Изв. вузов «ПНД», т. 17, № 1, 2009 УДК 531.19; 621.391

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ*

Г.М. Заславский

1. Эта и следующая лекции будут посвящены стохастическим процессам в тех случаях, когда нелинейность волн велика. Некоторые динамические свойства нелинейных волн уже рассматривались в предыдущих лекциях М.И. Рабиновича, а некоторые другие их свойства будут введены по мере надобности. Нам понадобится также определенный «язык», с помощью которого удобно исследовать стохастические явления. Введем понятие нелинейного волнового поля, удовлетворяющего периодическим граничным условиям по координате x. Такое поле естественно представить с помощью гамильтониана. Например,

$$H = \frac{1}{2}\sum_q \mu(q) y_q y_{-q} + \sum_{q_1,q_2,q_3,q_4} V_{q_1q_2q_3q_4} y_{q_1} y_{q_2} y_{q_3} y_{q_4} \delta(q_1+q_2+q_3+q_4). \quad (1)$$

Конечно, можно было бы записать уравнения в частных производных, которым удовлетворяет поле

$$y(x,t) = \sum_q y_q(t) e^{iqx}.$$

Нас будет интересовать далее специальный вид решения уравнений поля, который называется периодической стационарной волной:

$$y = y(x-ut); \quad y(x,t) = y(x + \frac{2\pi}{k}, t).$$

Величина u является скоростью волны, а k – ее волновое число. Такое решение можно разложить в ряд Фурье более удобным способом, положив $q = nk$ и заменив суммирование по q суммированием по n. Специальный вид рассматриваемой волны означает также, что

$$y_q(t) \equiv y_n(t) = C_n e^{in\omega t}; \quad \omega = ku$$

*Прочитано на Республиканской школе по нелинейным колебаниям и волнам в распределенных системах (Горьковская обл., март 1972 г.); препринт № 41, Горький: НИРФИ, 1973.

и величину ω назовем частотой волны. Теперь мы введем безразмерный параметр N, который естественным образом будет характеризовать степень нелинейности волны. Для этого рассмотрим зависимость C_n от n (см. рис. – *Ред.*). Если при $n > N$ спектр C_n волны эффективно обрезается, то величина N определяет характерное число гармоник в волновом пакете, представляющем нелинейную волну. В тех уравнениях, которые приводились в лекциях Рабиновича, обрезание спектра происходит экспоненциально и число N существует. Если $N \sim 1$, то волна близка к синусоидальной, и этот случай назовем слабо нелинейным. Наоборот, случай $N \gg 1$ соответствует сильному ангармонизму. Он будет называться сильно нелинейным и явится предметом исследования в лекциях.

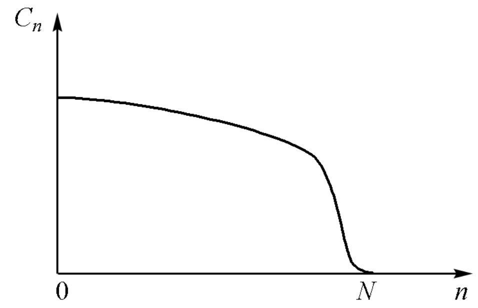

Рис. 1.

2. Нелинейную периодическую волну можно описывать разными переменными, однако, существуют «лучшие» переменные, аналогичные переменным действие–угол для осциллятора. Оказывается, что, если рассмотреть систему уравнений движения волны в гамильтоновой форме:

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}; \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial I},$$

то действие I волны следует определить с помощью уравнения

$$\frac{dH}{dI} = \omega(H) = ku(H).$$

Таким образом, переменные (I, ϑ) являются канонически сопряженными и удовлетворяют уравнениям движения:

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\vartheta} = ku = \omega(I).$$

Первое из этих уравнений выражает просто закон сохранения энергии H нелинейной волны.

