



СИНХРОНИЗАЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ, ХАОТИЧЕСКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова
Под общей редакцией проф. В.С. Анищенко

© В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова, 2008

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008

М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 144 с.

ISBN 978-5-93972-701-3

Книга посвящена систематическому изложению результатов теоретического, численного и экспериментального анализа эффектов синхронизации периодических, квазипериодических, хаотических и стохастических колебаний. Подробно излагается классическая теория синхронизации и обсуждаются пределы ее применимости к изучению эффекта синхронизации квазипериодических и непериодических колебаний. Книга может быть рекомендована в качестве учебного пособия по курсу «Нелинейная теория колебаний» для физико-математических специальностей университетов. Ориентирована на студентов старших курсов, аспирантов, молодых ученых и преподавателей. Книга включает 78 иллюстраций и список литературы, содержащий 134 наименования.

Оглавление

Предисловие

Глава 1. Синхронизация периодических автоколебаний

1.1. Введение. 1.2. Внешняя синхронизация генератора ван дер Поля. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы. 1.3. Бифуркационный анализ системы укороченных уравнений. 1.4. Бифуркационный анализ неавтономного генератора ван дер Поля. 1.5. Выводы

Глава 2. Синхронизация автоколебаний в присутствии шума

2.1. Введение. 2.2. Вынужденная синхронизация зашумленных автоколебаний гармонической внешней силой. 2.3. Взаимная синхронизация квазигармонических автогенераторов в присутствии шума. 2.4. Выводы

Глава 3. Синхронизация квазипериодических колебаний

3.1. Введение. 3.2. Взаимная синхронизация двух симметрично связанных генераторов. Резонансный предельный цикл на двумерном торе. 3.3. Воздействие

внешней периодической силы на резонансный предельный цикл в системе связанных генераторов. 3.4. Основные бифуркации квазипериодических режимов при синхронизации резонансного предельного цикла. 3.5. Особенности синхронизации резонансных предельных циклов. 3.6. Синхронизация двухчастотных колебаний в автогенераторе квазипериодических колебаний. 3.7. Результаты экспериментальных исследований. 3.8. Внешняя синхронизация квазипериодических колебаний двухчастотным сигналом. 3.9. Экспериментальный анализ внешней синхронизации двухчастотного генератора квазипериодическим сигналом. 3.10. Выводы

Глава 4. Синхронизация хаоса

4.1. Введение. 4.2. Частотно-фазовая синхронизация хаотических автоколебаний. 4.3. Исследование вынужденной синхронизации генератора спирального хаоса в натурном эксперименте. 4.4. Частотно-фазовая синхронизация хаоса в присутствии шума. 4.5. Полная синхронизация взаимодействующих хаотических систем. 4.6. Количественные характеристики степени синхронности хаотических автоколебаний. 4.7. Выводы

Глава 5. Синхронизация стохастических колебаний

5.1. Введение. 5.2. Внешняя синхронизация процесса переключений в бистабильном осцилляторе под действием шума и периодического сигнала. 5.3. Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмита. 5.4. Внешняя и взаимная стохастическая синхронизация процессов переключений в хаотических системах. 5.5. Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок. 5.6. Выводы

Заключение

Литература

Предисловие

Синхронизация – одно из фундаментальных свойств нелинейных систем, которое заключается в установлении определенных соотношений между характерными временами, частотами или фазами колебаний парциальных систем в результате их взаимодействия. Эффект синхронизации, открытый Гюйгенсом [1] в XVII, веке играет огромную роль в природе и технике, что отражено в ряде монографий [2–16]. Большое влияние на создание теории синхронизации оказало развитие электронных средств связи в первой половине XX века. В связи с чем можно отметить известную работу ван дер Поля [17]. В дальнейшем была детально разработана ставшая классической теория синхронизации периодических автоколебаний [2–5, 9, 10, 13, 18–26], в том числе в присутствии шума [27–31]. Имеются работы (хотя и не в столь значительном количестве), посвященные синхронизации квазипериодических колебаний [32–35].

В рамках классической теории различают *вынужденную синхронизацию*, т.е. синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и *взаимную синхронизацию*, наблюдающуюся при взаимодействии двух автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются одни и те же эффекты, связанные с двумя классическими механизмами синхронизации: захватом собственных частот (и, соответственно, фаз) колебаний или же подавлением одной из двух независимых частот.

