



СУБГАРМОНИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В СИСТЕМЕ ДВУХ ДИССИПАТИВНО СВЯЗАННЫХ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

А. П. Кузнецов, Л. В. Тюрюкина

Рассматривается задача о возбуждении двух связанных автоколебательных элементов в условиях простейшего субгармонического резонанса внешней силы и собственных частот осцилляторов. Получено соответствующее фазовое уравнение. Показано, что устройство языка синхронизации и эволюция двух- и трехчастотных режимов при вариации величины связи между осцилляторами заметно отличается от случая основного резонанса. Эффективность фазовой модели проиллюстрирована с помощью сопоставления карт ляпуновских показателей фазовой модели и исходной системы.

Ключевые слова: Квазипериодические колебания, синхронизация, бифуркации.

Введение

Обратимся к задаче о синхронизации внешним сигналом в общей постановке [1–3]. В этом случае имеется некоторая автоколебательная система, возбуждаемая внешним сигналом. Если частота сигнала находится в рациональном соотношении с собственной частотой системы, возникают различные резонансы. На плоскости параметров частота – амплитуда воздействия им отвечают языки Арнольда разного порядка. Основные (сильные) резонансы имеют свое характерное устройство, описанное в [2–8]. Для осциллятора ван дер Поля, благодаря кубическому характеру нелинейности, наиболее выраженным из субгармонических резонансов оказывается резонанс 1:3. Он имеет определенные особенности, в частности, характерную округлую вершину, благодаря которой легко идентифицируется в численных расчетах и экспериментах [2–9].

Пусть теперь возбуждаемая система представляет собой два связанных осциллятора ван дер Поля. Для случая, когда частота сигнала и собственные частоты осцилляторов близки, фазовая модель построена и исследована [10–14]. Однако общая картина для произвольных частот заметно усложняется, поскольку система может демонстрировать большое количество различных резонансных ситуаций. Можно, например, существенно изменить частоту одного из осцилляторов, так чтобы

собственные частоты относились как целые числа*. Другой вариант состоит в том, чтобы развивать подход к связанным осцилляторам как к системе с близкими частотами и варьировать существенным образом частоту внешнего сигнала. Тогда возникает естественный вопрос: в какой мере сценарий синхронизации осцилляторов, установленный в рамках фазовой модели для резонанса 1:1 [10–14], является универсальным для других резонансов? Для ответа на этот вопрос обсудим особенности резонанса 1:3 в задаче о возбуждении двух связанных осцилляторов ван дер Поля.

1. Резонанс 1:1. Фазовая модель

Система дифференциальных уравнений, описывающая возбуждение двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \cos \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь λ – параметр отрицательного трения автономных осцилляторов, Δ – их относительная частотная расстройка, μ – коэффициент диссипативной связи, B – амплитуда воздействия, $\omega = 1 + \Omega$ – частота воздействия. Центральная частота осцилляторов принята за единицу, так что Ω представляет собой отстройку частоты сигнала от центральной.

Основной резонанс в модели (1) достаточно подробно изучен [10–14]. Для сопоставления со случаем субгармонического резонанса, однако, нам понадобится кратко изложить некоторые результаты [10–14]. Начнем с формулировки уравнений в фазовом приближении

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\Omega - \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1) + b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= -\Omega + \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 – фазы первого и второго осцилляторов относительно внешнего сигнала, $b = B/4$ – амплитуда воздействия. Уравнения (2) получаются из (1) при традиционных предположениях о малой величине параметров λ , μ , Δ и Ω [10–11,13]. Параметры, использованные в (2), однако, нормированы на величину λ , так что могут считаться уже не малыми.

В соответствии с (2) при выключенном воздействии и отсутствии связи ($b = 0$, $\mu = 0$) осцилляторы в принятой нормировке имеют собственные частоты $\Omega_1 = -\Delta/4$ и $\Omega_2 = \Delta/4$. При этом захват автономной системы происходит на средней частоте $\Omega^* = (\Omega_1 + \Omega_2)/2 = 0$.