Обратимся теперь к задаче, в которой нелинейная периодическая волна находится под действием внешнего возмущения. По-видимому, полезно подчеркнуть, что в линейном случае мы можем говорить о теории возмущений для данного уравнения (или оператора). Однако в рассматриваемом случае нелинейная волна является не общим, а частным решением, и поэтому теория возмущений, о которой будет идти речь ниже, относится к частному решению. Возмущение также удобно ввести с помощью гамильтониана:

$$\mathcal{H} = H + \varepsilon H_1, \quad (\varepsilon \ll 1).$$

Если сохранить определения I, ω с помощью невозмущенной части H гамильтониана $\mathcal{H}$, то уравнения движения волны примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \vartheta}, \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}. \end{aligned} \tag{2}$$

Написанные уравнения движения аналогичны уравнениям движения нелинейного осциллятора при наличии возмущения. Эта аналогия между нелинейной волной и частицей достигнута благодаря введению удобных переменных. Однако структура той части уравнений, которая связана с возмущением, будет несколько отличаться для нелинейной волны от случая обычного осциллятора. Пусть, например, на волну действует сила $\varepsilon\Phi(x,t)$. Тогда

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_n y_n(t)\Phi_{-n}(t) = \sum_n C_n e^{in\vartheta}\Phi_{-n}, \\ \Phi(x,t) &= \sum_n \Phi_n e^{inkx} \end{aligned}$$

и в правую часть уравнения (2) входят Фурье-амплитуды решения, зависимость которых от I известна.

3. Рассматриваемый ниже случай можно называть изолированным резонансом. Пусть внешнее возмущение имеет только одну гармонику, то есть

$$\Phi(x,t) = \Phi_{ml}\cos(mkx - l\nu t).$$

В выражении для H_1 останется один член и уравнения (2) примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 2\varepsilon m C_m \Phi_{ml}\cos\theta, \\ \dot{\theta} &= m\omega(I) - l\nu + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Резонанс между возмущением и волной происходит, если

$$m\omega(I_{ml}) = l\nu, \tag{3}$$

где I_{ml} – некоторое значение действия волны. Поведение волны в окрестности резонанса проще всего описать с помощью приближенного интеграла движения:

$$\frac{1}{2}m\frac{d\omega(I)}{dI}(I - I_{ml})^2 - \varepsilon m C_m \Phi_{ml}\cos\theta = \mathrm{const}.$$

Действительно, дифференцируя это выражение по t и используя уравнения движения, убеждаемся в том, что правая часть есть константа с точностью до членов порядка ε^2. Мы получили уравнения колебания типа маятника. Из него следует, что изменение действия $\delta I = (I - I_{ml})$ промодулировано во времени и в пространстве. Глубина этой модуляции, которую будем называть шириной резонанса, имеет порядок:

$$\delta I \sim \left[\varepsilon C_m \Phi_{ml} / \frac{d\omega}{dI}\right]^{1/2}$$

и пропорциональна $\sqrt{\varepsilon}$. Одним из проявлений модуляции является периодическое изменение формы волнового пакета. Одновременно с формой модуляцию испытывает и скорость волны. В дальнейшем нам понадобиться величина

$$\delta\omega = \frac{d\omega}{dI}\delta I \sim \left[\varepsilon C_m \Phi_{ml} \frac{d\omega}{dI}\right]^{1/2},$$

определяющая ширину резонанса по частоте, то есть максимальное изменение частоты волны вследствие резонанса.

Хотя приведенные рассуждения являются приближенными и носят полукачественный характер, тем не менее их можно оправдать более строгими методами, использующими отыскание решения в виде ряда по степеням параметра ε.

4. Очевидно, что случай одного изолированного резонанса является слишком частным для того, чтобы делать какой-либо общий вывод о поведении нелинейной волны под действием малых возмущений. В общем случае внешняя сила $\Phi(x,t)$ содержит много гармоник по x и t. Это обстоятельство, как мы сейчас увидим, может принципиально изменить весь характер эволюции волны. Построим схему возможных резонансов между какими-либо гармониками внешней силы и нелинейной волны. Эта система зависит, в частности, от параметра действия волны, определяющего частоту ω. В формуле (3) будем придавать величинам m, l последовательность значений $1, 2...$ и подбирать соответствующие значения I, при которых выполняется условие резонанса. Например:

$$\begin{aligned}
&\omega(I_{11}) = \nu; \quad \omega(I_{12}) = 2\nu; \quad ...\\
&2\omega(I_{21}) = \nu; \quad 2\omega(I_{22}) = 2\nu; \quad ...\\
&..
\end{aligned}$$