Пусть $\Phi_1(t)$ и ω_1 – фаза и частота одного квазигармонического автогенератора, а $\Phi_2(t)$ и ω_2 – фаза и частота другого, связанного с ним автогенератора. Условия синхронизации формулируются как

$$m\Phi_1(t) - n\Phi_2(t) = \text{const} \quad (1)$$

и

$$m\omega_1 = n\omega_2, \quad (2)$$

где m и n – целые числа. Условия (1), (2) определяют эффект захвата фаз и частот, который должен выполняться в некоторой области значений управляющих параметров, называемой областью синхронизации. Простейший случай 1:1 ($m = n = 1$) соответствует основной области синхронизации или области синхронизации на основном тоне.

Явление синхронизации автоколебаний в рамках хорошо разработанной теории синхронизации периодических колебаний уже многие годы привлекает особое внимание исследователей. Отчасти это обусловлено важностью данного явления с точки зрения практических приложений. В качестве примера можно привести синхронизацию электронных часов внешним воздействием высокостабильного генератора, в результате которой обеспечивается высокая точность времени в системе транспорта. Синхронизация мощных генераторов периодических колебаний с помощью слабого воздействия от внешнего высокостабильного генератора позволяет существенно улучшить их характеристики, такие как стабильность частоты, флуктуации амплитуды и фазы и другие.

В последние годы интерес к эффекту синхронизации проявляют биологи, химики и даже представители социальных и экономических наук. Отмечено синхронное поведение взаимодействующих клеток живой ткани, ансамблей нейронов, биологических популяций и т.д. Однако весьма существенно при исследовании этих проблем то, что анализируемые колебательные процессы здесь не всегда являются строго периодическими. Естественно, возникают многие вопросы о применимости классической теории синхронизации к такого рода колебательным процессам.

С открытием и доказательством возможности существования хаотических (непериодических) колебаний как особых решений дифференциальных уравнений естественно возникла проблема синхронизации таких колебаний. Появилось большое количество публикаций по этой проблеме [36–46], однако более или менее общей теории синхронизации хаотических колебаний пока не создано. Этому есть весомые причины, обусловленные широким спектром различных характеристик хаотических колебаний, отсутствием единого понимания сути эффекта и наличием неопределенности понятий фазы и частоты хаотических колебаний.

Не так давно было обнаружено, что явление подобное синхронизации можно наблюдать в классе колебательных систем, не являющихся, строго говоря, автогенераторами. Речь идет о так называемых стохастических осцилляторах – нелинейных диссипативных системах, в которых колебания возникают под действием шума. Различают два типа стохастических осцилляторов: возбудимые осцилляторы и бистабильные осцилляторы. Для возбудимых систем характерна генерация импульсов в условиях, когда сигнал внешнего воздействия превышает некоторый пороговый уровень. В результате действия шума такая система совершает стохастические колебания, представляющие собой случайную последовательность импульсов. Биста-

бильный стохастический осциллятор – это нелинейная система с двумя устойчивыми состояниями. Присутствие шума приводит к случайным переключениям системы из одного состояния в другое. В обоих случаях колебания описываются статистическими характеристиками, такими как средняя частота импульсов зажигания или средняя частота переключений. Эффекты частичного (нестроого) захвата средних частот и мгновенных фаз колебаний в системах указанного типа исследовались в ряде работ [14, 47–50]. По сути дела, в такого рода системах речь должна идти о так называемой «стохастической синхронизации», то есть о синхронизации случайных колебательных процессов.

В предлагаемой вниманию читателя книге делается попытка дать ответ на вопрос: возможно ли использовать и, если необходимо, в некотором смысле обобщить классические представления о синхронизации периодических колебаний на случай более сложных, квазипериодических, хаотических и стохастических колебаний? Если да, то нужно четко сформулировать границы применимости идей классической теории синхронизации к более сложным типам автоколебаний и выделить те конкретные типы колебательных процессов, для которых можно конструктивно использовать классические представления.