Традиционная для неавтономных систем плоскость параметров частота – амплитуда воздействия (Ω, b) для фазовой системы (2) показана на рис. 1. Можно видеть область P полной синхронизации осцилляторов внешней силой и области

*Такой случай для соотношения частот 1:3 экспериментально исследован в [11].

двухчастотной T_2 и трехчастотной квазипериодичности T_3 . Эти области выявлены с помощью двухпараметрического анализа показателей Ляпунова [12–14]. Рис. 1 соответствует случаю, когда $|\Delta| < 2\mu$, и автономные осцилляторы взаимно захвачены.

Область полной синхронизации на рис. 1 может быть найдена аналитически [10–13] как область существования устойчивого равновесия. Она имеет вид характерного языка, причем имеют место следующие особенности:

- основание языка дается значением $\Omega = \Omega^*$, отвечающим частоте захвата двух автономных осцилляторов;
- частотная полоса захвата имеет ширину, равную параметру связи μ ;
- центр полосы захвата отвечает равенству частоты воздействия собственной частоте второго осциллятора: $\Omega = \Omega_2$.

Эти значения отмечены стрелками на рис. 1. Еще одна характерная особенность картины состоит в наличии точек коразмерности два *saddle-node fan* SNF (седло-узловой веер) [15,16]. Они образуют углы на границах языка, для которых все четыре устойчивые и неустойчивые равновесия системы (2) стягиваются в одну точку. На плоскости параметров в точки SNF приходят сужающиеся языки трехчастотной квазипериодичности, в которые встроена система резонансных областей двухчастотных режимов разного порядка, образующих «веерную» структуру. Языки трехчастотной квазипериодичности делят двухчастотную область на две. При малой амплитуде воздействия в области 1 наблюдается частичный захват относительной фазы осцилляторов, то есть слабая внешняя сила не разрушает взаимный захват осцилляторов. При большой амплитуде сигнала в области 2 наблюдается частичный захват первого осциллятора, непосредственно возбуждаемого внешней силой. При этом взаимный захват осцилляторов разрушается.

Важно отметить, что при возрастании величины связи μ ширина области полной синхронизации возрастает, но никаких качественных изменений в устройстве рис. 1 не происходит.

2. Резонанс 1:3. Построение фазовой модели

Обратимся теперь к резонансу 1:3, когда частота внешнего сигнала в (1) $\omega \approx 3$. Прежде всего, получим соответствующее фазовое уравнение. Для этого вслед за [2,9] сначала находим нерезонансный отклик на частоте $\omega = 3$, для чего вполне доста-

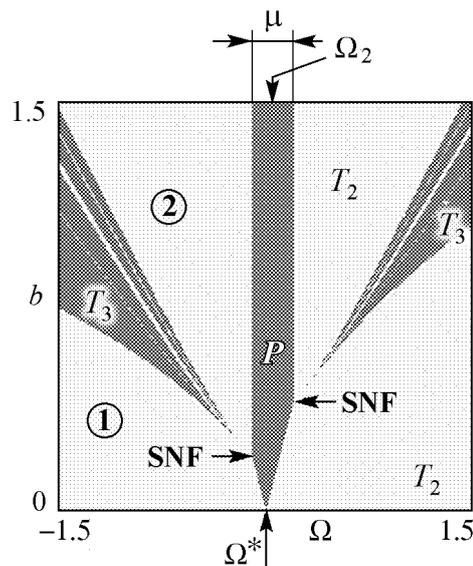


Рис. 1. Области основных режимов на плоскости параметров фазовой системы (2): P – точный захват обоих осцилляторов внешним сигналом; T_2 и T_3 – области двух- и трехчастотной квазипериодичности, SNF – точки *saddle-node fan*; Ω_2 – собственная частота второго осциллятора, Ω^* – частота захвата автономных осцилляторов, μ – величина связи. Цифра 1 в кружочке отвечает захвату относительной фазы осцилляторов, цифра 2 – захвату первого осциллятора внешней силой

точно линейного приближения, причем величиной связи и отрицательным трением можно пренебречь. Подставим в (1) решение $x(t) = -A \cos \omega t$. Тогда в рамках указанной оценки получаем $(\omega^2 - 1)A = B$, откуда при $\omega \approx 3$ имеем $A = B/8$.