Таким образом, можно получить матрицу I_{ml} резонансных значений действия волны. Эта матрица недиагональная, а все ее диагональные элементы равны друг другу. Если все значения матрицы резонансов I_{ml} расположить, например, в порядке возрастания величины ее элементов, то можно ввести понятия расстояния по действию между двумя соседними резонансами. В общем случае вид этих выражений несколько громоздок. Приведем пример в более простом случае, когда внешнее возмущение имеет зависимость от времени, определяемую только одной гармоникой с частотой $l\nu$, а зависимость от x содержит много гармоник. В этом случае система резонансных значений I_{ml} имеет фиксированное l и различные значения m и определяется из уравнения (3). Расстояние между резонансами по действию равно

$$\Delta I_{ml} = I_{ml} - I_{m+1,l}.$$

Аналогично можно ввести понятие расстояния между соседними резонансами по частоте:

$$\Delta\omega(I_{ml}) = \omega(I_{ml}) - \omega(I_{m+1,l}).$$

Если воспользоваться формулой (3), то это даст

$$\Delta\omega(I_{ml}) = l\nu\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = \frac{l\nu}{m(m+1)}.$$

При больших значениях m полученное выражение можно упростить, воспользовавшись снова формулой (3):

$$\Delta\omega(I_{ml}) \approx \frac{\omega^2(I_{ml})}{l\nu}.$$

Если расстояние между резонансами мало, то можно также написать и приближенную формулу для ΔI:

$$\Delta I_{ml} \approx \left(\frac{d\omega(I_{ml})}{dI_{ml}}\right)^{-1} \quad \Delta\omega(I_{ml}).$$

Теперь мы введем параметр

$$K = \left(\frac{\delta\omega}{\Delta\omega}\right)^2,$$

определяющий отношение ширины резонанса к расстоянию до ближайшего резонанса. Если $K \ll 1$, то на движение нелинейной волны в окрестностях какого-либо резонанса мало сказывается влияние соседних резонансов. В этом случае приближенная теория, изложенная в п. 3, оказывается справедливой, по крайней мере, в течение достаточно длительного времени. Картина полностью меняется, если параметр $K \gg 1$. Прежде всего, следует заменить, что теория возмущений в приведенной форме оказывается неприменимой, так как нелинейная волна находится одновременно под воздействием нескольких резонансов. Уже отмечалось, что уравнения движения нелинейной волны под действием возмущения, записанные в канонически сопряженных переменных (I, ϑ) очень близки по своей форме к уравнениям движения возмущенного нелинейного осциллятора. Используя это обстоятельство, обратимся к уже известным результатам [6] для осциллятора при $K \gg 1$. Аналитические и численные исследования, на изложении которых мы здесь останавливаться не будем, показывают, что в случае перекрытия резонансов ($K \gg 1$) возникает так называемая стохастическая неустойчивость. Она проявляется в том, что фаза волны ϑ изменяется со временем случайным образом (напомним, что в случае $K \ll 1$ фаза меняется со временем периодически). Границу перехода от динамического режима движения волны к стохастическому можно найти из условия $K \sim 1$. Ранее говорилось, что отдельный резонанс приводит к квазипериодической модуляции (так называемым фазовым колебаниям) амплитуды, ширины и скорости нелинейной волны. В режим стохастической неустойчивости эти колебания будут носить случайный характер: одинаковые значения амплитуды волны, например, будут возникать в случайные моменты времени. В целом движение нелинейной волны будет аналогично броуновскому движению частицы. Отсюда следует, что действие внешней силы при $K \gg 1$ приведет к стохастическому ускорению волны, которое мы опишем несколько позже.

Поскольку механизм стохастической неустойчивости существенно определяется наличием области перекрытых резонансов, то стохастический режим движения может происходить лишь в области таких значений действия I для которых $K \gtrsim 1$. Границы этой области и определяют, фактически, область броуновского движения волны.

Описанный механизм неустойчивости, возможно, реализуется при разгоне волн на поверхности моря ветром. Различные случаи возникновения стохастической неустойчивости нелинейных волн можно найти в [1, 2].

Уже отмечалось, что теорию возмущений при $K \gg 1$ следует определенным образом модифицировать. Это связано со следующим обстоятельством. Изменение действия I по-прежнему остается достаточно малым, однако изменение фазы ϑ становится очень большим, что и приводит к ее случайности. Таким образом, теория возмущений становится плохим инструментом для описания зависимости $\vartheta(t)$. Однако эта трудность устраняется переходом к совершенно другой форме описания эволюции волны со временем. Такой формой является кинетическое уравнение, получающееся в результате усреднения по случайно меняющейся фазе и о котором речь будет идти позднее.

