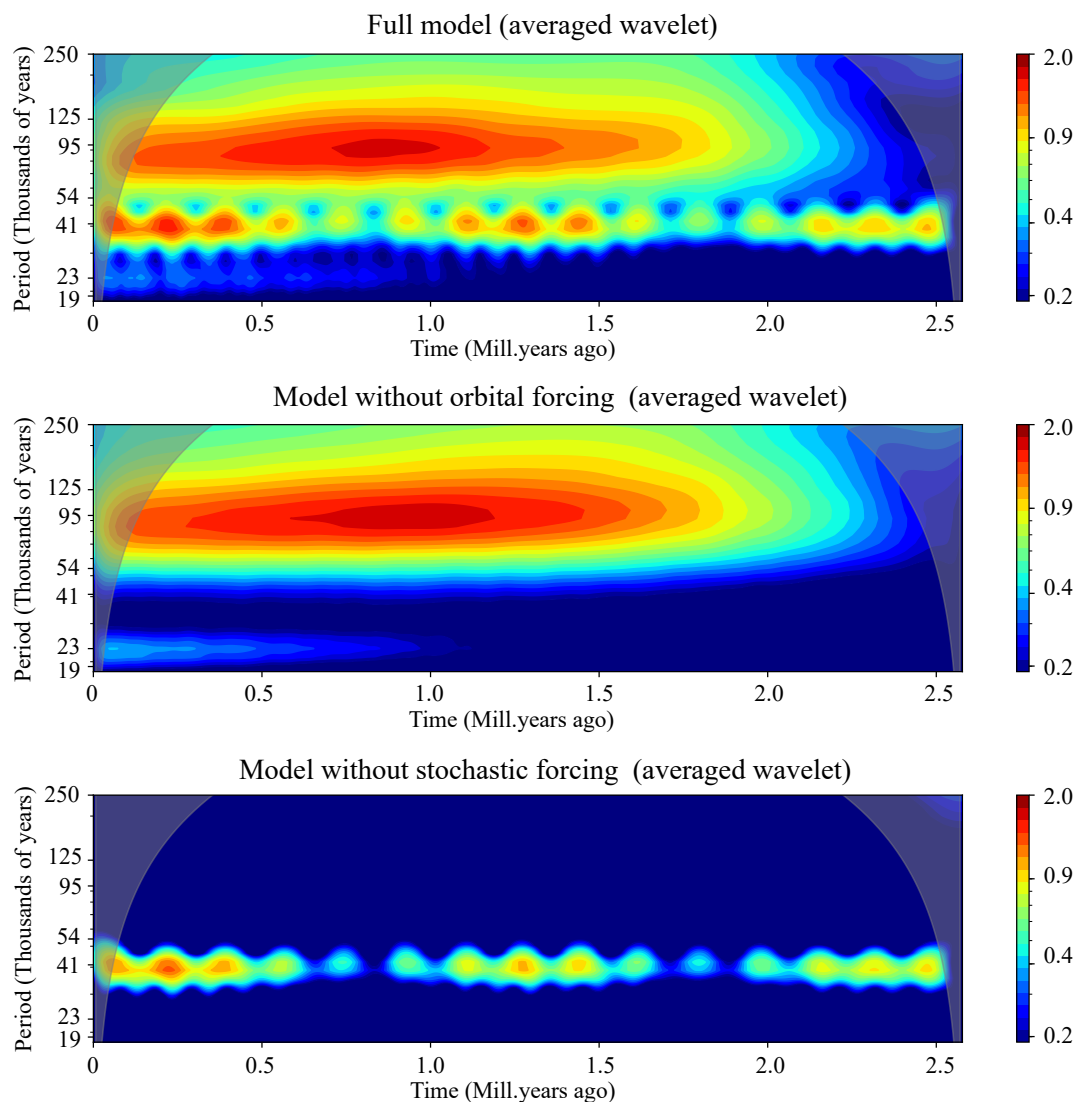


Рис. 3. Вейвлет-спектр, усредненный по 10000 реализациям полной модели, модели без орбитального форсинга и модели без стохастического форсинга

Fig. 3. Wavelet spectrum averaged over 10,000 realizations of the full model, the model without orbital forcing, and the model without stochastic forcing

Имея в руках обученную динамическую модель, мы можем исследовать влияние различных форсингов на ее динамику, последовательно «включая» каждый из них и зануляя остальные. Так, на рис. 3 показан результат, полученный с моделью, возмущаемой случайным воздействием ξ при том, что воздействие инсоляции (двумерный ряд) полагалось константой, равной усредненному по времени значению q . Видно, что, несмотря на полное отсутствие сигнала от колебаний астрономических параметров, модель воспроизводит смещение пика спектральной мощности в полосу частот, соответствующую периоду около 100 тыс. лет, что является важнейшим проявлением ПСП. При этом также воспроизводится пилообразная форма колебаний после этого перехода, однако нарастания амплитуды колебаний, имеющего место в данных, не происходит (см. [33]). Таким образом, можно сделать вывод, что ПСП во многом является следствием изменившегося (под воздействием трендов) отклика климата на короткопериодную стохастическую изменчивость. Наличие в модели (4) зависящей от фазовых переменных амплитуды шума g позволяет нам

исследовать зависимость интенсивности мелкомасштабных процессов от состояния климатической системы. На верхних панелях рис. 1 цветом показано отношение «мгновенной» дисперсии шума g^2 к вариации исходного ряда LR04. Полученное возрастание мелкомасштабной изменчивости в более холодном климате соответствует исследованиям [57, 58], в которых демонстрируется усиление тысячелетней изменчивости климата с ростом массы континентального льда.

Интересно, что в случае зануления стохастической компоненты ξ и включения форсинга инсоляции (см. рис. 3), на протяжении всего плейстоцена мы видим в вейвлет-спектре лишь линейный отклик на колебания наклона без какого-либо перехода, что подчеркивает доминирующую роль стохастичности в динамике климата после ПСП. Однако, как выяснилось, роль форсинга инсоляции в динамике модели не настолько тривиальна и заслуживает отдельного внимания.

Анализ полученной стохастической модели показал, что выход модели зависит лишь от одной линейной комбинации двух компонент q – сигналов инсоляции на тропической и субполярной широтах. Эта комбинация очень близка к разности между этими компонентами, характеризуя, тем самым, меридиональный градиент инсоляции. В спектре этого сигнала (см. рис. 2) фактически остается только линия колебания наклона с периодом 41 тыс. лет, в то время как все гармоники, связанные с колебаниями эксцентриситета и прецессии, становятся исчезающе малыми. Выяснилось, что если до ПСП колебания меридионального градиента инсоляции приводили только лишь к отклику климата на той же частоте, то после ПСП отклик на этот сигнал стал существенно нелинейным: интервалы времени между наиболее резкими потеплениями климата (помечены желтыми кружками на рис. 1) стали примерно кратными периоду наклона 41 тыс. лет. Фактически, воздействие меридионального градиента инсоляции синхронизирует ледниковые циклы через эффект захвата фазы, упоминаемый во Введении. Данное явление проиллюстрировано на нижней панели рис. 4, из которой видно, что с наибольшей вероятностью в эпоху после ПСП в модели реализуются циклы с удвоенным и утроенным периодом колебания наклона; при этом резкие потепления запаздывают в среднем относительно максимума градиента инсоляции на 10 тыс. лет. Отметим, что резкие потепления в исходном временном ряде, отмеченные на рис. 1, хорошо укладываются в статистику таких событий в ансамбле модельных реализаций, показанную на рис. 4.

С точки зрения теории динамических систем, механизм ПСП, выявленный с помощью полученной модели, включает в себя, как показано в [33], несколько факторов. Во-первых, это уменьшение устойчивости равновесного климата в процессе медленного глобального похолодания (уменьшения CO_2), что позволяет шуму (мелкомасштабной изменчивости) «забрасывать» состояние системы в область нелинейных медленных и быстрых движений, ответственных за пилообразную форму колебаний. Этот эффект дополнительно усиливается из-за роста амплитуды шума в более холодном климате. Кроме того, колебания инсоляции изменяют температуру равновесного климата с периодом 41 тыс. лет, смещая равновесие в более холодную область в фазе максимального градиента инсоляции. Фактически, в этой фазе форсинга увеличивается вероятность продвижения климата к большему оледенению и, как следствие, к более резкому выходу из оледенения в последующей фазе уменьшения градиента инсоляции. В результате, форсинг инсоляции способствует увеличению амплитуды длиннопериодных циклов и обеспечивает привязку этих циклов к своей фазе. С точки зрения климатологии, большая «доступность» оледенений из-за уменьшения устойчивости системы после ПСП говорит о том, что переключения системы в ледниковую фазу становятся возможными при более высоких температурах. Этот вывод косвенно поддерживает концепцию, изложенную в работе [56], в соответствии с которой первопричиной ПСП является медленное понижение температуры глубокого океана, которое, в силу уменьшения теплоемкости океана, позволило морскому льду распространяться при больших температурах атмосферы.

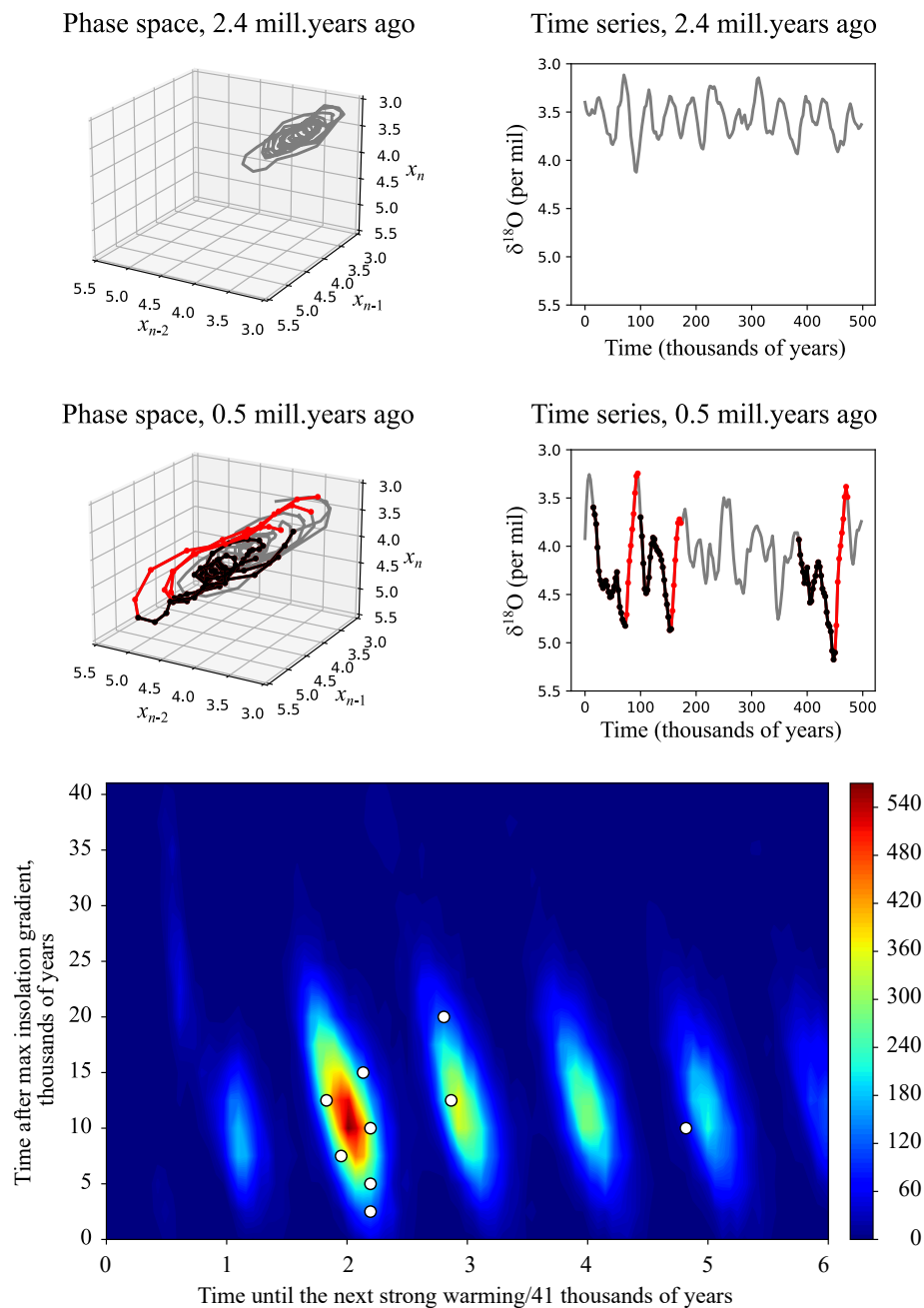


Рис. 4. Особенности динамики эмпирической модели климата плейстоцена. Сверху показаны фрагменты фазовых траекторий и временных рядов модели, характерные для эпох до и после ПСП. Красным цветом показаны потепления, черным – похолодания климата. Снизу показано распределение резких потеплений климата в модели на плоскости «время до следующего резкого потепления – запаздывание относительно максимума градиента инсоляции». Резкие потепления определены так же, как на рис. 1. Светлыми кружками помечены соответствующие события в ряде LR04 – те же, что помечены кружками на рис. 1