Далее ищем отклик системы на частоте $\omega/3$, для чего полагаем

$$\begin{aligned} x &= ae^{i\omega t/3} + a^*e^{-i\omega t/3} - \frac{A}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \\ y &= be^{i\omega t/3} + b^*e^{-i\omega t/3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Налагая традиционное дополнительное условие, исключаящее члены с производными по времени от комплексных амплитуд a и b , получаем для скоростей изменения переменных

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{i\omega}{3}(ae^{i\omega t/3} - a^*e^{-i\omega t/3}) - \frac{i\omega A}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), \\ \dot{y} &= \frac{i\omega}{3}(be^{i\omega t/3} - b^*e^{-i\omega t/3}). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставим соотношения (3) и (4) в исходные уравнения (1) и в полученном уравнении оставим лишь резонансные члены вида $e^{i\omega t/3}$. С линейными членами поступим аналогично обычному резонансу в уравнении ван дер Поля. В результате некоторых преобразований, аналогичных проведенным в [9], получим

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - 2i(\Delta/4 + \bar{\Omega})a - a^2 a^* + \frac{1}{2}(a^*)^2 A - \frac{1}{2}aA^2 - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b + 2i(\Delta/4 - \bar{\Omega})b - |b|^2 b - \mu(b - a). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\bar{\Omega} = \omega/3 - 1$ – параметр частоты внешнего сигнала.

Параметр λ в (5) может быть убран нормировкой, что предполагаем выполненным, а соответствующие параметры считаем далее нормированными. Положим $a = Re^{i\psi_1}$ и $b = re^{i\psi_2}$, где R, r и $\psi_{1,2}$ – действительные амплитуды и фазы осцилляторов. Тогда из (5) находим

$$\begin{aligned} 2\frac{dR}{dt} &= R(1 - 2\varepsilon^2) - R^3 + \varepsilon R^2 \cos 3\psi_1 + \mu(r \cos(\psi_2 - \psi_1) - R), \\ 2\frac{dr}{dt} &= r - r^3 + \mu(R \cos(\psi_1 - \psi_2) - r), \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -\bar{\Omega} - \frac{\Delta}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon R \sin 3\psi_1 + \frac{r}{2R}\mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\bar{\Omega} + \frac{\Delta}{4} + \frac{R}{2r}\mu \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\varepsilon = A/2 = B/16$ – нормированная амплитуда внешнего сигнала.

Получим теперь независимые уравнения для фаз осцилляторов. Для этого из (6) получаем оценку для орбит осцилляторов $R \approx \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}$ и $r \approx 1$. Подставим эти соотношения в фазовые уравнения (6)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\bar{\Omega} - \frac{\Delta}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1 - 2\varepsilon^2} \sin 3\psi_1 + \frac{\mu}{2\sqrt{1 - 2\varepsilon^2}} \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\bar{\Omega} + \frac{\Delta}{4} + \frac{\mu\sqrt{1 - 2\varepsilon^2}}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Это и есть искомые фазовые уравнения.

Если осцилляторы не связаны, то имеем традиционную постановку задачи о возбуждении единственного осциллятора. Полагая $\mu = 0$, из (7) в этом случае находим для фазы первого осциллятора соотношение, точно совпадающее с [9]

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\bar{\Omega} - \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1-2\varepsilon^2}\sin 3\psi_1. \quad (8)$$

Для состояния равновесия условие обращения синуса в ± 1 в соотношении (8) дает границы области синхронизации $\bar{\Omega} = \pm(\varepsilon/2)\sqrt{1-2\varepsilon^2}$, которая представляет собой язык, занимающий конечный диапазон частот и имеющий характерную «округлую» вершину в точке $\bar{\Omega} = 0$, $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ [2,9].