Книга включает пять глав. *В первой главе* последовательно излагается классическая теория синхронизации квазигармонических колебаний на примере синхронизации генератора ван дер Поля. Описаны важные аспекты теории, которые используются в качестве основы при рассмотрении синхронизации более сложных колебаний. *Во второй главе* излагается теория синхронизации генераторов типа ван дер Поля в условиях внешнего аддитивного шумового воздействия. Изложение ведется на основе классических работ Р.Л. Стратоновича. *В третьей главе* приведены результаты исследований синхронизации квазипериодических колебаний на примере колебаний с двумя независимыми частотами. Обсуждаются особенности применимости идей и выводов классической теории к случаю автогенератора квазипериодических колебаний. *Четвертая глава* посвящена анализу эффектов синхронизации хаотических колебаний. Показано, что наиболее конструктивно идеи классической теории можно использовать применительно лишь к особому типу хаотических автоколебаний, отвечающих режиму фазо-когерентного хаотического аттрактора. Наконец, *пятая глава* посвящена описанию эффектов синхронизации стохастических автоколебаний. Рассматриваются колебания, индуцированные шумом в бистабильных системах, и хаотические переключения в динамических системах с кризисом аттракторов.

Особенностью предлагаемой книги является следующее. При изложении классической теории синхронизации большее, чем обычно принято в учебных пособиях, внимание уделялось анализу бифуркаций устойчивых и неустойчивых синхронных движений в моделях различного уровня сложности (фазовое уравнение, укороченные уравнения для амплитуды и фазы, уравнение неавтономного осциллятора ван дер Поля); все представленные в работе графические иллюстрации были получены авторами специально для этой книги или взяты из оригинальных публикаций авторов. При расчетах использовались компьютерные программы, созданные на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского госуниверситета, а также специальные программные комплексы [51].

Настоящее пособие ориентировано на студентов, аспирантов и преподавателей вузов по специальностям, включающим изучение теории колебаний, и может быть рекомендовано в качестве учебного пособия по курсу теории колебаний.

В пособии использованы научные результаты авторов, полученные в рамках Программы Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы». Авторы выражают благодарность дирекции Инновационного образовательного проекта СГУ за частичное финансирование работ по созданию настоящего пособия.

Авторы пользуются возможностью поблагодарить аспирантов кафедры С.М. Николаева и С.А. Коблянского за проведение ряда сложных компьютерных экспериментов. Мы также благодарны воспитанникам кафедры А.Б. Нейману, И.А. Хованову, А.Н. Сильченко, Б.В. Шульгину, которые являются авторами и соавторами ряда научных работ, использованных в книге.

*В.С. Анищенко, В.В. Астахов,
Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова*

Библиографический список к Предисловию

1. Х. Гюйгенс, *Три мемуара по механике* (Изд-во АН СССР, М., 1951).
2. А.А. Андронов, *Собрание трудов* (Изд-во АН СССР, Москва 1956).
3. К.Ф. Теодорчик, *Автоколебательные системы* (Гостехиздат, Москва 1952).
4. Т. Хаяси, *Нелинейные колебания в физических системах* (Мир, Москва 1968).
5. И.И. Блехман, *Синхронизация динамических систем* (Наука, Москва 1971).
6. Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский, *Математические модели в биофизике* (Наука, Москва 1975).
7. А.Г. Демьянченко, *Синхронизация генераторов гармонических колебаний* (Энергия, Москва 1976).
8. А.Т. Winfree, *The geometry of biological time* (Springer, New York 1980).
9. П.С. Ланда, *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы* (Наука, Москва 1980).
10. И.И. Блехман, *Синхронизация в природе и технике* (Наука, Москва 1981).
11. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations Waves and Turbulence* (Springer, Berlin 1984).
12. П.С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны* (Наука, Москва 1997).
13. А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (Техносфера, Москва 2003).
14. В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, А.Б. Нейман, Г.И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер, *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах* (Изд-во Института компьютерных исследований, Москва, Ижевск, 2003).
15. E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, D. Postnov, *Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems* (World Scientific, Singapore 2002).
16. В. В. Матросов, В. Д. Шалфеев, *Динамический хаос в фазовых системах* (Изд-во ННГУ, Н.Новгород 2007).

17. B. Van-der-Poll, *Theory of the amplitude of free and forced triod vibration* (Radio Rev. 1920. Vol. 1. P. 701–710).
18. E.V. Appleton, *The automatic synchronization of triode oscillator Proc. of the Cambridge Philosophical Society* (Math. and Phys. Sciences. 1922. Vol. 21. P. 231–248).
19. А.А. Андронов, А.А. Витт, *К математической теории захватывания* (Журнал прикладной физики. 1930. Т. 7. С. 3–11).
20. А.Г. Майер, *К теории связанных колебаний двух самовозбужденных генераторов* (Уч. зап. ГГУ. 1935. Т. 2(5). С. 3–11).
21. В.И. Гапонов, *Два связанных генератора с мягким возбуждением* (ЖТФ. 1936. Т. 6, вып. 6. С. 801).
22. К.Ф. Теодорчик, *К теории синхронизации релаксационных автоколебаний* (ДАН СССР. 1943. Т. 40, вып. 2. С. 63–66).
23. Р.В. Хохлов, *К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы* (ДАН СССР, 1954. Т. 97, вып. 3. С. 411–414).
24. И.И. Минакова, К.Ф. Теодорчик, *К теории синхронизации автоколебаний произвольной формы* (ДАН СССР. 1956. Т. 106, вып. 4. С. 658–660).
25. В.Н. Парыгин, *Взаимная синхронизация трех связанных автоколебательных генераторов в случае слабой связи* (Радиотехника и электроника. 1956. Т. 1, вып. 2. С. 197–204).
26. Г.М. Уткин, *Взаимная синхронизация генераторов на кратных частотах* (Радиотехника и электроника. 1957. Т. 2, вып. 1. С. 44–56).
27. Р.Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике* (Сов. радио, Москва 1961).
28. А.Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах* (Наука, Москва 1968).
29. И.Г. Акопян, П.С. Ланда, *Синхронизация автоколебаний на обертонах при наличии шума* (Радиотехника и электроника. 1962. Т. 7, вып. 8. С. 1285–1293).
30. И.К. Костин, Ю.М. Романовский, *Флуктуации в системах многих связанных генераторов* (Вестник МГУ. Сер. физ. и астр. 1972. Т. 13, вып. 6. С. 698–705).
31. И.К. Костин, Ю.М. Романовский, *Взаимная синхронизация релаксационных генераторов в присутствии шума* (Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, вып. 1. С. 36–42).
32. П.С. Ланда, Н.Д. Таранкова, *Синхронизация генератора при модуляции его собственной частоты* (Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21, вып. 2. С. 260–265).
33. В.Ф. Скупой, В.П. Копылов, *О синхронизации ЧМ-автогенератора* (Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, вып. 7. С. 1374–1379).
34. V. Anishchenko, S. Nikolaev, and J. Kurths, *Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions* (Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 056202).
35. В.С. Анищенко, С.М. Николаев, *Экспериментальное исследование синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний* (Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, вып. 6. С. 93–101).

36. H. Fujisaka, Y. Yamada, *Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems* (Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32–46).
37. A.S. Pikovsky, *On the interaction of strange attractors* (Z. Phys. B. 1984. Vol. 55. P. 149–154).
38. А.С. Пиковский, *Синхронизация фазы стохастических автоколебаний периодическим внешним сигналом* (Радиотехника и электроника. 1985. Т. 1. С. 1970–1974).
39. Ю.А. Кузнецов, П.С. Ланда, А.Ф. Ольховой, С.М. Перминов, *Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах* (ДАН СССР. 1985. Т. 281, вып. 2. С. 1164–1169).
40. В.С. Афраймович, Н.Н. Веричев, М.И. Рабинович, *Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах* (Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, вып. 9. С. 1050–1060).
41. L. Pecora, T. Carroll, *Synchronization of chaotic systems* (Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821–823).
42. В.С. Анищенко, Д.Э. Постнов, *Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов* (Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 6. С. 569–573).
43. V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, M.A. Safonova, *Synchronization of chaos* (Int. J. of Bif. and Chaos. 1992. Vol. 2, no. 3. P. 633–644).
44. M.G. Rosenblum, A. Pikovsky, J. Kurths, *Phase synchronization of chaotic oscillations* (Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76(11). P. 1804–1807).
45. M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths, *From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators* (Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193–4196).
46. N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel, *Generalized synchronization of chaos in unidirectionally coupled chaotic systems* (Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 980–995).
47. A.B. Neiman, *Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems* (Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P.3484–3488).
48. B.V. Shulgin, A.B. Neiman, V.S. Anishchenko, *Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by periodic force* (Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157–4160).
49. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, *Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок* (Успехи физич. наук, 1999. Т. 42, вып. 1. С. 7–36).
50. S.K. Han, T.G. Yim, D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva, *Interacting coherence resonance oscillators* (Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83(9). P.1771–1774).
51. E. Doedel, R.C. Paffenroth, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B.E. Oldeman, B. Sandstede, and X. Wang, *AUTO2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HOMCONT)* (Technical report, Concordia University 2002).