5. До сих пор речь шла о взаимодействии между нелинейной волной и внешней силой. Более сложным является случай, в котором роль внешней силы играют другие нелинейные волны. Как было видно ранее, при условиях достаточно слабого возмущения нелинейную волну можно рассматривать как некоторую квазичастицу. Это означает достаточно высокую устойчивость волнового пакета как целого относительно расплывания под действием возмущения. Сейчас мы убедимся, что подобную же концепцию можно провести в теории взаимодействия нелинейных волн. Для этого вспомним, что в уравнения движения нелинейной волны входит свертка между модами волны и модами внешней силы, выражающая закон сохранения по волновому числу. Если вместо внешней силы подставить другие нелинейные волны, взаимодействующие с данной, то закон сохранения отберет соответствующие члены, которые удовлетворяют резонансным условиям по q. Теперь нетрудно написать условие, необходимое для того, чтобы взаимодействие нелинейных волн было слабым:

$$\varepsilon = M/N \ll 1,$$

где N – характерное число мод в спектре волновых пакетов, M – число мод, участвующих одновременно в резонансных взаимодействиях с другими пакетами. Особенность введенного параметра малости в том, что он, вообще говоря, может не зависеть от амплитуды волн. Более того, неравенство $\varepsilon \ll 1$ может осуществляться лишь при $N \gg 1$, то есть для сильно нелинейных волн.

6. Чтобы сделанное утверждение стало более очевидным, обратимся к конкретному примеру и рассмотрим простейшую форму взаимодействия трех нелинейных волн. Рассматриваемую систему проще всего задать с помощью гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3} H_i + H_I,$$

$$H_I = \frac{1}{4} V \sum_{i \neq j \neq l} \sum_{\vec{q_i}, \vec{q_j}, \vec{q_l}} [y(\vec{q_i}) y(\vec{q_j}) y(\vec{q_l}) \times \delta(\vec{q_i} + \vec{q_j} + \vec{q_l}) + \text{к.с.}],$$

где H_i – энергия i-й нелинейной волны; H_I – член, учитывающий взаимодействие волн; индексы $(i,\ j,\ l)$ принимают всевозможные тройки значений чисел (1, 2, 3).

Заметим, что, как и в п. 1,

$$y(q_i) = y_{n_i}(t) = Cn_i e^{in_i\vartheta_i}; \quad \vec{q_i} = n_i\vec{k_i}.$$

Канонически сопряженные уравнения движения имеют вид:

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vartheta_i} = -\frac{\partial H_I}{\partial\vartheta_i},$$

$$\dot{\vartheta}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_i} = \dot{\omega}_i(I_i) + \frac{\partial H_I}{\partial I_i}.$$

Первое из написанных уравнений дает:

$$\dot{I}_1 = -i\frac{V}{2}\sum_{n_1,n_2,n_3} n_1 y^*_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} \delta(n_1\vec{k_1} - n_2\vec{k_2} - n_3\vec{k_3}) + \text{к.с.}$$
$$\dot{I}_2 = -i\frac{V}{2}\sum_{n_1,n_2,n_3} n_2 y^*_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} \delta(n_1\vec{k_1} - n_2\vec{k_2} - n_3\vec{k_3}) + \text{к.с.}$$
$$\dot{I}_3 = -i\frac{V}{2}\sum_{n_1,n_2,n_3} n_3 y^*_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} \delta(n_1\vec{k_1} - n_2\vec{k_2} - n_3\vec{k_3}) + \text{к.с.}$$

Входящие здесь δ-функции выражают условие резонанса по волновому числу:

$$n_1\vec{k_1} - n_2\vec{k_2} - n_3\vec{k_3} = 0,$$

причем числа $n_i \lesssim N_i$. Условие резонанса по частоте, очевидно, имеет вид:

$$n_1 k_1 u_1 - n_2 k_2 u_2 - n_3 k_3 u_3 = 0.$$

Те члены в уравнениях движения, для которых резонансные условия выполняются, дают основной вклад в изменение нелинейных волн, и в первом порядке теории возмущений можно ими ограничиться. Пусть теперь резонансные условия могут быть выполнены только в единственном случае с числами ($n_1,\ n_2,\ n_3$). Тогда система записанных уравнений упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= n_1\Gamma\sin\theta, \\ \dot{I}_2 &= -n_2\Gamma\sin\theta, \\ \dot{I}_3 &= -n_3\Gamma\sin\theta, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Gamma = V|C_{n_1}C_{n_2}C_{n_3}|,$$
$$\theta = n_1\vartheta_1 - n_2\vartheta_2 - n_3\vartheta_3.$$