3. Резонанс 1:3. Область полной синхронизации

Найдем теперь границы области полной синхронизации для двух возбуждаемых осцилляторов. Из (7) для состояний равновесия можно получить

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} + \frac{\Delta}{4} + \frac{\bar{\Omega} - (\Delta/4)}{1-2\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1-2\varepsilon^2}\sin 3\psi_1 &= 0, \\ \bar{\Omega} - \frac{\Delta}{4} - \frac{\mu\sqrt{1-2\varepsilon^2}}{2}\sin(\psi_1 - \psi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда, как условия обращения синусов в ± 1 , получаем уравнения границ области точного захвата фаз

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \frac{\Delta}{4} \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \pm \frac{\varepsilon}{2} \frac{(1-2\varepsilon^2)^{3/2}}{1-\varepsilon^2}, \\ \bar{\Omega} &= \frac{\Delta}{4} \pm \frac{\mu}{2}\sqrt{1-2\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Первое из условий (10) задает на плоскости $(\bar{\Omega}, \varepsilon)$ замкнутый язык, показанный на рис. 2. Он устроен следующим образом. Центральная линия дается соотношением $\bar{\Omega} = \Delta/4(\varepsilon^2/(1-\varepsilon^2))$. Вдоль нее язык сначала расширяется, а затем сужается, так что обе его границы сходятся в точке $\bar{\Omega} = \Delta/4$, $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$, которая отвечает вершине языка.

Второе условие (10) определяет ширину полосы захвата. При малых амплитудах сигнала $\bar{\Omega} = \Delta/4 \pm \mu/2$, как и в случае резонанса 1:1. Однако с ростом амплитуды ширина полосы уменьшается и стремится к нулю в той же точке, где расположена вершина языка.

Область, образованная этими линиями, и отвечает полной синхронизации.

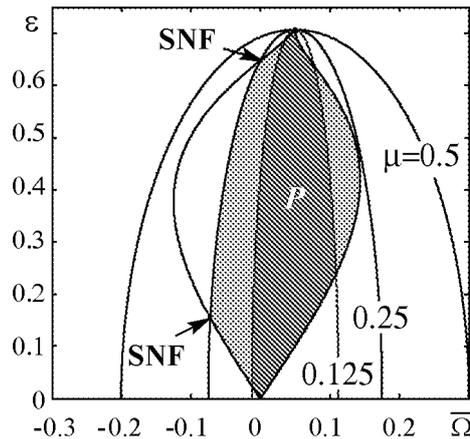


Рис. 2. Область полной синхронизации для резонанса 1:3 и ее границы (10). Обозначения аналогичны рис. 1. Значения параметра связи $\mu = 0.125, 0.25, 0.5$; параметр $\Delta = 0.2$

На рис. 2 показаны три варианта взаимного расположения линий (10), отвечающие возрастающему уровню связи. При небольшой связи $\mu = 0.125$ имеются четыре точки пересечения линий (10). При увеличении связи полоса захвата расширяется, и две правые точки сливаются и исчезают. При еще большем увеличении уровня связи сливаются и две левые точки. Теперь весь язык при $\mu = 0.5$ на рис. 2 целиком лежит внутри полосы захвата.

Таким образом, картина в ряде моментов существенно отличается от случая основного резонанса 1:1. Для него с ростом величины связи полоса точного захвата в соответствии с рис. 1 расширяется, но точки SNF существуют всегда. Для резонанса 1:3 с ростом связи точки SNF сливаются и исчезают, а значит, исчезают и ассоциирующиеся с ними области трехчастотной квазипериодичности.

4. Резонанс 1:3. Устройство областей квазипериодических режимов

Обратимся теперь к полученной численно карте ляпуновских показателей системы (7) на плоскости $(\bar{\Omega}, \varepsilon)$ (рис. 3). Для рис. 3, *a* значения параметров отвечают малому уровню связи $\mu = 0.125$, а для рис. 3, *б* – случаю $\mu = 0.25$. Примеры фазовых портретов в некоторых избранных точках, обозначенных буквами на рис. 3, *a*, даны на рис. 4 (обозначение фрагментов отвечает рис.3, *a*).

Прежде всего, отмечаем наличие области полной синхронизации, форма которой отвечает рис. 2. Соответствующий фазовый портрет дан на рис. 4, *a*. В этом случае имеется три устойчивых состояния равновесия *P*, что отвечает порядку рассматриваемого резонанса 1:3. Кроме того, имеется три неустойчивых равновесия и шесть седел.