Fig. 4. Features of the dynamics of the Pleistocene climate empirical model. Fragments of the phase trajectories and time series of the model, typical for epochs before and after the Middle Pleistocene Transition (MPT), are shown at the top. Climate warming events are shown in red, cooling events are shown in black. Bottom panel shows the distribution of sharp climate warming events in the model on the plane «time before the next abrupt warming – lag after the maximum of the insolation gradient». Abrupt warming events are defined in the same way as in Fig. 1. Lite circles mark the corresponding events in the LR04 series – the same as those marked with circles in Fig. 1

Основной вывод, который можно сделать по результатам представленного анализа, заключается в том, что принципиальным фактором, лежащим в основе ПСП, является нелинейный отклик климатической системы на мелкомасштабные (тысячелетние и менее) процессы. При этом колебания наклона оси Земли – единственный астрономический форсинг, значимый для климатической динамики в плейстоцене, – определяют кратность интервалов между большими межледниковьями и способствуют увеличению амплитуды ледниковых циклов после ПСП. Таким образом, с точки зрения рассмотренного ряда LR04, теории ПСП, которые ставят по главу угла вариации астрономических параметров, не являются статистически значимыми.

2.2. Прогностическая модель индекса ЭНЮК. Механизм, лежащий в основе ЭНЮК, включает в себя запаздывающие связи температуры поверхности океана и термоклина вдоль экватора в Тихом океане, которые являются следствием взаимодействия атмосферы и океана через аномалии зональных ветров в ячейке Уолкера и распространение океанических волн [59,60]. В рамках широко распространенной концепции перезаряжающегося осциллятора [60], в результате воздействия на океан пассатных ветров (наиболее сильных в отрицательной фазе ЭНЮК – Ла-Нинья), вызывающих вихрь касательного напряжения ветра и транспорт подповерхностных вод в направлении экватора (транспорт Свердлупа), происходит накопление запаса тепла в подповерхностных экваториальных водах, который потом через разрушение циркуляции Уолкера приводит к положительной фазе ЭНЮК (Эль-Ниньо) и «разрядке» накопленного в экваториальных водах тепла. В фазе Эль-Ниньо происходит охлаждение подповерхностных вод, что в конечном итоге приводит к отрицательным аномалиям температуры поверхности океана (ТПО) в центральной и восточной частях бассейна с последующим переключением атмосферно-океанической системы в фазу Ла-Нинья. Тот эмпирический факт, что подповерхностная температура океана является основным (и, как считается, наиболее ранним) предиктором динамики ЭНЮК [61,62], является ярким подтверждением этого механизма. Этот фактор учитывается, например, при моделировании ЭНЮК на основе анализа ТПО с помощью динамических моделей с памятью [32,63]: последовательности состояний ТПО, используемые для инициализации модели при прогнозе, содержат в себе информацию о скорости изменения ТПО, которая, в свою очередь, является функцией содержания тепла в верхнем океане [64].

Однако прогноз климатической динамики в тропической части Тихого океана существенно затруднен воздействием на систему атмосферных аномалий в субтропиках, не связанных непосредственно с ЭНЮК. Такие аномалии могут способствовать переключениям фаз ЭНЮК посредством изменения касательных напряжений ветра на поверхности океана [65,66]. Весной роль таких аномалий особенно велика, поскольку паттерны аномалий ТПО в этот период выражены слабо, и динамика ТПО имеет нерегулярный характер. Данное обстоятельство приводит к возникновению так называемого весеннего барьера предсказуемости ТПО – резкого снижения автокорреляций ТПО в конце весны – начале лета. В работе [64] было показано, что 90% динамики ЭНЮК в центральной части бассейна (индекс Nino 3.4) может быть описано детерминированным временным паттерном, охватывающим июнь–май, с амплитудой, зависящей от года. Другими словами, ЭНЮК состоит из циклов, охватывающих июнь – май следующего года, внутри которых предсказуемость много лучше, чем между циклами. Для того чтобы преодолеть такой барьер предсказуемости, требуется поиск атмосферных, не связанных с ТПО, предикторов ЭНЮК. В работах [65,67] описан механизм, согласно которому внетропические паттерны атмосферной циркуляции, формирующиеся поздней зимой, могут иметь долгосрочное воздействие на весь предстоящий цикл ЭНЮК через так называемый след ТПО. Такой след, образующийся весной вследствие сложившегося распределения потоков тепла у поверхности океана, сохраняется до лета и индуцирует соответствующие изменения ветров в тропиках, которые, в свою очередь, влияют на ЭНЮК через океанические волны Кельвина. В работе [68] утверждается, что данный

механизм необходимо учитывать при прогнозе ЭНЮК, и атмосферные факторы так же важны, как и океанические.

Как правило, используемые для эмпирического моделирования ЭНЮК временные ряды начинаются с середины 20 века, то есть анализируемый временной интервал охватывает примерно два десятка событий ЭНЮК – Эль-Ниньо и Ла-Нинья. В такой ситуации, когда вероятность ложно детектируемых корреляций высока, статистическая обоснованность выводов о том, что конкретная величина, выделенная из данных наблюдений, может быть полезна для прогноза ЭНЮК, должна быть предметом тщательных проверок. Более того, необходимо проверять значимость улучшения предсказаний, даваемых моделью, на вход которой подается вновь найденный предиктор, поскольку его использование может приводить к переобучению модели – лучшему соответствию конкретной выборке, но ухудшению прогностических свойств.

В работе [35] был найден индекс, рассчитываемый каждый год как среднее значение аномалий (отклонений от многолетних сезонных средних) атмосферного давления на уровне моря (ДУМ) в небольшой области около Гавайских островов, усредненное за февраль–март (далее – Гавайский индекс (ГИ)). С помощью обширных статистических тестов на основе пространственно-распределенных AR-суррогатов (детали см. в работе [35]) показано, что эта величина имеет статистически значимые корреляции с индексом Niño 3.4 на всем протяжении предстоящего цикла ЭНЮК с июня по май следующего года, показанные на рис. 5. Показано, что найденный индекс может иметь отношение к явлению следа ТПО, поскольку описывает наиболее

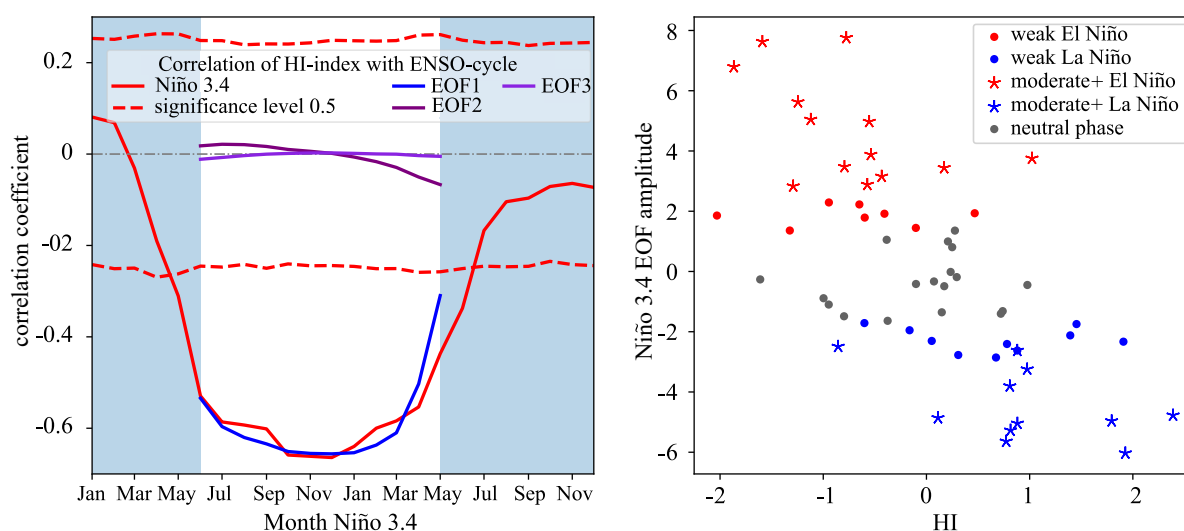


Рис. 5. Корреляция индекса ГИ с циклом ЭНЮК. Слева показана зависимость корреляции ГИ и Niño 3.4 от месяца года. Предстоящий (относительно ГИ) цикл ЭНЮК выделен белым фоном. Красным пунктиром нанесены уровни значимости 0.05 для этой корреляции, определенные по AR1-суррогатному тесту. Оттенками фиолетового показаны вклады трех главных временных ЭОФов Niño 3.4 в корреляцию. Справа показана зависимость амплитуды главного временного ЭОФа Niño 3.4 от значения текущего ГИ. Циклы, соответствующие умеренным и сильным (умеренные+), слабым и нейтральным фазам ЭНЮК, помечены звездами, цветными кружками и черными кружками, соответственно. Более детальное описание см. в работе [35]

Fig. 5. Correlation of the HI index with the ENSO cycle. On the left panel, the dependence of the correlation between HI and Niño 3.4 on the month of the year is shown. The upcoming (relative to the HI) ENSO cycle is highlighted with a white background. The red dotted line shows the significance levels of 0.05 for this correlation, determined by the AR1 surrogate test. Shades of violet show the contributions of the three main temporal EOFs of the Niño 3.4 index to this correlation. On the right panel, the dependence of the amplitude of the leading temporal Niño 3.4 EOF on the value of the current HI is shown. Cycles corresponding to moderate and strong (moderate+), weak and neutral ENSO events are marked with stars, colored circles and black circles, respectively. See the work [35] for a more detailed description

значимую с точки зрения связи с индексом Nino 3.4 часть крупномасштабного паттерна ДУМ, охватывающего субтропическую и среднеширотную части северного Тихого океана.

Согласно исследованию [64], цикл ЭНЮК в индексе Nino 3.4 хорошо описывается старшей эмпирической ортогональной функцией (главным ЭОФом), построенным по 12-месячным неперекрывающимся окнам в ряде индекса, начинающимся в июне. Данный ЭОФ захватывает около 88% вариации Nino 3.4 (для выборки, исследуемой в [35]). Таким образом, проекции всех фрагментов ряда индекса с июня по май на этот ЭОФ могут рассматриваться как временной ряд (с шагом год) амплитуды цикла ЭНЮК. Как видно из рис. 5, компонента этого ЭОФа доминирует в корреляциях ГИ с Nino 3.4, по сравнению со следующими по вариации 12-месячными ЭОФаами. Коэффициент корреляции ГИ с амплитудой предстоящего (по отношению к текущему ГИ) цикла ЭНЮК равен 0.66. Из рис. 5 видно, что умеренные и сильные события ЭНЮК вносят наибольший вклад в эту корреляцию.

С учетом специфики найденного индекса, его использование в качестве форсинга в эмпирической модели ЭНЮК задавалось следующим образом:

$$x_{ni} = a_1^i x_{ni}^{-1} + a_2^i x_{ni}^{-2} + \dots + a_l^i x_{ni}^{-l} + b^i h_n + \xi_{ni}, \quad (11)$$

где x_{ni} – индекс Nino 3.4 в i -й месяц n -го цикла ЭНЮК, x_{ni}^{-j} – этот же индекс j месяцев до x_{ni} , h_n – значение ГИ перед n -м циклом ЭНЮК, l – число задержек, определяющее размерность модели. В таких обозначениях i пробегает от 1 до 12, причем $i = 1$ соответствует июню – первому месяцу цикла. В рамках данной модели значение индекса Nino 3.4 в определенный месяц предсказывается на основе значений этого индекса в l предыдущих месяцев, а также значения ГИ, вычисляемого раз в год по ДУМ в феврале–марте и остающегося постоянным в течение каждого интервала с июня по май. Таким образом, форсинг ГИ представляет собой кусочно-постоянный сигнал, определяющий «пьедесталы» для циклов ЭНЮК. В результате в каждом n -м цикле форсинг $b^i h_n$ играет роль зависящего от сезона смещения выхода модели, благоприятствующего развитию Эль-Ниньо, либо Ла-Нинья в модельной динамике.

Сложность модели (11) определяется следующими структурными параметрами, для выбора которых требуется байесова оптимизация. Первый параметр – это число задержек l , определяющее глубину памяти модели. Далее, важной структурной составляющей модели является сезонный форсинг, описываемый зависимостью (неизвестной априори) амплитуд модели a и b от времени года, то есть от номера месяца i в цикле ЭНЮК. Необходимость учета сезонных вариаций при эмпирическом моделировании ЭНЮК подчеркивалась во многих работах – см., например, [63,69,70]. При этом очевидно, что временная детализация описания таких вариаций, определяемая гладкостью сезонной зависимости коэффициентов модели, должна быть обоснована статистически во избежание переобучения модели. Другими словами, мы должны проверить разные гипотезы о сезонном форсинге – от постоянных, не зависящих от i , до несвязанных между собой в разные месяцы года амплитуд. В работе [35] использовался ряд Фурье для представления периодической зависимости коэффициентов $\mathbf{k}^i = (a_1^i, \dots, a_l^i, b^i)$ от i :

$$\mathbf{k}^i = \mathbf{k}_0 + \sum_{n=1}^q \mathbf{c}_n \cos \frac{2\pi}{12} ni + \mathbf{s}_n \sin \frac{2\pi}{12} ni, \quad (12)$$

где $i = 1, \dots, 12$, q могут принимать значения от 0 до 6 ($q=0$ соответствует $\mathbf{k}^i = \mathbf{k}_0$; $\mathbf{s}_6 = 0$ по определению), \mathbf{k}_0 , \mathbf{c}_n и \mathbf{s}_n – переопределенные коэффициенты, которые оцениваются при обучении модели. Случай $q = 6$ эквивалентен 12-ти независимо обучаемым моделям для каждого времени года. Ограничивая разложение (12) величиной q , мы задаем гладкость сезонного форсинга в параметрах модели. Таким образом, параметр q – второй структурный параметр модели. Наконец, необходимо обосновать, что включение в модель форсинга ГИ h_n не только позволяет

аппроксимировать имеющуюся выборку более точно, но и делает это оптимальным образом, не переобучая модель.

Было найдено, что модель с $l = 2$, возмущаемая как сезонным форсингом, так и ГИ, является оптимальной с точки зрения байесова критерия (9). Оптимальная гладкость сезонного форсинга соответствует $q = 1$, то есть амплитуды a и b в (11) – синусоидальные сигналы с периодом 1 год. Выигрыш в предсказательной способности модели от включения обоих форсингов исследовался путем сравнения результатов прогноза, даваемых моделью без форсингов ($b = 0$ и $q = 0$) с оптимальным l , моделью только с сезонным форсингом ($b = 0$) с оптимальными l и q и оптимальной моделью с обоими форсингами. В качестве мер предсказательной способности модели использовались две величины (как в работах [32, 71]):

$$e_i = \left[\frac{1}{N} \sum_n (\bar{x}_{ni} - x_{ni})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r_i = \frac{\sum_n (x_{ni} - \langle x_{ni} \rangle_n) (\bar{x}_{ni} - \langle \bar{x}_{ni} \rangle_n)}{\left[\sum_n (x_{ni} - \langle x_{ni} \rangle_n)^2 \sum_n (\bar{x}_{ni} - \langle \bar{x}_{ni} \rangle_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}},$$
(13)

где N – полное количество циклов ЭНЮК, $\langle x_{ni} \rangle_n$ – сезонное многолетнее среднее индекса, \bar{x} – прогноз индекса, определенный как среднее по ансамблю из 10000 модельных предсказаний (отличающихся друг от друга шумовыми реализациями). Первая мера e_i является среднеквадратичной ошибкой прогноза в i -м месяце цикла. Вторая мера r_i – это обычная выборочная корреляция между предсказанными и настоящими значениями индекса. Эти две меры дополняют друг друга: в то время как e показывает количественную ошибку прогноза, r отражает качественное соответствие прогнозных и реальных характеристик, – в частности, знака и относительных изменений аномалий индекса.

Полученные результаты суммированы на верхних панелях рис. 6 в виде карт для мер (13) на плоскости целевой месяц прогноза – дальность прогноза. Кроме того, на рисунках нанесены уровни значимости улучшений прогноза с использованием модели с ГИ, по отношению к ансамблю суррогатов, сгенерированных оптимальной моделью без ГИ, но с сезонным форсингом (более подробно см. в [35]). В целом, из рисунка видно, что предсказательные свойства модели улучшаются с введением форсингов. В частности, модель с сезонным форсингом дает лучшие результаты на временах предсказания до 6–7 месяцев. Добавление ГИ в модель существенно улучшает дальние прогнозы с временами предсказания более 4 месяцев (там, где этот форсинг доступен). При этом наиболее значимые улучшения происходят в целевом интервале с августа по март для ошибки e и на всем цикле ЭНЮК с июня по май для корреляции r .

На нижней панели рис. 6 дополнительно проиллюстрировано, что преимущество модели с форсингом ГИ обусловлено улучшением прогнозов, стартующих недалеко от границы весеннего барьера, то есть весной. Если оптимальная модель без ГИ форсинга имеет тенденцию к предсказанию нейтральных (нулевых) значений индекса Nino 3.4 после весеннего барьера, модель с данным форсингом дает более информативные предсказания. Однако прогнозы, начинающиеся задолго до барьера (например, осенью), являются почти одинаковыми для обеих моделей, как видно из нижней панели рисунка.

Таким образом, в результате вывода оптимальной модели было установлено, что введенный атмосферный индекс ГИ содержит в себе важную информацию для предсказания предстоящего цикла ЭНЮК с июня по следующий май и может использоваться в качестве раннего предиктора ЭНЮК, помогающего преодолеть весенний барьер. В настоящее время ведется работа по улучшению модели ИПФ РАН для оперативного прогноза ЭНЮК [32], вошедшей в международный ансамбль моделей ЭНЮК (IRI/CPC ENSO Predictions Plume [71]), с учетом описанных результатов.

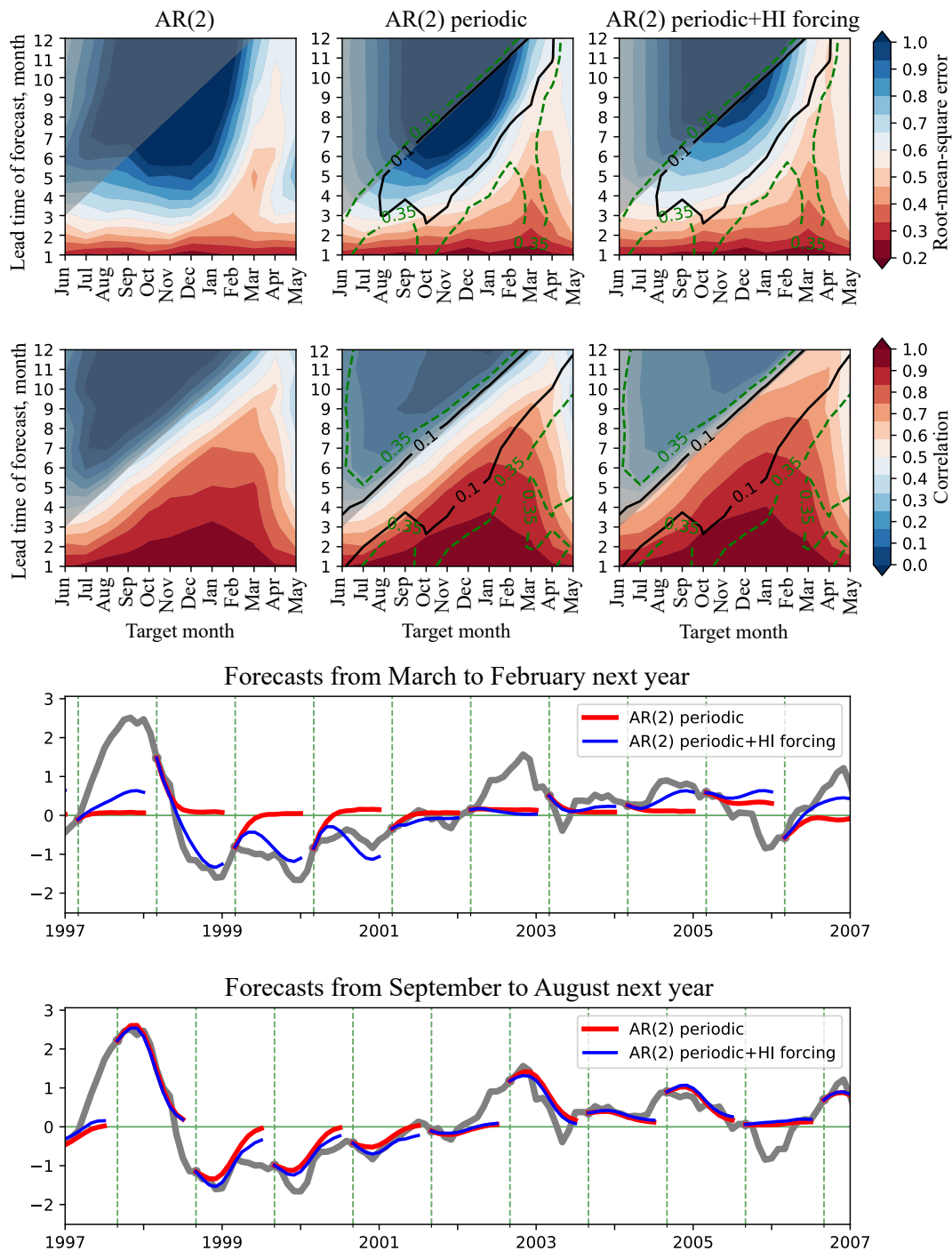


Рис. 6. Предсказательная способность оптимальных моделей Nino 3.4. На верхних панелях цветом показаны меры (13) на плоскостях «прогнозируемый месяц – дальность прогноза». Слева направо: модель без форсингов, модель только с сезонным форсингом, модель и с сезонным, и с ГИ-форсингом. Линиями нанесены уровни значимости улучшения прогноза при использовании модели с ГИ и сезонным форсингами относительно модели только с сезонным форсингом. На нижних панелях показаны фрагменты ряды Nino 3.4 с медианными прогнозами на 12 месяцев, стартующими с марта (сверху) и сентября (снизу)

Fig. 6. The prediction skills of the optimal Nino 3.4 models. The upper panels show the measures (13) on the planes «target month – lead time of forecast». From left to right: model without any forcing, model with seasonal forcing only, model with both seasonal and HI forcing. The lines show the significance levels of the forecast improvement when using the model with HI and seasonal forcing relative to the model with only seasonal forcing. The lower panels show fragments of the Nino 3.4 series with median forecasts for 12 months starting from March (top) and September (bottom)

2.3. Отклик ТПО в регионе ЭНЮК на солнечную активность на вековых масштабах.

В настоящее время отсутствует консенсус по отношению как к степени влияния солнечной активности на климат, так и к доминирующим физическим механизмам этого влияния. Так, эмпирическим путем были выявлены корреляции событий Бонда [72] (повышения интенсивности движения льда в северной Атлантике) с солнечной активностью в голоцене (современная эпоха, начавшаяся 12 тыс. лет назад). Однако крайне незначительные относительные изменения солнечной активности – не более 0.5% – говорят о том, что, если существенная связь солнечного форсинга с климатом действительно есть, то должен существовать механизм усиления этого форсинга [73]. Широко распространены концепции, задействующие стратосферу как основное звено передачи и усиления солнечного сигнала. Например, предполагается [74], что вариации разогрева стратосферы из-за поглощения озоном ультрафиолетовой части спектра солнечного излучения инициируют изменения меридионального градиента температуры в нижней стратосфере, вследствие чего меняется индекс рефракции планетарных волн, перераспределяются скорости в верхней тропосфере, что в результате приводит к климатическим изменениям в средних широтах. В рамках другой концепции [75], увеличение солнечной радиации разогревает океан в тропиках и субтропиках, увеличивает конвекцию и, тем самым, усиливает температурный градиент в тропопаузе, меняя рефракцию тропосферных волн так же, как в предыдущей концепции. Принципиально иной путь передачи солнечного сигнала, посредством воздействия на подсистему, лежащую в основе ЭНЮК, описан в работе [73]. С помощью экспериментов с моделью ЭНЮК промежуточной сложности [76] установлено, что даже слабый рост солнечной радиации приводит к заметному увеличению разницы ТПО между западной и восточной частями экваториального Тихого океана. Это происходит по причине смещения получаемого океаном от Солнца тепла на запад из-за западной направленности пассатных ветров, дующих вдоль экватора; при этом вода в восточной части остается холодной из-за апвеллинга. В сложившихся условиях, атмосферно-океаническая обратная связь Бьеркнеса [77] способствует смещению ЭНЮК в сторону Ла-Ниньо, что усиливает пассаты и, как следствие, еще больше увеличивает разницу в ТПО между западом и востоком. Далее это возмущение тихоокеанской атмосферно-океанической системы может передаваться в другие части Земного шара через хорошо известные дальние связи ЭНЮК [78, 79].

В работе [80] был проведен совместный анализ палеоданных за последние 850 лет и данных реанализа за последние 150 лет, с целью проверки выявленного механизма воздействия солнечной активности на ЭНЮК. В качестве палеоданных, отражающих ТПО, использовались различные климатические прокси, полученные из кораллов, колец деревьев, ледяных кернов и донных отложений [81]. На интервале времени, охватывающем последние 150 лет, строились модели связи палеоданных с индексами Nino 3.4, определяемыми по трем базам данных реанализа – Extended Reconstructed SST, version 3 (ERSSTv3), second Hadley Centre SST dataset (HadSST2) и Kaplan SST. Далее, с помощью построенных моделей реконструировались индексы Nino 3.4 на интервале с 1150 по 1995 год с шагом по времени 1 год, соответствующие трем используемым базам (см. верхнюю панель рис. 7). Для представления сигнала солнечной активности, в этой же работе использовалась реконструкция солнечной активности, сделанная в работе [82] на основе сочетания данных о космогенных изотопах ^{14}C и ^{10}Be и эмпирической связи между магнитной активностью Солнца и солнечным излучением. Сравнение используемого индекса солнечной активности с полученными индексами Nino 3.4, на основе методов кросс-вейвлетов и фазовой вейвлет-когерентности, позволило сделать вывод о значимой противофазной зависимости между индексом Nino 3.4 и вариациями солнечной активности в полосе частот, соответствующей характерному масштабу около 200 лет.

Мы предприняли попытку перепроверить сделанные выводы с помощью построения оптимальной эмпирической модели индекса Nino 3.4 с шагом год, возмущаемой как индексом солнечной активности, так и общим содержанием углекислого газа в атмосфере (данные форсинги

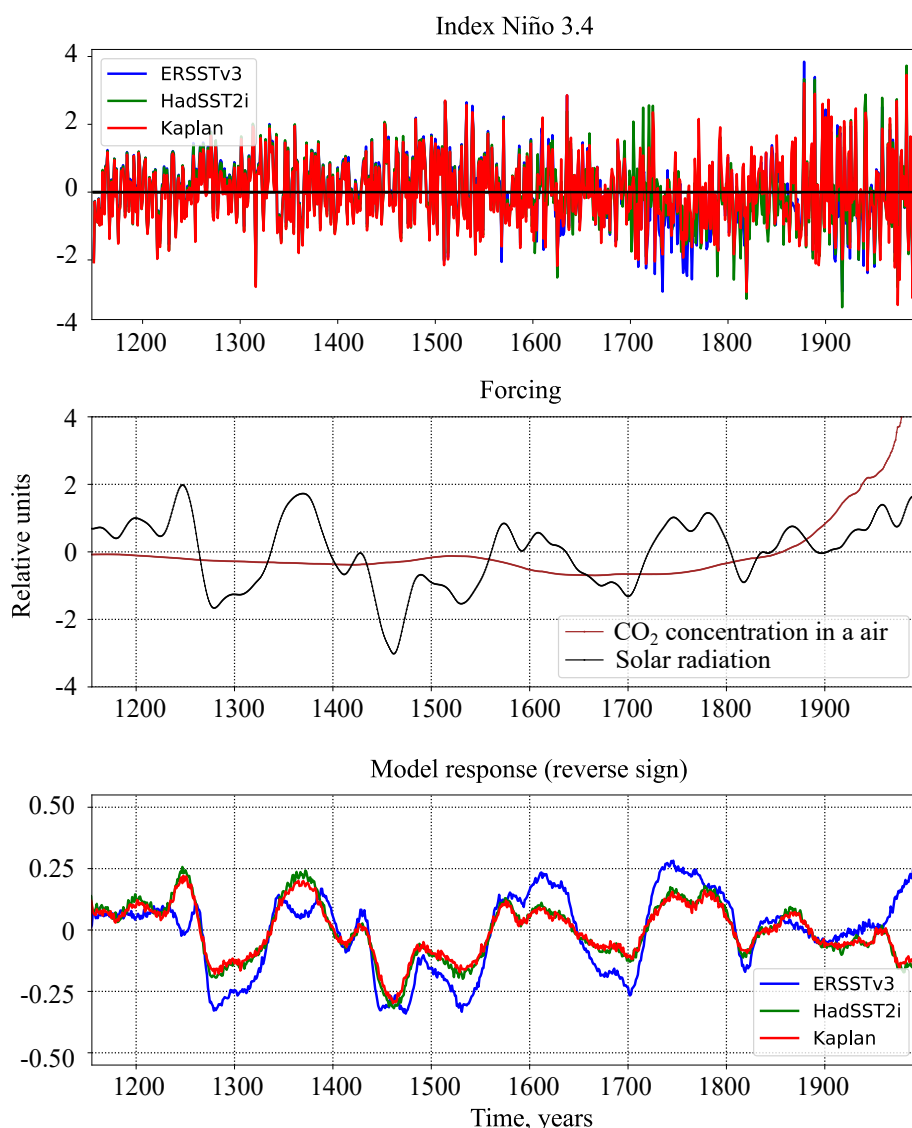


Рис. 7. Данные и выход эмпирических моделей. Сверху показаны индексы Niño 3.4, реконструированные по палеоклиматическим прокси с использованием трех баз данных реанализа. На средней панели показаны форсинги, используемые в модели – ряд солнечной активности и ряд общего содержания углекислого газа в атмосфере. На нижней панели показаны средние по ансамблям 10000 модельных реализаций значения Niño 3.4, генерируемые моделями, обученными по трем рядам, представленным на верхней панели

Fig. 7. Data and the empirical model output. On the top panel, the Niño 3.4 indices are shown, reconstructed from paleoclimatic proxies using three reanalysis databases. The middle panel shows the forcing used in the model – the solar activity signal and the total atmospheric carbon dioxide signal. The bottom panel shows the mean (averaged over 10,000 model runs) realizations of the Niño 3.4 index, which generated by the models learned by the three series presented in the top panel

приведены на средней панели рис. 7), используя те же временные ряды индексов Niño 3.4 и солнечной активности, что и в работе [80]. Модель строилась на базе искусственной нейронной сети, аналогично модели из раздела 2.1. Поскольку изменения орбитальных форсингов являются медленными по сравнению с протяженностью нашего временного ряда, их учет сводился к заданию линейной неавтономности модели, как описано в разделе 1.

Далее, по каждому ряду были построены модели в форме (4) с разными комбинациями форсингов. Анализ байесовой оптимальности показал, что использование солнечной активности

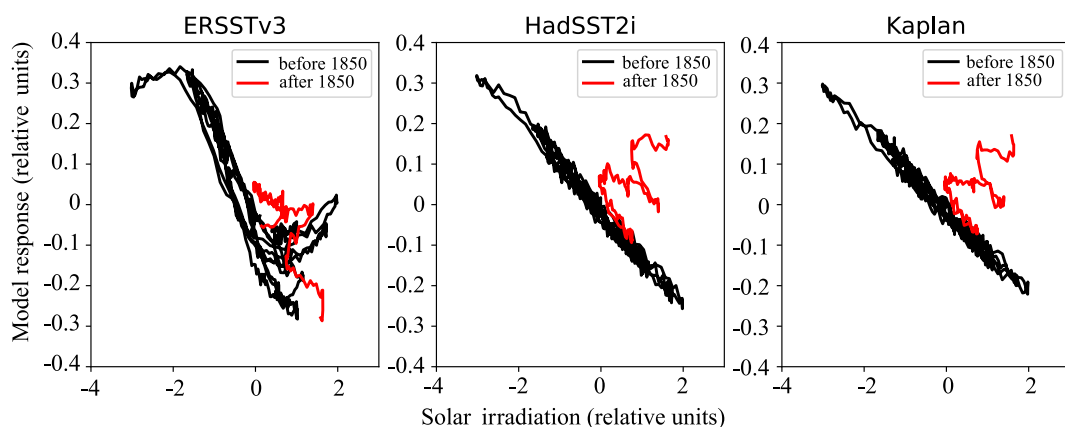


Рис. 8. Зависимости среднего по ансамблю выхода моделей из рис. 7 от солнечной активности, для трех баз данных

Fig. 8. Dependences of the ensemble mean model output of the models from Fig. 7 on solar activity, for three databases

в комбинации с общим содержанием углекислого газа в качестве двумерного форсинга модели является статистически обоснованным. Были найдены оптимальные структурные параметры $L = 3$ и $m = 3$ для модели, обученной по ряду индекса Эль-Ниньо, основанному на реанализе ERSSTv3, и $L = 2$ и $m = 1$ для моделей, обученных по рядам, основанным на двух других реанализах (HadSST2i и Kaplan). Результаты моделирования, полученные по каждому из трех исследуемых рядов, качественно совпадают. Получено, что в структуре построенной модели отклик на сигнал солнечной активности описывается фактически аддитивно по отношению к собственной динамике модели на мелких масштабах, то есть собственная динамика модели не зависит от фазы солнечного цикла. На нижней панели рис. 7 для каждой из трех полученных стохастических моделей показаны модельные временные ряды, усредненные по ансамблям из 10000 случайных реализаций моделей. Фактически, они характеризуют вынужденные решения полученных моделей, являющиеся откликами на введенные форсинги. Видно, что для всех трех моделей этот отклик содержит сильную составляющую с характерным периодом около 200 лет. Следует отметить разброс средних откликов моделей в конце рассматриваемого интервала, примерно с 1950 года. Это связано с большой неопределенностью отклика моделей на аномальный рост CO_2 , случившийся на относительно коротком временном интервале в результате антропогенных выбросов. Причина такой неопределенности – незначительность вклада этого интервала в ценовую функцию при моделировании 850-летней динамики, а также единичность этого события. Отметим также, что отклик модели, основанной на реанализе ERSSTv3, на солнечную активность является более выраженным по амплитуде. Кроме того, в отличие двух других баз данных, он является существенно нелинейным, как видно из рис. 8, высокие значения солнечной радиации хотя и понижают значения Nino 3.4, но и приводят к их большему разбросу. Причины таких различий между реконструкциями на основе различных реанализов предстоит выяснить в дальнейших исследованиях. Тем не менее рис. 7 и 8 демонстрируют, что все три модели подтверждают вывод, сделанный в работе [80], об антикорреляции между двухсотлетними колебаниями солнечной активности и индекса Nino 3.4.

Заключение

Описанная методика эмпирического моделирования является эффективным инструментом для извлечения скрытых законов эволюции из данных наблюдений. Стохастическая параметризация оператора эволюции в сочетании с байесовой оптимизацией позволяет находить модель

оптимальной сложности, соответствующую адекватному балансу точности аппроксимации данных и степени округления системы. В рамках методики, различные физические гипотезы об устройстве системы задаются как структурно различные параметризации оператора эволюции. Как следствие, становится возможным выбрать статистически наиболее обоснованную, то есть наиболее соответствующую имеющейся выборке данных гипотезу. Так, в случае перехода среднего плейстоцена, выяснилось, что решающим фактором является отклик существенно нелинейной динамической системы на стохастический форсинг, описывающий тысячелетнюю изменчивость климата, при том, что удалось также выявить астрономические параметры, значимо влияющие на наблюдаемую динамику. В динамике ЭНЮК на межгодовых масштабах методика позволила доказать полезность найденного путем корреляционного анализа атмосферного форсинга, отражающего известный механизм долгосрочного влияния субтропической атмосферы на ЭНЮК и существенно снижающего весенний барьер предсказуемости – главную проблему статистических прогнозов событий ЭНЮК. Наконец, была подтверждена значимость связи ТПО в тропическом Тихом океане с сигналом солнечной активности на вековых масштабах, что может рассматриваться как дополнительное подтверждение гипотезы влияния солнечной активности на глобальный климат через ЭНЮК.

В данном обзоре осталась не затронутой проблема выбора фазовых переменных в случае, когда анализируемые данные представляют собой высокоразмерные, в частности, пространственно-распределенные временные ряды. Для таких случаев существует большое число методов редукции размерности, позволяющих переходить к наиболее значимым для наблюдаемой динамики низкоразмерным проекциям фазового пространства. В частности, авторами данной работы был разработан ряд методов выделения динамических мод, в основе которых лежат схожие принципы байесовой оптимизации. Для ознакомления с этими методами и их климатическими приложениями, см. обзорную работу [83], а также работы [32, 34, 79, 84, 85] и имеющиеся в них ссылки.

Список литературы

1. Безручко Б. П., Смирнов Д. А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. 320 с.
2. Abarbanel H. D. I. Analysis of Observed Chaotic Data. New York: Springer, 1996. 272 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0763-4.
3. Anishchenko V. S., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments. Springer Series in Synergetics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 446 p. DOI: 10.1007/978-3-540-38168-6.
4. Gouesbet G., Letellier C. Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49, no. 6. P. 4955–4972. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.4955.
5. Anishchenko V., Pavlov A., Janson N. Global reconstruction in the presence of a priori information // Chaos, Solitons & Fractals. 1998. Vol. 9, no. 8. P. 1267–1278. DOI: 10.1016/S0960-0779(98)00061-7.
6. Schelter B., Mader M., Mader W., Sommerlade L., Platt B., Lai Y.-C., Grebogi C., Thiel M. Overarching framework for data-based modelling // EPL. 2014. Vol. 105, no. 3. P. 30004. DOI: 10.1209/0295-5075/105/30004.
7. Gorur-Shandilya S., Timme M. Inferring network topology from complex dynamics // New J. Phys. 2011. Vol. 13. P. 013004. DOI: 10.1088/1367-2630/13/1/013004.
8. Wang W.-X., Yang R., Lai Y.-C., Kovanis V., Grebogi C. Predicting catastrophes in nonlinear dynamical systems by compressive sensing // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106, no. 15. P. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.154101.

9. *Baake E., Baake M., Bock H. G., Briggs K. M.* Fitting ordinary differential equations to chaotic data // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 45, no. 8. P. 5524–5529. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.5524.
10. *Bezruchko B. P., Smirnov D. A., Sysoev I. V.* Identification of chaotic systems with hidden variables (modified Bock's algorithm) // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2006. Vol. 29, no. 1. P. 82–90. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.08.204.
11. *Gorodetskiy V., Osadchuk M.* Analytic reconstruction of some dynamical systems // *Phys. Lett. A.* 2013. Vol. 377, no. 9. P. 703–713. DOI: 10.1016/j.physleta.2012.12.043.
12. *Mukhin D. N., Feigin A. M., Loskutov E. M., Molkov Y. I.* Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73, no. 3. P. 036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036211.
13. *Molkov Y. I., Mukhin D. N., Loskutov E. M., Timushev R. I., Feigin A. M.* Prognosis of qualitative system behavior by noisy, nonstationary, chaotic time series // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 84, no. 3. P. 036215. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.036215.
14. *Molkov Y. I., Loskutov E. M., Mukhin D. N., Feigin A. M.* Random dynamical models from time series // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 85, no. 3. P. 036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.036216.
15. *Bezruchko B. P., Smirnov D. A.* Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63, no. 1. P. 016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.016207.
16. *Смирнов Д. А., Сысоев И. В., Селезнев Е. П., Безручко Б. П.* Реконструкция моделей неавтономных систем с дискретным спектром воздействия // *Письма в ЖТФ.* 2003. Т. 29, № 19. С. 69–76.
17. *Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* Extracting information masked by the chaotic signal of a time-delay system // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66, no. 2. P. 026215. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.026215.
18. *Sysoev I. V., Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Bezruchko B. P.* Reconstruction of ensembles of coupled time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 89, no. 6. P. 062911. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.062911.
19. *Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Kulminskiy D. D., Prokhorov M. D.* Recovery of couplings and parameters of elements in networks of time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E.* 2016. Vol. 94, no. 5. P. 052207. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052207.
20. *Han X., Shen Z., Wang W.-X., Di Z.* Robust reconstruction of complex networks from sparse data // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114, no. 2. P. 028701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.028701.
21. *Brunton S. L., Proctor J. L., Kutz J. N.* Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* 2016. Vol. 113, no. 15. P. 3932–3937. DOI: 10.1073/pnas.1517384113.
22. *Mangan N. M., Brunton S. L., Proctor J. L., Kutz J. N.* Inferring biological networks by sparse identification of nonlinear dynamics // *IEEE Trans. Mol. Biol. Multi-Scale Commun.* 2016. Vol. 2, no. 1. P. 52–63. DOI: 10.1109/TMBMC.2016.2633265.
23. *Pikovsky A.* Reconstruction of a neural network from a time series of firing rates // *Phys. Rev. E.* 2016. Vol. 93, no. 6. P. 062313. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.062313.
24. *Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Pikovsky A.* Reconstruction of coupling architecture of neural field networks from vector time series // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2018. Vol. 57. P. 342–351. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.10.006.
25. *Feigin A. M., Molkov Y. I., Mukhin D. N., Loskutov E. M.* Investigation of nonlinear dynamical properties by the observed complex behaviour as a basis for construction of dynamical models of atmospheric photochemical systems // *Faraday Discuss.* 2002. Vol. 120. P. 105–123. DOI: 10.1039/b102985c.
26. *Loskutov E. M., Molkov Y. I., Mukhin D. N., Feigin A. M.* Markov chain Monte Carlo method in Bayesian reconstruction of dynamical systems from noisy chaotic time series // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77, no. 6. P. 066214. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.066214.

27. *Mukhin D., Loskutov E., Mukhina A., Feigin A., Zaliapin I., Ghil M.* Predicting critical transitions in ENSO models. Part I: Methodology and simple models with memory // *Journal of Climate*. 2015. Vol. 28, no. 5. P. 1940–1961. DOI: 10.1175/JCLI-D-14-00239.1.
28. *Mukhin D., Kondrashov D., Loskutov E., Gavrillov A., Feigin A., Ghil M.* Predicting critical transitions in ENSO models. Part II: Spatially dependent models // *Journal of Climate*. 2015. Vol. 28, no. 5. P. 1962–1976. DOI: 10.1175/JCLI-D-14-00240.1.
29. *Molkov Y.I., Mukhin D.N., Loskutov E.M., Feigin A.M., Fidelin G.A.* Using the minimum description length principle for global reconstruction of dynamic systems from noisy time series // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 80, no. 4. P. 046207. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.046207.
30. *Gavrillov A., Loskutov E., Mukhin D.* Bayesian optimization of empirical model with state-dependent stochastic forcing // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2017. Vol. 104. P. 327–337. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.08.032.
31. *Arnold L.* *Random Dynamical Systems*. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 586 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12878-7.
32. *Gavrillov A., Seleznev A., Mukhin D., Loskutov E., Feigin A., Kurths J.* Linear dynamical modes as new variables for data-driven ENSO forecast // *Clim. Dyn.* 2019. Vol. 52, no. 3–4. P. 2199–2216. DOI: 10.1007/s00382-018-4255-7.
33. *Mukhin D., Gavrillov A., Loskutov E., Kurths J., Feigin A.* Bayesian data analysis for revealing causes of the middle pleistocene transition // *Sci. Rep.* 2019. Vol. 9, no. 1. P. 7328. DOI: 10.1038/s41598-019-43867-3.
34. *Seleznev A., Mukhin D., Gavrillov A., Loskutov E., Feigin A.* Bayesian framework for simulation of dynamical systems from multidimensional data using recurrent neural network // *Chaos*. 2019. Vol. 29, no. 12. P. 123115. DOI: 10.1063/1.5128372.
35. *Mukhin D., Gavrillov A., Seleznev A., Buyanova M.* An atmospheric signal lowering the spring predictability barrier in statistical ENSO forecasts // *Geophysical Research Letters*. 2021. Vol. 48, no. 6. P. e2020GL091287. DOI: 10.1029/2020GL091287.
36. *Gildor H., Tziperman E.* Sea ice as the glacial cycles' Climate switch: role of seasonal and orbital forcing // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2000. Vol. 15, no. 6. P. 605–615. DOI: 10.1029/1999PA000461.
37. *Smirnov D. A., Mokhov I. I.* From Granger causality to long-term causality: Application to climatic data // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 80, no. 1. P. 016208. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.016208.
38. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Эмпирические оценки воздействия естественных и антропогенных факторов на глобальную приповерхностную температуру // *Доклады Академии Наук*. 2009. Т. 426, № 5. С. 679–684.
39. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Оценки вклада Атлантической мультидесятилетней осцилляции и изменений атмосферного содержания парниковых газов в тренды приповерхностной температуры по данным наблюдений // *Доклады Академии Наук*. 2018. Т. 480, № 1. С. 97–102. DOI: 10.7868/S0869565218130200.
40. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Вклад радиационного воздействия парниковых газов и атлантической мультидесятилетней осцилляции в тренды приповерхностной температуры // *Метеорология и гидрология*. 2018. № 9. С. 5–13.
41. *Hornik K., Stinchcombe M., White H.* Multilayer feedforward networks are universal approximators // *Neural Networks*. 1989. Vol. 2, no. 5. P. 359–366. DOI: 10.1016/0893-6080(89)90020-8.
42. *Raymo M. E., Nisancioglu K. H.* The 41 kyr world: Milankovitch's other unsolved mystery // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2003. Vol. 18, no. 1. P. 1011. DOI: 10.1029/2002PA000791.
43. *Clark P. U., Archer D., Pollard D., Blum J. D., Rial J. A., Brovkin V., Mix A. C., Pisias N. G., Roy M.* The middle Pleistocene transition: characteristics, mechanisms, and implications for long-term changes in atmospheric pCO₂ // *Quaternary Science Reviews*. 2006. Vol. 25, no. 23–24. P. 3150–3184. DOI: 10.1016/j.quascirev.2006.07.008.

44. *Maslin M. A., Brierley C. M.* The role of orbital forcing in the Early Middle Pleistocene Transition // *Quaternary International*. 2015. Vol. 389. P. 47–55. DOI: 10.1016/j.quaint.2015.01.047.
45. *Elderfield H., Ferretti P., Greaves M., Crowhurst S., McCave I. N., Hodell D., Piotrowski A. M.* Evolution of ocean temperature and ice volume through the mid-Pleistocene climate transition // *Science*. 2012. Vol. 337, no. 6095. P. 704–709. DOI: 10.1126/science.1221294.
46. *Gildor H., Tziperman E.* A sea ice climate switch mechanism for the 100-kyr glacial cycles // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2001. Vol. 106, no. C5. P. 9117–9133. DOI: 10.1029/1999JC000120.
47. *Crucifix M.* Oscillators and relaxation phenomena in Pleistocene climate theory // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2012. Vol. 370, no. 1962. P. 1140–1165. DOI: 10.1098/rsta.2011.0315.
48. *Rial J. A., Oh J., Reischmann E.* Synchronization of the climate system to eccentricity forcing and the 100,000-year problem // *Nature Geosci.* 2013. Vol. 6, no. 4. P. 289–293. DOI: 10.1038/ngeo1756.
49. *Ditlevsen P. D.* Bifurcation structure and noise-assisted transitions in the Pleistocene glacial cycles // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2009. Vol. 24, no. 3. P. PA3204. DOI: 10.1029/2008PA001673.
50. *Huybers P.* Pleistocene glacial variability as a chaotic response to obliquity forcing // *Clim. Past*. 2009. Vol. 5, no. 3. P. 481–488. DOI: 10.5194/cp-5-481-2009.
51. *Benzi R., Parisi G., Sutera A., Vulpiani A.* Stochastic resonance in climatic change // *Tellus*. 1982. Vol. 34, no. 1. P. 10–15. DOI: 10.3402/tellusa.v34i1.10782.
52. *Lisiecki L. E., Raymo M. E.* A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic $\delta^{18}\text{O}$ records // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2005. Vol. 20, no. 1. P. PA1003. DOI: 10.1029/2004PA001071.
53. *Berger A., Loutre M. F.* Insolation values for the climate of the last 10 million years // *Quaternary Science Reviews*. 1991. Vol. 10, no. 4. P. 297–317. DOI: 10.1016/0277-3791(91)90033-Q.
54. *Berger A., Li X. S., Loutre M. F.* Modelling northern hemisphere ice volume over the last 3 Ma // *Quaternary Science Reviews*. 1999. Vol. 18, no. 1. P. 1–11. DOI: 10.1016/S0277-3791(98)00033-X.
55. *Rial J. A.* Abrupt climate change: chaos and order at orbital and millennial scales // *Global and Planetary Change*. 2004. Vol. 41, no. 2. P. 95–109. DOI: 10.1016/j.gloplacha.2003.10.004.
56. *Tziperman E., Gildor H.* On the mid-Pleistocene transition to 100-kyr glacial cycles and the asymmetry between glaciation and deglaciation times // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2003. Vol. 18, no. 1. P. 1–1–1–8. DOI: 10.1029/2001pa000627.
57. *McManus J. F., Oppo D. W., Cullen J. L.* A 0.5-million-year record of millennial-scale climate variability in the North Atlantic // *Science*. 1999. Vol. 283, no. 5404. P. 971–975. DOI: 10.1126/science.283.5404.971.
58. *Schulz M., Berger W. H., Sarnthein M., Grootes P. M.* Amplitude variations of 1470-year climate oscillations during the last 100,000 years linked to fluctuations of continental ice mass // *Geophysical Research Letters*. 1999. Vol. 26, no. 22. P. 3385–3388. DOI: 10.1029/1999GL006069.
59. *Burgers G., Jin F.-F., van Oldenborgh G. J.* The simplest ENSO recharge oscillator // *Geophysical Research Letters*. 2005. Vol. 32, no. 13. P. L13706. DOI: 10.1029/2005GL022951.
60. *Jin F.-F.* An equatorial ocean recharge paradigm for ENSO. Part I: Conceptual model // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1997. Vol. 54, no. 7. P. 811–829. DOI: 10.1175/1520-0469(1997)054<0811:AEORPF>2.0.CO;2.
61. *McPhaden M. J.* Tropical Pacific Ocean heat content variations and ENSO persistence barriers // *Geophysical Research Letters*. 2003. Vol. 30, no. 9. P. 1480. DOI: 10.1029/2003GL016872.
62. *Timmermann A., An S.-I., Kug J.-S., Jin F.-F., Cai W., Capotondi A., Cobb K. M., Lengaigne M., McPhaden M. J., Stuecker M. F., Stein K., Wittenberg A. T., Yun K.-S., Bayr T., Chen H.-C., Chikamoto Y., Dewitte B., Dommenges D., Grothe P., Guilyardi E., Ham Y.-G., Hayashi M., Ineson S., Kang D., Kim S., Kim W., Lee J.-Y., Li T., Luo J.-J., McGregor S., Planton Y., Power S., Rashid H., Ren H.-L., Santoso A., Takahashi K., Todd A., Wang G., Wang G., Xie R., Yang W.-H.,*

- Yeh S.-W., Yoon J., Zeller E., Zhang X.* El Niño–Southern Oscillation complexity // *Nature*. 2018. Vol. 559, no. 7715. P. 535–545. DOI: 10.1038/s41586-018-0252-6.
63. *Kondrashov D., Kravtsov S., Robertson A. W., Ghil M.* A hierarchy of data-based ENSO models // *Journal of Climate*. 2005. Vol. 18, no. 21. P. 4425–4444. DOI: 10.1175/JCLI3567.1.
 64. *Tippett M. K., L’Heureux M. L.* Low-dimensional representations of Niño 3.4 evolution and the spring persistence barrier // *npj Clim. Atmos. Sci.* 2020. Vol. 3, no. 1. P. 24. DOI: 10.1038/s41612-020-0128-y.
 65. *Vimont D. J., Wallace J. M., Battisti D. S.* The seasonal footprinting mechanism in the pacific: Implications for ENSO // *Journal of Climate*. 2003. Vol. 16, no. 16. P. 2668–2675. DOI: 10.1175/1520-0442(2003)016<2668:TSFMIT>2.0.CO;2.
 66. *Yu J.-Y., Fang S.-W.* The distinct contributions of the seasonal footprinting and charged-discharged mechanisms to ENSO complexity // *Geophysical Research Letters*. 2018. Vol. 45, no. 13. P. 6611–6618. DOI: 10.1029/2018GL077664.
 67. *Vimont D. J., Alexander M., Fontaine A.* Midlatitude excitation of tropical variability in the pacific: The role of thermodynamic coupling and seasonality // *Journal of Climate*. 2009. Vol. 22, no. 3. P. 518–534. DOI: 10.1175/2008JCLI2220.1.
 68. *Fang X.-H., Mu M.* Both air-sea components are crucial for El Niño forecast from boreal spring // *Sci. Rep.* 2018. Vol. 8, no. 1. P. 10501. DOI: 10.1038/s41598-018-28964-z.
 69. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Трехкомпонентный анализ сезонных особенностей взаимосвязи между явлениями Эль-Ниньо, североатлантическим колебанием и индийским муссоном // *Метеорология и гидрология*. 2016. № 12. С. 18–32.
 70. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Оценки взаимного влияния вариаций температуры поверхности в тропических широтах Тихого, Атлантического и Индийского океанов в тропических широтах по долгопериодным рядам данных // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2017. Т. 53, № 6. С. 699–709. DOI: 10.7868/S0003351517060046.
 71. *Barnston A. G., Tippett M. K., L’Heureux M. L., Li S., DeWitt D. G.* Skill of real-time seasonal ENSO model predictions during 2002–11: Is our capability increasing? // *Bulletin of the American Meteorological Society*. 2012. Vol. 93, no. 5. P. 631–651. DOI: 10.1175/BAMS-D-11-00111.1.
 72. *Bond G., Kromer B., Beer J., Muscheler R., Evans M. N., Showers W., Hoffmann S., Lotti-Bond R., Hajdas I., Bonani G.* Persistent solar influence on North Atlantic climate during the Holocene // *Science*. 2001. Vol. 294, no. 5549. P. 2130–2136. DOI: 10.1126/science.1065680.
 73. *Emile-Geay J., Cane M., Seager R., Kaplan A., Almasi P.* El Niño as a mediator of the solar influence on climate // *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2007. Vol. 22, no. 3. P. PA3210. DOI: 10.1029/2006PA001304.
 74. *Shindell D., Rind D., Balachandran N., Lean J., Lonergan P.* Solar cycle variability, ozone, and climate // *Science*. 1999. Vol. 284, no. 5412. P. 305–308. DOI: 10.1126/science.284.5412.305.
 75. *Shindell D. T., Schmidt G. A., Mann M. E., Rind D., Waple A.* Solar forcing of regional climate change during the Maunder Minimum // *Science*. 2001. Vol. 294, no. 5549. P. 2149–2152. DOI: 10.1126/science.1064363.
 76. *Zebiak S. E.* Oceanic heat content variability and El Niño cycles // *Journal of Physical Oceanography*. 1989. Vol. 19, no. 4. P. 475–486. DOI: 10.1175/1520-0485(1989)019<0475:OHCVAE>2.0.CO;2.
 77. *Bjerknes J.* Atmospheric teleconnections from the equatorial Pacific // *Monthly Weather Review*. 1969. Vol. 97, no. 3. P. 163–172. DOI: 10.1175/1520-0493(1969)097<0163:ATFTEP>2.3.CO;2.
 78. *Yeh S.-W., Cai W., Min S.-K., McPhaden M. J., Dommenges D., Dewitte B., Collins M., Ashok K., An S.-I., Yim B.-Y., Kug J.-S.* ENSO atmospheric teleconnections and their response to greenhouse gas forcing // *Reviews of Geophysics*. 2018. Vol. 56, no. 1. P. 185–206. DOI: 10.1002/2017RG000568.
 79. *Mukhin D., Gavrilov A., Loskutov E., Feigin A., Kurths J.* Nonlinear reconstruction of global

- climate leading modes on decadal scales // *Clim. Dyn.* 2018. Vol. 51, no. 5–6. P. 2301–2310. DOI: 10.1007/s00382-017-4013-2.
80. *Emile-Geay J., Cobb K. M., Mann M. E., Wittenberg A. T.* Estimating central equatorial Pacific SST variability over the past millennium. Part II: Reconstructions and implications // *Journal of Climate*. 2013. Vol. 26, no. 7. P. 2329–2352. DOI: 10.1175/JCLI-D-11-00511.1.
 81. *Emile-Geay J., Cobb K. M., Mann M. E., Wittenberg A. T.* Estimating central equatorial Pacific SST variability over the past millennium. Part I: Methodology and validation // *Journal of Climate*. 2013. Vol. 26, no. 7. P. 2302–2328. DOI: 10.1175/JCLI-D-11-00510.1.
 82. *Steinhilber F., Beer J., Fröhlich C.* Total solar irradiance during the Holocene // *Geophysical Research Letters*. 2009. Vol. 36, no. 19. P. L19704. DOI: 10.1029/2009GL040142.
 83. *Фейгин А. М., Гаврилов А. С., Лоскутов Е. М., Мухин Д. Н., Селезнев А. Ф.* Нелинейные динамические моды: метод эмпирической реконструкции сложных систем // *Нелинейные волны* 2018. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2019. С. 191–217.
 84. *Mukhin D., Gavrilov A., Feigin A., Loskutov E., Kurths J.* Principal nonlinear dynamical modes of climate variability // *Sci. Rep.* 2015. Vol. 5, no. 1. P. 15510. DOI: 10.1038/srep15510.
 85. *Gavrilov A., Mukhin D., Loskutov E., Volodin E., Feigin A., Kurths J.* Method for reconstructing nonlinear modes with adaptive structure from multidimensional data // *Chaos*. 2016. Vol. 26, no. 12. P. 123101. DOI: 10.1063/1.4968852.

References

1. Bezruchko BP, Smirnov DA. *Extracting Knowledge From Time Series: An Introduction to Nonlinear Empirical Modeling*. In Springer Series in Synergetics. New York: Springer; 2010. DOI: 10.1007/978-3-642-12601-7
2. Abarbanel HDI. *Analysis of Observed Chaotic Data*. New York: Springer; 1996. 272 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0763-4.
3. Anishchenko VS, Astakhov V, Neiman A, Vadivasova T, Schimansky-Geier L. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments*. Springer Series in Synergetics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2007. 446 p. DOI: 10.1007/978-3-540-38168-6.
4. Gouesbet G, Letellier C. Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets. *Phys. Rev. E*. 1994;49(6):4955–4972. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.4955.
5. Anishchenko V, Pavlov A, Janson N. Global reconstruction in the presence of a priori information. *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998;9(8):1267–1278. DOI: 10.1016/S0960-0779(98)00061-7.
6. Schelter B, Mader M, Mader W, Sommerlade L, Platt B, Lai YC, Grebogi C, Thiel M. Overarching framework for data-based modelling. *EPL*. 2014;105(3):30004. DOI: 10.1209/0295-5075/105/30004.
7. Gorur-Shandilya S, Timme M. Inferring network topology from complex dynamics. *New J. Phys.* 2011;13:013004. DOI: 10.1088/1367-2630/13/1/013004.
8. Wang WX, Yang R, Lai YC, Kovanis V, Grebogi C. Predicting catastrophes in nonlinear dynamical systems by compressive sensing. *Phys. Rev. Lett.* 2011;106(15):154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.154101.
9. Baake E, Baake M, Bock HG, Briggs KM. Fitting ordinary differential equations to chaotic data. *Phys. Rev. A*. 1992;45(8):5524–5529. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.5524.
10. Bezruchko BP, Smirnov DA, Sysoev IV. Identification of chaotic systems with hidden variables (modified Bock’s algorithm). *Chaos, Solitons & Fractals*. 2006;29(1):82–90. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.08.204.
11. Gorodetskyi V, Osadchuk M. Analytic reconstruction of some dynamical systems. *Phys. Lett. A*. 2013;377(9):703–713. DOI: 10.1016/j.physleta.2012.12.043.

12. Mukhin DN, Feigin AM, Loskutov EM, Molkov YI. Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series. *Phys. Rev. E.* 2006;73(3):036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036211.
13. Molkov YI, Mukhin DN, Loskutov EM, Timushev RI, Feigin AM. Prognosis of qualitative system behavior by noisy, nonstationary, chaotic time series. *Phys. Rev. E.* 2011;84(3):036215. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.036215.
14. Molkov YI, Loskutov EM, Mukhin DN, Feigin AM. Random dynamical models from time series. *Phys. Rev. E.* 2012;85(3):036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.036216.
15. Bezruchko BP, Smirnov DA. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series. *Phys. Rev. E.* 2001;63(1):016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.016207.
16. Smirnov DA, Sysoev IV, Seleznev EP, Bezruchko BP. Reconstructing nonautonomous system models with discrete spectrum of external action. *Tech. Phys. Lett.* 2003;29(10):824–827. DOI: 10.1134/1.1623857.
17. Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Extracting information masked by the chaotic signal of a time-delay system. *Phys. Rev. E.* 2002;66(2):026215. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.026215.
18. Sysoev IV, Prokhorov MD, Ponomarenko VI, Bezruchko BP. Reconstruction of ensembles of coupled time-delay systems from time series. *Phys. Rev. E.* 2014;89(6):062911. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.062911.
19. Sysoev IV, Ponomarenko VI, Kulminskiy DD, Prokhorov MD. Recovery of couplings and parameters of elements in networks of time-delay systems from time series. *Phys. Rev. E.* 2016;94(5):052207. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052207.
20. Han X, Shen Z, Wang WX, Di Z. Robust reconstruction of complex networks from sparse data. *Phys. Rev. Lett.* 2015;114(2):028701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.028701.
21. Brunton SL, Proctor JL, Kutz JN. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* 2016;113(15):3932–3937. DOI: 10.1073/pnas.1517384113.
22. Mangan NM, Brunton SL, Proctor JL, Kutz JN. Inferring biological networks by sparse identification of nonlinear dynamics. *IEEE Trans. Mol. Biol. Multi-Scale Commun.* 2016;2(1):52–63. DOI: 10.1109/TMBMC.2016.2633265.
23. Pikovsky A. Reconstruction of a neural network from a time series of firing rates. *Phys. Rev. E.* 2016;93(6):062313. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.062313.
24. Sysoev IV, Ponomarenko VI, Pikovsky A. Reconstruction of coupling architecture of neural field networks from vector time series. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2018;57:342–351. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.10.006.
25. Feigin AM, Molkov YI, Mukhin DN, Loskutov EM. Investigation of nonlinear dynamical properties by the observed complex behaviour as a basis for construction of dynamical models of atmospheric photochemical systems. *Faraday Discuss.* 2002;120:105–123. DOI: 10.1039/b102985c.
26. Loskutov EM, Molkov YI, Mukhin DN, Feigin AM. Markov chain Monte Carlo method in Bayesian reconstruction of dynamical systems from noisy chaotic time series. *Phys. Rev. E.* 2008;77(6):066214. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.066214.
27. Mukhin D, Loskutov E, Mukhina A, Feigin A, Zaliapin I, Ghil M. Predicting critical transitions in ENSO models. Part I: Methodology and simple models with memory. *Journal of Climate.* 2015;28(5):1940–1961. DOI: 10.1175/JCLI-D-14-00239.1.
28. Mukhin D, Kondrashov D, Loskutov E, Gavrillov A, Feigin A, Ghil M. Predicting critical transitions in ENSO models. Part II: Spatially dependent models. *Journal of Climate.* 2015;28(5):1962–1976. DOI: 10.1175/JCLI-D-14-00240.1.
29. Molkov YI, Mukhin DN, Loskutov EM, Feigin AM, Fidelin GA. Using the minimum description length principle for global reconstruction of dynamic systems from noisy time series. *Phys. Rev. E.* 2009;80(4):046207. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.046207.

30. Gavrilov A, Loskutov E, Mukhin D. Bayesian optimization of empirical model with state-dependent stochastic forcing. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2017;104:327–337. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.08.032.
31. Arnold L. *Random Dynamical Systems*. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag; 1998. 586 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12878-7.
32. Gavrilov A, Seleznev A, Mukhin D, Loskutov E, Feigin A, Kurths J. Linear dynamical modes as new variables for data-driven ENSO forecast. *Clim. Dyn.* 2019;52(3–4):2199–2216. DOI: 10.1007/s00382-018-4255-7.
33. Mukhin D, Gavrilov A, Loskutov E, Kurths J, Feigin A. Bayesian data analysis for revealing causes of the middle pleistocene transition. *Sci. Rep.* 2019;9(1):7328. DOI: 10.1038/s41598-019-43867-3.
34. Seleznev A, Mukhin D, Gavrilov A, Loskutov E, Feigin A. Bayesian framework for simulation of dynamical systems from multidimensional data using recurrent neural network. *Chaos*. 2019;29(12):123115. DOI: 10.1063/1.5128372.
35. Mukhin D, Gavrilov A, Seleznev A, Buyanova M. An atmospheric signal lowering the spring predictability barrier in statistical ENSO forecasts. *Geophysical Research Letters*. 2021;48(6):e2020GL091287. DOI: 10.1029/2020GL091287.
36. Gildor H, Tziperman E. Sea ice as the glacial cycles' Climate switch: role of seasonal and orbital forcing. *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2000;15(6):605–615. DOI: 10.1029/1999PA000461.
37. Smirnov DA, Mokhov II. From Granger causality to long-term causality: Application to climatic data. *Phys. Rev. E*. 2009;80(1):016208. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.016208.
38. Mokhov II, Smirnov DA. Empirical estimates of the influence of natural and anthropogenic factors on the global surface temperature. *Doklady Earth Sciences*. 2009;427(1):798–803. DOI: 10.1134/S1028334X09050201.
39. Mokhov II, Smirnov DA. Estimating the contributions of the Atlantic Multidecadal Oscillation and variations in the atmospheric concentration of greenhouse gases to surface air temperature trends from observations. *Doklady Earth Sciences*. 2018;480(1):602–606. DOI: 10.1134/S1028334X18050069.
40. Mokhov II, Smirnov DA. Contribution of greenhouse gas radiative forcing and Atlantic Multidecadal Oscillation to surface air temperature trends. *Russian Meteorology and Hydrology*. 2018;43(9):557–564. DOI: 10.3103/S1068373918090017.
41. Hornik K, Stinchcombe M, White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*. 1989;2(5):359–366. DOI: 10.1016/0893-6080(89)90020-8.
42. Raymo ME, Nisancioglu KH. The 41 kyr world: Milankovitch's other unsolved mystery. *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2003;18(1):1011. DOI: 10.1029/2002PA000791.
43. Clark PU, Archer D, Pollard D, Blum JD, Rial JA, Brovkin V, Mix AC, Pisias NG, Roy M. The middle Pleistocene transition: characteristics, mechanisms, and implications for long-term changes in atmospheric pCO₂. *Quaternary Science Reviews*. 2006;25(23–24):3150–3184. DOI: 10.1016/j.quascirev.2006.07.008.
44. Maslin MA, Brierley CM. The role of orbital forcing in the Early Middle Pleistocene Transition. *Quaternary International*. 2015;389:47–55. DOI: 10.1016/j.quaint.2015.01.047.
45. Elderfield H, Ferretti P, Greaves M, Crowhurst S, McCave IN, Hodell D, Piotrowski AM. Evolution of ocean temperature and ice volume through the mid-Pleistocene climate transition. *Science*. 2012;337(6095):704–709. DOI: 10.1126/science.1221294.
46. Gildor H, Tziperman E. A sea ice climate switch mechanism for the 100-kyr glacial cycles. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2001;106(C5):9117–9133. DOI: 10.1029/1999JC000120.
47. Crucifix M. Oscillators and relaxation phenomena in Pleistocene climate theory. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2012;370(1962):1140–1165. DOI: 10.1098/rsta.2011.0315.
48. Rial JA, Oh J, Reischmann E. Synchronization of the climate system to eccentricity forcing and the 100,000-year problem. *Nature Geosci.* 2013;6(4):289–293. DOI: 10.1038/ngeo1756.