Система уравнений (4) является обобщением хорошо известной в нелинейной оптике и в теории плазмы системы связи трех волн. В последнем случае Армстронг и Бломберг нашли точное решение. Аналогичное решение можно найти и в случае (4). Действительно, из (4) сразу следуют интегралы движения:

$$n_2 I_1 + n_1 I_2 = \text{const},$$

$$n_3 I_1 + n_1 I_3 = \text{const},$$

$$n_2 I_3 - n_3 I_2 = \text{const},$$

из которых независимыми являются только два. С помощью этих интегралов движения ответ может быть выражен в квадратурах. Ограничимся анализом движения волн в окрестности резонанса. Пусть резонансные условия по частоте выполняются при значениях действий $I_{10},\ I_{20},\ I_{30}$. Умножая уравнения системы (4) соответственно на ω_1, ω_2, ω_3 и интегрируя по t, получаем:

$$\sum_{s=1}^{3} \int_{I_{s0}}^{I_s} \omega_s dI_s + \Gamma_0 \cos\theta = \mathrm{const},$$

где $\Gamma_0 \equiv \Gamma(I_{10}, I_{20}, I_{30})$. Воспользуемся теперь тем, что мы находимся в окрестности резонанса и разложим $\omega(I)$ в ряд. Простое интегрирование приводит нас к интегралу, характеризующему фазовые колебания в системе трех нелинейных волн:

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} \frac{d\omega_s}{dI_s}(I_s - I_{s0})^2 + \Gamma_0 \cos\theta = \mathrm{const}.$$

Отсюда определяется амплитуда модуляции (ширина резонанса) по действию

$$\delta I = \left[2\Gamma_0 / \frac{d\omega}{dI}\right]^{1/2}$$

и по частоте

$$\delta\omega = \frac{d\omega}{dI}\delta I = \left[2\Gamma_0 \frac{d\omega}{dI}\right]^{1/2}.$$

Произведем теперь оценку полученных выражений. Если, например, нелинейные волны имеют форму эллиптического синуса или косинуса, то для них $C_n \sim A/N$ для $n \lesssim N$. Отличие члена с взаимодействием H_I от аналогичного члена в гамильтониане, входящего в H_i (то есть «собственного» для какой-либо волны), заключается в том, что в H_I при единственном резонансе на два суммирования по n_i меньше, чем в H_i. В соответствии с этим H_I содержит порядок малости $1/N^2$, а $\delta I/I \propto 1/N$.

По существу, описанный нами процесс представляет собой неустойчивость распадного типа. Нам удалось, однако, пойти дальше и получить насыщение неустойчивости вследствие нелинейности.

7. Теперь можно сделать следующий шаг и перейти к рассмотрению большого числа слабо взаимодействующих нелинейных волн. Выделим всевозможные тройки волн, между которыми возможно резонансное взаимодействие, причем одна из волн пусть будет фиксированной. Введем понятие расстояния между резонансами:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta k}{k}\omega,$$

где Δk характерное расстояние между волновыми числами «соседних» волн. Иными словами, в последовательности частот $\omega_1,\ \omega_2$... различных волн интервал между соседними частотами имеет порядок $\Delta\omega$. Тогда условие перекрытия резонансов

$$(\delta\omega/\Delta\omega)^2 \gg 1$$

приводит к тому, что фазы волн ϑ_i будут случайным образом меняться со временем [4]. Это означает, что на фоне нелинейных волн нулевого приближения возникает случайная рябь, связанная с резонансным взаимодействием волн. Процесс обмена энергией между нелинейными волнами в этом случае естественно описывать с помощью кинетического уравнения, которое будет приведено позднее.

8. В различных случаях мы уже столкнулись с необходимостью описания эволюции нелинейных волн методом кинетического уравнения. Оставшееся время лекции будет посвящено этому вопросу. Удобно начать с рассмотрения движения нелинейных волн под действием внешних случайных сил. Такими случайными силами могут быть ветровое возмущение для волн на поверхности жидкости, турбулентная среда, в которой распространяется нелинейная волна, и др.