Если уменьшить частоту воздействия, то на плоскости параметров попадаем в точку «*б*». При таком переходе устойчивые равновесия сливаются с тремя седлами, а неустойчивые – с тремя другим седлами, в результате чего возникают три устойчивые *I* и три неустойчивые инвариантные кривые. Устойчивые кривые отвечают возникновению частичного захвата первого осциллятора внешней силой, когда фаза ψ_1 осциллирует около некоторых равновесных значений. Бифуркационный механизм возникновения такой синхронизации аналогичен случаю основного резонан-

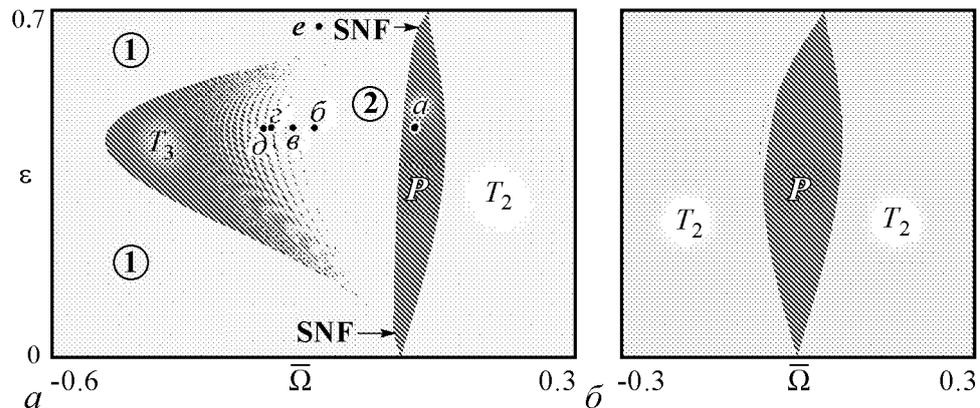


Рис. 3. Карта ляпуновских показателей для фазовой модели, описывающей резонанс 1:3, случай захвата автономных осцилляторов $\Delta = 0.2$; $\mu = 0.125$ (*a*), $\mu = 0.25$ (*б*). Оттенки соответствуют рис. 1

