



НЕЛИНЕЙНОСТЬ: ОТ КОЛЕБАНИЙ К ХАОСУ

Задачи и учебные программы

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин, О.Б. Исаева

© Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М., Исаева О.Б., 2006
© Рисунки Соколов Д.В., Кузнецов С.П., 2006
© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006
М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 188 с.
ISBN 5-93972-514-7

В сборнике представлено около 450 задач по нелинейным колебаниям, катастрофам, динамическим системам, бифуркациям, хаосу, нелинейным волнам, фракталам и комплексной аналитической динамике. Каждый раздел содержит как теоретические задачи, так и задачи исследовательского характера, решаемые при помощи компьютера. Исследовательские задачи могут использоваться для постановки компьютерных практикумов как курсовые работы и для самостоятельного решения. Представлен комплекс взаимосвязанных учебных программ по перечисленным дисциплинам. Задачи и учебные программы апробированы на факультете нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. При разработке сборника использовались научные результаты, полученные в группах профессоров Кузнецова А.П., Кузнецова С.П. и Рыскина Н.М., а также опыт интеграции академической (Саратовский филиал ИРЭ РАН) и вузовской науки (ФНП СГУ). Сборник будет полезен преподавателям и студентам, интересующимся нелинейной теорией колебаний и волн и нелинейной динамикой. Может быть использован для построения системы образования, основанной на идеях и подходах нелинейной теории.

Использованы результаты исследований по грантам РФФИ № 00-02-17509, № 03-02-16074, № 03-02-16192, РФФИ-ННИО № 04-02-04011, а также по гранту Американского фонда гражданских исследований и развития.

Оглавление

Предисловие

Из предисловия к книге А.П. Кузнецова «Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос»

Глава 1. Нелинейные колебания

Линейность и нелинейность. Нелинейные элементы. Зависимость периода нелинейных колебаний от амплитуды. Особенности спектров нелинейных систем. Мультистабильность и гистерезис. Динамические системы. Консервативные

и диссипативные системы. Фазовые портреты нелинейных систем. Нелинейный осциллятор. Приближение слабой нелинейности. Нелинейный осциллятор. Движение вблизи сепаратрисы. Метод медленно меняющихся амплитуд. Быстрые и медленные движения в случае сильной диссипации. Автоколебательные системы. Уравнения Ван-дер-Поля и Рэля. Жесткое возникновение автоколебаний. Релаксационные автоколебания. Сечение Пуанкаре. Одномерные дискретные отображения. Нелинейные колебания неавтономных систем. Синхронизация. Нелинейные колебания. Задачи для компьютерного исследования.

Глава 2. Катастрофы

Ряд Тейлора и модели. Понятия типичности и коразмерности. «Игрушки» теории катастроф. Критические точки функций одной переменной. Критические точки функций двух переменных. Катастрофа коразмерности один – складка. Катастрофа коразмерности два – сборка. Катастрофа коразмерности три – ласточкин хвост. Каспидные катастрофы в двумерных системах. Катастрофа коразмерности три – эллиптическая омбилика. Катастрофа коразмерности три – гиперболическая омбилика. Катастрофы и теория упругости. Катастрофы и физика фазовых переходов. Кривые и их особенности. Эволюты и эвольвенты. Каустики. Волновые фронты и их особенности. Колебания. Эффект смягчения мод. Нелинейный резонанс. Автоколебания и синхронизация. Катастрофы. Задачи для компьютерных исследований.

Глава 3. Динамические системы и бифуркации

Классификация и примеры динамических систем. Бифуркации одномерных потоков. Бифуркация Андронова–Хопфа. Бифуркации предельных циклов. Бифуркации одномерных отображений коразмерности один. Бифуркации двух- и трехпараметрических одномерных отображений. Бифуркации двумерных отображений. Неустойчивое и устойчивое многообразие. Квазипериодические режимы и синхронизация в двумерных и одномерных отображениях. Бифуркации и синхронизация в системах типа Ван-дер-Поля. Динамические системы и бифуркации. Задачи для компьютерных исследований.

Глава 4. Хаос

Хаос и его свойства. Устойчивость и япуновские показатели. Геометрия странных аттракторов. Удвоения периода и теория Фейгенбаума. Переमेжаемость. Квазипериодические явления. Хаос в Интернете. Демонстрации хаоса.

Глава 5. Нелинейные волны

Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям. Простые волны и образование разрывов. Уравнение Бюргера. Ударные волны. Стационарные нелинейные волны. Получение уравнения КдВ и других «длинноволновых» уравнений в конкретных физических задачах. Точные методы в теории солитонов. Модулированные волны в нелинейных средах. Нелинейные волны. Задачи для компьютерных исследований.

Глава 6. Фракталы и комплексная аналитическая динамика

Фракталы. Комплексная аналитическая динамика.

Глава 7. Учебные программы

Нелинейные колебания. Теория катастроф. Динамические системы и бифурка-

ции. Приложения теории катастроф и бифуркаций. Динамический хаос. Нелинейные волны. Фракталы и комплексная аналитическая динамика.

Литература к комплексу учебных программ «Нелинейность: от колебаний к хаосу»

Книги серии «Современная теория колебаний и волн». Учебники. Книги. Книги серии «Нелинейные волны». Обзоры. Статьи в Соросовском образовательном журнале.

Предисловие

Настоящее пособие представляет собой развитие книги А.П. Кузнецова «Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос». Поэтому мы сочли возможным привести ниже предисловие к ней, которое не утратило свою актуальность. Настоящее издание, однако, существенно расширилось – увеличился коллектив авторов, добавились новые задачи и главы и соответственно изменилось название. Теперь мы представляем систему задач по восьми взаимосвязанным курсам нелинейной теории:

- нелинейные колебания,
- теория катастроф,
- динамические системы и бифуркации,
- приложения теории катастроф и бифуркаций,
- динамический хаос,
- от порядка к хаосу,
- нелинейные волны,
- фракталы и комплексная аналитическая динамика,

разработанных и читаемых авторами на факультете нелинейных процессов Саратовского госуниверситета.

Мы сочли, что будет полезным представить и учебные программы по этим курсам, которые вошли в главу 7. Заметим, что появление курса «Приложения теории катастроф и бифуркаций» обусловлено тем, что, как оказалось, после прочтения теории нелинейных колебаний, а затем теории катастроф и бифуркаций необходимо вновь вернуться к некоторым вопросам теории колебаний, чтобы на новом «уровне» обсудить их. (Например, не общеизвестным в учебной литературе является тот факт, что с нелинейным резонансом связана катастрофа сборки, важно дать четкую картину всех возможных бифуркаций в задачах синхронизации и т.д.) Это относится и к физическим аспектам приложений теории катастроф, таким как геометрическая оптика, физика фазовых переходов и т.д. Это необходимо и потому, что на факультете нелинейных процессов СГУ происходит раннее знакомство с нелинейной теорией – так, курс «нелинейные колебания» читается уже на втором курсе. При составлении задач, однако, выяснилось, что их более удобно поместить в главы «теория катастроф» и «динамические системы и бифуркации», поскольку в этом случае система задач выйдет более стройно. Мы представляем здесь и курс «нелинейные волны» вместе с соответствующими задачами. Отметим, что курсы «динамический хаос» и «от порядка к хаосу» в рамках учебной программы объединены также для удобства восприятия в одну главу. Весьма обширным (отчасти неожиданно) получился

курс, связанный с комплексной аналитической динамикой. Здесь наряду с привлекательным для студентов материалом по множествам Мандельброта, Жюлиа и т.д. обнаруживаются весьма нетривиальные и интересные физические приложения.

Отметим также, что мы добавили новые задачи исследовательского характера, которые требуют для решения применения компьютера. Они могут использоваться как в компьютерных практикумах, так и при выполнении курсовых работ и различных учебно-исследовательских практик. Заметим, что некоторые из них допускают очень глубокое исследование на уровне не только дипломной работы, но и аспирантских исследований (например, задачи 100 и 101 из главы 3 о синхронизации в автогенераторе типа ван дер Поля–Дуффинта с жестким возбуждением и их развитие).

В текст «вкраплены» и оригинальные результаты. Например, в задаче 94 из главы «динамические системы и бифуркации» появляются новые оригинальные отображения – «отображения катастроф». Также в задачах 95 и 103 (ив тексте учебной программы) можно видеть оригинальное отображение, названное «универсальным двумерным отображением». Его особенность – демонстрация всех основных бифуркаций двумерных отображений на плоскости след – якобиан линеаризованной матрицы, которые выбраны как его параметры, а также всех характерных сценариев перехода к хаосу. Его исследование также может быть проведено на «аспирантском» уровне. Весьма интересными, на наш взгляд, являются задачи 28 и 29 из 6-ой главы, которые позволяют дать физический пример множества Мандельброта (включая возможный эксперимент) в виде системы связанных систем с удвоениями периода.

При разработке сборника использовались научные результаты, полученные в группах проф. Кузнецова А.П., Кузнецова С.П. и Рыскина Н.М., а также опыт интеграции академической (Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН) и вузовской науки (Саратовский госуниверситет). Мы использовали результаты исследований по грантам РФФИ № 00-02-17509, № 03-02-16074, № 03-02-16192, РФФИ-ННИО № 04-02-04011, а также по гранту Американского фонда гражданских исследований и развития REC-006.

К комплексу учебных программ добавлена и литература. Заметим, что основными учебниками могут служить книги серии «Современная теория колебаний и волн», хотя они все же не находятся во взаимно-однозначном соответствии с настоящим задачником. (Например, в серии отсутствуют книги по теории катастроф, комплексной аналитической динамике и др.) Для удобства читателя мы сгруппировали литературу в отдельные блоки: учебники, книги, обзоры и т.д. Отметим, что очень привлекательными являются также образующие некоторую серию статьи в Соросовском образовательном журнале.

Мы надеемся, что сборник будет полезен преподавателям и студентам, интересующимся нелинейной теорией колебаний и волн и нелинейной динамикой. Он может быть использован для построения системы образования, основанной на идеях и подходах нелинейной теории.

Авторы выражают глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН, проф. Д.И. Трубецкову за возможность реализации представленных задач в Саратовском государственном университете. Авторы весьма благодарны проф. Аркадию Пиковскому (университет Потсдама, Германия) за возможность обсуждения вопросов и проблем нелинейной динамики, некоторые из которых нашли отражение и в на-

стоящей книге. Мы благодарны декану ФНП Ю.И. Левину за многолетнее взаимодействие. Авторы благодарны всем преподавателям ФНП СГУ, которые вместе с нами участвовали в апробации задач на семинарах и компьютерных практикумах: Ю.В. Седовой, А.С. Ивановой, Л.В. Тюрюкиной, А.В.Савину, А.А. Балякину, А.А. Короновскому, Л.В. Красичкову, Е.С. Мчедловой и всем студентам факультета нелинейных процессов, принявшим активное участие в этих занятиях. Мы благодарны нашим ученикам и аспирантам, элементы работы над курсовыми, дипломными работами и кандидатскими диссертациями которых нашли отражение в настоящем сборнике. Мы благодарны Д.В. Соколову за рисунок «хаотического кота», открывающего книгу, а также И.Р. Сатаеву за помощь в подготовке компьютерного макета.

Компьютерные рисунки, представленные в начале каждой главы, демонстрируют соответственно конденсацию изображающих точек на фазовой плоскости на предельный цикл уравнения ван дер Поля, систему нормалей к параболе, демонстрирующую катастрофу сборки, бифуркационное дерево логистического отображения, карту ляпуновских показателей кубического отображения, столкновение двух солитонов и фрагмент множества Мандельброта. Рисунок кота и мыши, изучающих логистическое отображение, принадлежит проф. С.П. Кузнецову.

Авторы