При выводе кинетического уравнения для нелинейной волны фундаментальную роль играют канонически сопряженные переменные (I, ϑ), введенные в п. 2. Если ввести функцию распределения $f(I, \vartheta, t)$, то она удовлетворяет следующему уравнению Луивилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \dot{I}\frac{\partial f}{\partial I} = 0, \tag{5}$$

где выражения для $\dot{\vartheta}$ и $\dot{I}$ должны определяться из уравнений движения:

$$\dot{I} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta}; \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I}.$$

Представим гамильтониан в виде:

$$\mathcal{H} = H_0 + \varepsilon H_1,$$

где невозмущенная часть H_0 описывает нелинейную волну $y = y(x - ut)$, а

$$H_1 = \sum_n y_n(t)\Phi_{-n}(t),$$

как и в п.2. На этот раз, однако, мы будем считать силу $\Phi(x, t)$ случайной, и будем предполагать, что $\Phi(x, t)$ есть гауссовский случайный процесс. Это означает, что

$$\langle\Phi(x, t)\rangle = 0,$$
$$\langle\Phi(x, t)\Phi(x + \xi, t + \tau)\rangle = R(\xi, \tau)$$

и все нечетные моменты от Φ равны нулю, а четные соответствующим образом выражаются через парные корреляции R. Корреляционная функция R вводит в задачу некоторое время убывания корреляции τ_c, которое будем считать для простоты меньшим всех характерных времен задачи. При $\tau_c \to 0$ величина $R(\xi, \tau) \to R_0(\xi)\delta(\tau)$, то есть к белому шуму (по времени). Удобно для дальнейшего ввести спектральную плотность:

$$S(\kappa, \nu) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\xi, \tau) e^{i(\kappa x - \nu\tau)}.$$

Обычная процедура вывода кинетического уравнения для $f(I,\vartheta,t)$ заключается в использовании теории возмущений по параметру ε и усреднении по заданному случайному процессу $\Phi(x,t)$. Особенность введения канонических переменных (I,ϑ) заключается в том, что в этих переменных уравнение имеет стандартный вид:

$$\frac{\partial f(I,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}D(I)\frac{\partial f(I,t)}{dI}, \tag{6}$$

где

$$f(I,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta f(I,\vartheta,t),$$

а коэффициент диффузии D равен:

$$D = \frac{\langle(\Delta I)^2\rangle}{t}$$

и ΔI – изменение действия волны к моменту времени t. Перейдем теперь к вычислению D. Запишем:

$$\Delta I = \int_{-\infty}^{t} dt_1 \frac{dI}{dt_1} = -\varepsilon\int_{-\infty}^{t} dt_1 \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx_1 y'(x_1 - ut_1)\Phi(x_1,t_1).$$

С помощью этого выражения можно вычислить величину:

$$\langle(\Delta I)^2\rangle = \varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \lim_{\substack{L_1\to\infty,\\ L_2\to\infty}}\frac{1}{2L_1}\int_{-L_1}^{L_1} dx_1\int_{-L_2}^{L_2} dx_2\times$$

$$\times y'(x_1-ut_1)y'(x_2-ut_2)R(x_1-x_2,t_1-t_2).$$

В правой части здесь стоит невозмущенное значение $y(x-ut)$, описывающее нелинейную волну. Теперь следует учесть, что R при $t>\tau_c$ быстро убывает. Это позволяет провести интегрирование по t при $t\gg\tau_c$:

$$D = 8\pi\varepsilon^2\sum_n n^2|C_n|^2 S(kn, k\nu u).$$

Кинетическое уравнение (6) определяет броуновское движение нелинейной волны с коэффициентом диффузии D. Поскольку внешняя сила в среднем увеличивает энергию волны, то через некоторое время амплитуда или скорость волны могут достигнуть критических значений, при которых происходит опрокидывание волны.

9. Мы выбрали такую форму вывода и записи кинетического уравнения, которая допускает обобщение и для двух других случаев, о которых уже упоминалось в лекциях. В п. 4 рассматривалась стохастическая неустойчивость нелинейной волны под действием регулярной внешней силы $\Phi(x,t)$. Однако, вследствие стохастической неустойчивости фаза волны ϑ становилась случайной функцией времени. Кинетическое уравнение, описывающее эволюцию волны в этом случае, по-прежнему имеет вид (6). Вычисление надо производить по формуле

$$D = \frac{1}{t}\langle\langle(\Delta I)^2\rangle\rangle,$$

где двойные угловые скобки означают усреднение по случайным фазам ϑ. Это сохраняет ту же структуру коэффициента диффузии D, а отличие содержится только в выражении для спектральной плотности $S(\kappa, \nu)$.

Наконец, если среда содержит случайные неоднородности, малые по величине, то гамильтониан задачи следует разбить на две части: регулярную, соответствующую однородному случаю, и возмущение, связанное со случайными неоднородностями. Для последних следует определить спектральную плотность корреляции S и это решает принципиальную задачу.

10. В заключение лекций остановимся кратко на кинетическом уравнении для ансамбля нелинейных волн. Исходным пунктом и здесь будет уравнение Луивилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_s \dot{\vartheta}_s \frac{\partial f}{\partial \vartheta_s} + \sum_s \dot{I}_s \frac{\partial f}{\partial I_s} = 0,$$

где $f(t; \vartheta)_1, \vartheta)_2, ...; I_1, I_2, ...$ – функция распределения, зависящая от большого числа пар канонически сопряженных переменных (I_s, ϑ_s). Если фазы волн $\vartheta_1, \vartheta_2, ...$ являются случайными, то кинетическое уравнение получается из уравнения Луивилля путем использования теории возмущений по слабому взаимодействию волн и усреднению по случайным фазам. Этот вывод является очень громоздким. Его можно найти в работе [4], а здесь мы приведем лишь конечный результат:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 6\pi \sum_{m_1, m_2, m_3} \sum_{n_{m_1}, n_{m_2}, n_{m_3}} |V_{m_1 m_2 m_3}|^2 \hat{D}_{m_1 m_2 m_3} \times$$

$$\times |c(n_{m_1}) c(n_{m_2}) c(n_{m_3})|^2 \delta(n_{m_1}\omega_{m_1} + n_{m_2}\omega_{m_2} - n_{m_3}\omega_{m_3}) \times$$

$$\times \delta(n_{m_1}\vec{k}_{m_1} + n_{m_2}\vec{k}_{m_2} - n_{m_3}\vec{k}_{m_3}) \hat{D}_{m_1 m_2 m_3} F,$$

$$\hat{D}_{m_1 m_2 m_3} \equiv n_{m_1} \frac{\partial}{\partial I_{m_1}} + n_{m_2} \frac{\partial}{\partial I_{m_2}} - n_{m_3} \frac{\partial}{\partial I_{m_3}},$$

$$F(I_1, I_2, ... I_s, t) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^s \int_0^{2\pi} d\vartheta_1 ... d\vartheta_s f(I_1, ..., I_s; \vartheta_1, ..., \vartheta_s; t),$$

где $V_{m_1 m_2 m_3}$ – матричный элемент взаимодействия волн. Это уравнение имеет равновесное решение, определяющее термодинамическое равновесие в ансамбле нелинейных волн:

$$F = F(\sum_t (H_i - \vec{k}_i W I_i)),$$

где $\vec{W}$ – произвольная константа, имеющая смысл макроскопической скорости.

11. В заключение лекций мне бы хотелось отметить, что почти все вопросы, которые были затронуты, представляют собой лишь первые шага в попытках понять физические процессы, приводящие к возникновению стохастических волновых процессов в условиях большой нелинейности. Нет сомнений, что через этот круг вопросов лежит путь к пониманию природы сильной турбулентности и процессов, происходящих в турбулентной среде.

Лекции были построены таким образом, чтобы обратить внимание не некоторые идеи и методы, которые в настоящее время привлекаются к исследованию стохастических явлений в сильно нелинейных полях. По этой причине мы исключили подробное изложение каких-либо конкретных методов и слабонелинейные случаи, поскольку в последних круг представлений о физических процессах более или менее установился. Приводимая ниже литература поможет уточнить ряд деталей, связанных с содержанием лекций.

Библиографический список

1. *Заславский Г.М., Филоненко Н.Н.* // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, 1064 – к п. 2-4, 9.
2. *Филоненко Н.Н.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, 925 – к п. 3, 4.
3. *Заславский Г.М., Филоненко Н.Н.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 57, 1453 – к п. 5-7,12.
4. *Берман Г.П., Заславскй Г.М.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 58, 1453 – к. п. 5-7,10.
5. *Филоненко Н.Н.* // ДАН СССР. 1969. Т. 189, 1208 – к п. 8.
6. *Чириков Б.В.* Исследования по теории нелинейного резонанаса и стохастичности. Препринт ИЯФ № 267. Новосибирск, 1969;
   Заславский Г.М., Чириков Б.В. // УФН. 1971. Т. 105, № 3.