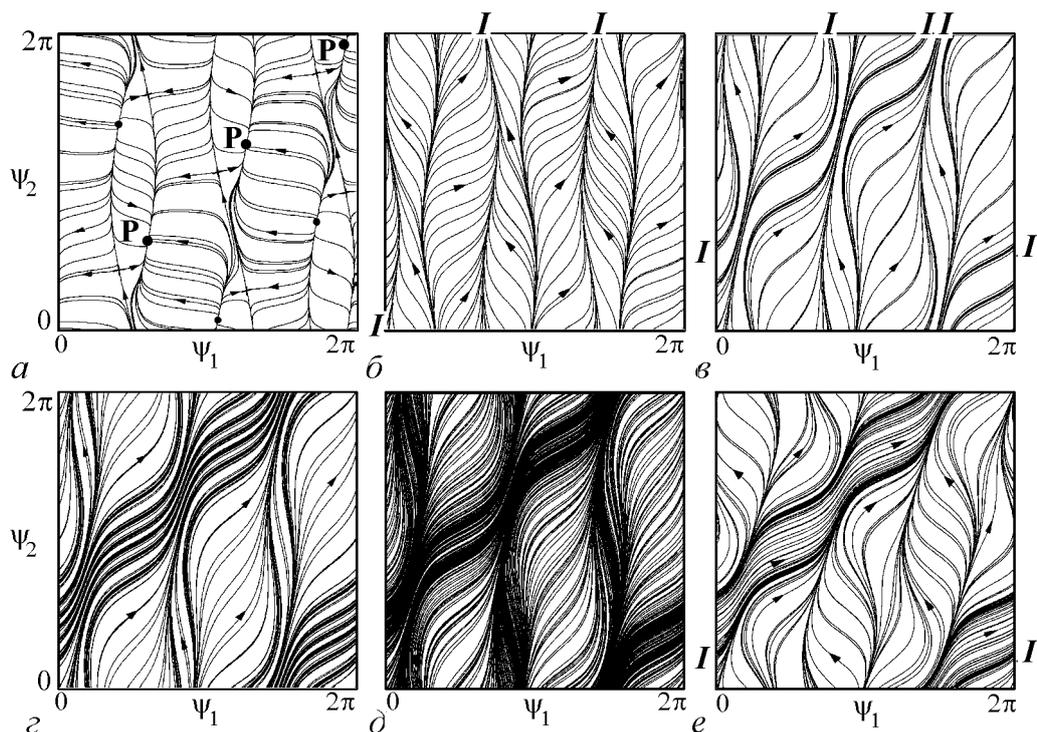


Рис. 4. Фазовые портреты системы (7) в избранных точках, буквы отвечают рис. 3 (P – устойчивые равновесия, I – устойчивые инвариантные кривые); $\Delta = 0.2$, $\mu = 0.125$; $\bar{\Omega} = 0.05$, $\varepsilon = 0.4$ (a); $\bar{\Omega} = -0.16$, $\varepsilon = 0.4$ (б); $\bar{\Omega} = -0.18$, $\varepsilon = 0.4$ (в); $\bar{\Omega} = -0.22$, $\varepsilon = 0.4$ (г); $\bar{\Omega} = -0.23$, $\varepsilon = 0.4$ (д); $\bar{\Omega} = -0.1$, $\varepsilon = 0.65$ (e)

са [10,11], отличие состоит лишь в увеличении в три раза числа равновесий и числа ветвей инвариантных кривых.

Если продолжать уменьшать частоту воздействия, то попадаем в область, где чередуются трехчастотные и двухчастотные режимы. Примеры таких режимов даны на рис. 4, в–д. Можно видеть, что при этом последовательно возрастает число пересечений устойчивой инвариантной кривой I со сторонами фазового квадрата, что отвечает резонансным двухчастотным режимам разного порядка. В свою очередь, трехчастотный режим дает поток фазовых траекторий и представлен на рис. 4, д.

Увеличим теперь амплитуду воздействия и выйдем за пределы трехчастотной области – точка «e». В этом случае возникает простая устойчивая инвариантная кривая I, имеющая по единственному пересечению с горизонтальной и вертикальной границами фазового квадрата. При этом обе фазы неограниченно нарастают, и инвариантная кривая уже не состоит из трех ветвей. Этот режим отвечает захвату относительных фаз осцилляторов. Такая область отмечена цифрой 1 на карте.

Область трехчастотных режимов на рис. 3, a имеет два узких языка, вытянутых к точкам SNF, которые наблюдаются при большой и малой амплитудах сигнала. Система языков резонансных двухчастотных режимов является общей для двух точек SNF, так что возникают характерные структуры резонансных полос серповидной формы. При этом область 2, отвечающая захвату первого осциллятора внешней силой, образует остров внутри трехчастотной области, и теперь ограничена как по амплитуде, так и по частоте. В свою очередь, область взаимного захвата осцилляторов 1 (захвата относительной фазы) занимает область как малых, так и больших амплитуд. Этого не было в случае резонанса 1:1, сравните рис. 3, a и рис. 1.

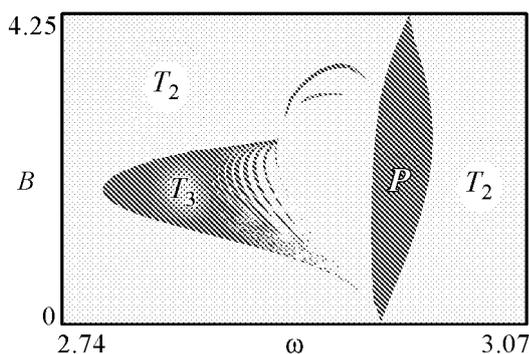


Рис. 5. Карта ляпуновских показателей для исходной системы (1), $\lambda = 0.1$, $\Delta = 0.02$, $\mu = 0.0125$

При возрастании уровня связи, как показано на рис. 3, б, исчезает и низкочастотная трехчастотная области.

Таким образом, картина режимов для резонанса 1:3 имеет достаточно много отличий от случая основного резонанса 1:1. В первую очередь это относится к быстрому исчезновению областей трехчастотных режимов с возрастанием уровня связи.