49. Ditlevsen PD. Bifurcation structure and noise-assisted transitions in the Pleistocene glacial cycles. *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2009;24(3):PA3204. DOI: 10.1029/2008PA001673.
50. Huybers P. Pleistocene glacial variability as a chaotic response to obliquity forcing. *Clim. Past*. 2009;5(3):481–488. DOI: 10.5194/cp-5-481-2009.
51. Benzi R, Parisi G, Sutera A, Vulpiani A. Stochastic resonance in climatic change. *Tellus*. 1982;34(1):10–15. DOI: 10.3402/tellusa.v34i1.10782.
52. Lisiecki LE, Raymo ME. A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic $\delta^{18}\text{O}$ records. *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2005;20(1):PA1003. DOI: 10.1029/2004PA001071.
53. Berger A, Loutre MF. Insolation values for the climate of the last 10 million years. *Quaternary Science Reviews*. 1991;10(4):297–317. DOI: 10.1016/0277-3791(91)90033-Q.
54. Berger A, Li XS, Loutre MF. Modelling northern hemisphere ice volume over the last 3 Ma. *Quaternary Science Reviews*. 1999;18(1):1–11. DOI: 10.1016/S0277-3791(98)00033-X.
55. Rial JA. Abrupt climate change: chaos and order at orbital and millennial scales. *Global and Planetary Change*. 2004;41(2):95–109. DOI: 10.1016/j.gloplacha.2003.10.004.
56. Tziperman E, Gildor H. On the mid-Pleistocene transition to 100-kyr glacial cycles and the asymmetry between glaciation and deglaciation times. *Paleoceanography and Paleoclimatology*. 2003;18(1):1–1–8. DOI: 10.1029/2001pa000627.
57. McManus JF, Oppo DW, Cullen JL. A 0.5-million-year record of millennial-scale climate variability in the North Atlantic. *Science*. 1999;283(5404):971–975. DOI: 10.1126/science.283.5404.971.
58. Schulz M, Berger WH, Sarnthein M, Grootes PM. Amplitude variations of 1470-year climate oscillations during the last 100,000 years linked to fluctuations of continental ice mass. *Geophysical Research Letters*. 1999;26(22):3385–3388. DOI: 10.1029/1999GL006069.
59. Burgers G, Jin FF, van Oldenborgh GJ. The simplest ENSO recharge oscillator. *Geophysical Research Letters*. 2005;32(13):L13706. DOI: 10.1029/2005GL022951.
60. Jin FF. An equatorial ocean recharge paradigm for ENSO. Part I: Conceptual model. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1997;54(7):811–829. DOI: 10.1175/1520-0469(1997)054<0811:AEORPF>2.0.CO;2.
61. McPhaden MJ. Tropical Pacific Ocean heat content variations and ENSO persistence barriers. *Geophysical Research Letters*. 2003;30(9):1480. DOI: 10.1029/2003GL016872.
62. Timmermann A, An SI, Kug JS, Jin FF, Cai W, Capotondi A, Cobb KM, Lengaigne M, McPhaden MJ, Stuecker MF, Stein K, Wittenberg AT, Yun KS, Bayr T, Chen HC, Chikamoto Y, Dewitte B, Dommenges D, Grothe P, Guilyardi E, Ham YG, Hayashi M, Ineson S, Kang D, Kim S, Kim W, Lee JY, Li T, Luo JJ, McGregor S, Planton Y, Power S, Rashid H, Ren HL, Santoso A, Takahashi K, Todd A, Wang G, Wang G, Xie R, Yang WH, Yeh SW, Yoon J, Zeller E, Zhang X. El Niño–Southern Oscillation complexity. *Nature*. 2018;559(7715):535–545. DOI: 10.1038/s41586-018-0252-6.
63. Kondrashov D, Kravtsov S, Robertson AW, Ghil M. A hierarchy of data-based ENSO models. *Journal of Climate*. 2005;18(21):4425–4444. DOI: 10.1175/JCLI3567.1.
64. Tippett MK, L'Heureux ML. Low-dimensional representations of Niño 3.4 evolution and the spring persistence barrier. *npj Clim. Atmos. Sci.* 2020;3(1):24. DOI: 10.1038/s41612-020-0128-y.
65. Vimont DJ, Wallace JM, Battisti DS. The seasonal footprinting mechanism in the Pacific: Implications for ENSO. *Journal of Climate*. 2003;16(16):2668–2675. DOI: 10.1175/1520-0442(2003)016<2668:TSMIT>2.0.CO;2.
66. Yu JY, Fang SW. The distinct contributions of the seasonal footprinting and charged-discharged mechanisms to ENSO complexity. *Geophysical Research Letters*. 2018;45(13):6611–6618. DOI: 10.1029/2018GL077664.
67. Vimont DJ, Alexander M, Fontaine A. Midlatitude excitation of tropical variability in the Pacific: The role of thermodynamic coupling and seasonality. *Journal of Climate*. 2009;22(3):518–534. DOI: 10.1175/2008JCLI2220.1.

68. Fang XH, Mu M. Both air-sea components are crucial for El Niño forecast from boreal spring. *Sci. Rep.* 2018;8(1):10501. DOI: 10.1038/s41598-018-28964-z.
69. Mokhov II, Smirnov DA. The trivariate seasonal analysis of couplings between El Niño, North Atlantic Oscillation, and Indian monsoon. *Russian Meteorology and Hydrology.* 2016;41(11–12):798–807. DOI: 10.3103/S106837391611008X.
70. Mokhov II, Smirnov DA. Estimates of the mutual influence of variations in the sea surface temperature in tropical latitudes of the Pacific, Atlantic, and Indian Oceans from long-period data series. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics.* 2017;53(6):613–623. DOI: 10.1134/S0001433817060081.
71. Barnston AG, Tippett MK, L’Heureux ML, Li S, DeWitt DG. Skill of real-time seasonal ENSO model predictions during 2002–11: Is our capability increasing? *Bulletin of the American Meteorological Society.* 2012;93(5):631–651. DOI: 10.1175/BAMS-D-11-00111.1.
72. Bond G, Kromer B, Beer J, Muscheler R, Evans MN, Showers W, Hoffmann S, Lotti-Bond R, Hajdas I, Bonani G. Persistent solar influence on North Atlantic climate during the Holocene. *Science.* 2001;294(5549):2130–2136. DOI: 10.1126/science.1065680.
73. Emile-Geay J, Cane M, Seager R, Kaplan A, Almasi P. El Niño as a mediator of the solar influence on climate. *Paleoceanography and Paleoclimatology.* 2007;22(3):PA3210. DOI: 10.1029/2006PA001304.
74. Shindell D, Rind D, Balachandran N, Lean J, Lonergan P. Solar cycle variability, ozone, and climate. *Science.* 1999;284(5412):305–308. DOI: 10.1126/science.284.5412.305.
75. Shindell DT, Schmidt GA, Mann ME, Rind D, Waple A. Solar forcing of regional climate change during the Maunder Minimum. *Science.* 2001;294(5549):2149–2152. DOI: 10.1126/science.1064363.
76. Zebiak SE. Oceanic heat content variability and El Niño cycles. *Journal of Physical Oceanography.* 1989;19(4):475–486. DOI: 10.1175/1520-0485(1989)019<0475:OHCVAE>2.0.CO;2.
77. Bjerknes J. Atmospheric teleconnections from the equatorial Pacific. *Monthly Weather Review.* 1969;97(3):163–172. DOI: 10.1175/1520-0493(1969)097<0163:ATFTEP>2.3.CO;2.
78. Yeh SW, Cai W, Min SK, McPhaden MJ, Dommenges D, Dewitte B, Collins M, Ashok K, An SI, Yim BY, Kug JS. ENSO atmospheric teleconnections and their response to greenhouse gas forcing. *Reviews of Geophysics.* 2018;56(1):185–206. DOI: 10.1002/2017RG000568.
79. Mukhin D, Gavrilo A, Loskutov E, Feigin A, Kurths J. Nonlinear reconstruction of global climate leading modes on decadal scales. *Clim. Dyn.* 2018;51(5–6):2301–2310. DOI: 10.1007/s00382-017-4013-2.
80. Emile-Geay J, Cobb KM, Mann ME, Wittenberg AT. Estimating central equatorial Pacific SST variability over the past millennium. Part II: Reconstructions and implications. *Journal of Climate.* 2013;26(7):2329–2352. DOI: 10.1175/JCLI-D-11-00511.1.
81. Emile-Geay J, Cobb KM, Mann ME, Wittenberg AT. Estimating central equatorial Pacific SST variability over the past millennium. Part I: Methodology and validation. *Journal of Climate.* 2013;26(7):2302–2328. DOI: 10.1175/JCLI-D-11-00510.1.
82. Steinhilber F, Beer J, Fröhlich C. Total solar irradiance during the Holocene. *Geophysical Research Letters.* 2009;36(19):L19704. DOI: 10.1029/2009GL040142.
83. Feigin AM, Gavrilo A, Loskutov EM, Mukhin DN, Seleznev AF. Nonlinear dynamical modes: A method for empirical reconstruction of complex systems. In: *Nonlinear Waves’ 2018.* Nizhny Novgorod: IAP RAS; 2019. P. 191–217 (in Russian).
84. Mukhin D, Gavrilo A, Feigin A, Loskutov E, Kurths J. Principal nonlinear dynamical modes of climate variability. *Sci. Rep.* 2015;5(1):15510. DOI: 10.1038/srep15510.
85. Gavrilo A, Mukhin D, Loskutov E, Volodin E, Feigin A, Kurths J. Method for reconstructing nonlinear modes with adaptive structure from multidimensional data. *Chaos.* 2016;26(12):123101. DOI: 10.1063/1.4968852.



Мухин Дмитрий Николаевич – родился в городе Горьком (1976). Окончил Радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1999). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2007, ИПФ РАН). С 2014 года работает в Федеральном исследовательском центре Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН, Нижний Новгород) заведующим лабораторией моделирования климатических систем. Научные интересы – математическое моделирование, обратные задачи, анализ временных рядов. Опубликовал свыше 30 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
E-mail: mukhin@ipfran.ru
ORCID: 0000-0002-5669-0771



Гаврилов Андрей Сергеевич – родился в Астраханской области (1988). Окончил факультет «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2011). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2019, ИПФ РАН). С 2019 года работает в Федеральном исследовательском центре Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН, Нижний Новгород) научным сотрудником. Научные интересы – байесовы методы, анализ временных рядов, теория динамических систем, моделирование климата. Опубликовал 15 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
E-mail: gavrilov@ipfran.ru
ORCID: 0000-0001-9779-7308



Селезнев Алексей Федорович – родился в Нижнем Новгороде (1993). Окончил факультет «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2016). Работает в Федеральном исследовательском центре Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН, Нижний Новгород) младшим научным сотрудником. Научные интересы – байесовские методы, анализ временных рядов, искусственные нейронные сети, моделирование сложных систем по временным рядам. Опубликовал 8 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
E-mail: aseleznev@ipfran.ru
ORCID: 0000-0002-6321-8109



Фейгин Александр Маркович – родился в городе Горьком (1953). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1974). Защитил диссертации на соискание учёных степеней кандидата физико-математических наук по специальности «физика и химия плазмы» (1983, ИПФ РАН) и доктора физико-математических наук по специальностям «радиофизика» и «физика атмосферы и гидросферы» (2002, ИПФ РАН). С 1977 года работает в Федеральном исследовательском центре Институт прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН, Нижний Новгород), в настоящее время заведует отделом физики атмосферы и микроволновой диагностики. Научные интересы: нелинейная динамика сложных систем; динамика климата и климатический мониторинг; построение прогностических эмпирических моделей по временным рядам; физика и химия атмосферы; микроволновое дистанционное зондирование атмосферы и подстилающей поверхности. Опубликовал свыше 80 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
E-mail: feigin@appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0002-9106-7766