Пока мы обсуждали только фазовую модель. Обратимся теперь к исходной системе (1). На рис. 5 показана карта ляпуновских показателей системы (1) при значении управляющего параметра $\lambda = 0.1$. Значения остальных параметров по сравнению с рис. 3, а пересчитаны с учетом правил нормировки на величину λ . Сравнивая рис. 5 и рис. 3, а, можно видеть, что форма основного резонанса в рамках фазовой модели передана правильно. Подтверждается и тот факт, что область трехчастотных торов лежит слева от резонанса, а справа – отсутствует. Наблюдаются и характерные «кольцеобразные» структуры резонансных областей двухчастотных режимов. При этом, однако, устройство этих структур полностью аналогично фазовой модели для области малых амплитуд воздействия. При больших амплитудах наблюдаются некоторые отличия.

Можно ожидать, что исчезновения областей трехчастотной квазипериодичности при возрастании связи будут характерны и для резонансов более высокого порядка, поскольку они занимают ограниченный частотный диапазон. Действительно, в численных экспериментах для параметров $\lambda = 0.1$, $\Delta = 0.02$, $\mu = 0.0125$, отвечающих рис. 5, области трехчастотной квазипериодичности для других субгармонических резонансов не выявляются.

Заключение

В задаче о возбуждении двух осцилляторов ван дер Поля внешним сигналом особенности основного резонанса 1:1 определяются его уникальным устройством в рамках фазовой модели: он неограничен по частоте. Резонанс 1:3 имеет конечный размер по частоте, и при надлежащем выборе связи трехчастотные режимы исчезают. Такой же эффект характерен для других субгармонических резонансов. При уменьшении уровня связи трехчастотные области имеют вид характерных «кольцевых» структур. При этом захват относительной фазы осцилляторов возможен в области не только малых, но и больших амплитуд воздействия.

Работа поддержана грантом РФФИ № 12-02-00342.

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
3. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. Учебник-монография. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2009. 312 с.
4. Mettin R., Parlitz U., Lauterborn W. Bifurcation structure of the driven van der Pol oscillator // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6. P. 1529.
5. Noris J. The closing of Arnold tongues for periodically forced limit cycle// Non-linearity. 1993. Vol. 6. P. 1093.
6. Ван Д., Лу Ч., Чоу Ш.-К. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М: МЦНМО, 2005. 416 с.
7. Vance W., Ross J. A detailed study of forced chemical oscillator: Arnold tongues and bifurcation sets // J. Chem. Phys. 1989. Vol. 91, № 12. P. 7654.
8. Farjas J., Herrero R., Orriols F. Experimental analysis of codimensional-2 bifurcations in a periodically-forced opto-thermal oscillator // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 38, № 7. P. 1413.
9. Кузнецов А.П., Милованов С.В. Субгармонический резонанс в уравнении ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 3. С. 74.
10. Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
11. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
12. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, вып. 10. С. 73.
13. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 4. С. 17.
14. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля// Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 3. С. 411.
15. Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R.S. Three coupled oscillators: Mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // Physica D. 1991. Vol. 49. P. 387.
16. Khibnik A.I., Braiman Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K. Phase model analysis of two lasers with injected field // Physica D. 1998. Vol. 111, № 1-4. P. 295.

Саратовский филиал ИРЭ
им. В.А. Котельникова РАН
Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 26.10.2012

SUBHARMONIC RESONANCE IN A SYSTEM OF TWO DISSIPATIVE COUPLED VAN DER POL OSCILLATORS WITH EXTERNAL FORCE

A. P. Kuznetsov, L. V. Turukina

The problem of the excitation of two coupled oscillators is discussed in the case of the simple subharmonic resonance between the external force and eigen-frequencies of the oscillators. The corresponded phase equation is obtained. We showed that the form of the synchronization tongue and transformation of the region of the two-, three-frequency tori by varying the parameter of the coupling between the oscillators is significantly different from the case of the main resonance. We illustrated the efficiency of the phase model by the comparison of Lyapunov's charts plotted for the case of the original system and for the phase model.

Keywords: Quasi-periodic oscillation, synchronization, bifurcations.



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском госуниверситете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). В настоящее время – старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособия.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru