



*Серия: «След вдохновений и трудов упорных...»
Приложение к журналу «Изв. вузов. ПНД»*

ФИЗИКА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Учебно-научное издание

Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Станкевич Н. В., Тюрюкина Л. В.

© Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В., 2013
Саратов: Издательский центр «Наука», 2013. 252 с.
ISBN 978-5-9999-1653-2

Квазипериодические колебания занимают «промежуточное» положение между регулярными и хаотическими колебаниями. Они весьма распространены в природе и технике. В книге обсуждаются проблемы многочастотных квазипериодических колебаний в низкоразмерных ансамблях осцилляторов и автономных системах. Такой подход позволяет рассматривать поэтапное возникновение инвариантных торов все более высокой размерности. Обсуждаются такие вопросы, как устройство областей полной (глобальной) синхронизации, классификация квазипериодических режимов, особенности квазипериодических бифуркаций, возможность реализации сценария Ландау–Хопфа и т.д. Изложение ведется с физических позиций, так что выбираются физически обоснованные модели, для которых проводится комплексное рассмотрение, включающее поиск бифуркаций, иллюстрации в виде карт ляпуновских показателей и др. Будет полезна студентам, аспирантам и преподавателям, как пособие в области нелинейной динамики и теории синхронизации.

Рекомендуют к печати: член-корр. РАН, д.ф.-м.н, профессор Трубецков Д.И., д.ф.-м.н., профессор Кузнецов С.П., базовая кафедра динамических систем Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Использованы материалы, полученные при выполнении проектов РФФИ 11-02-91334-ННИО, 12-02-00342 и 12-02-31465.

Оглавление

Предисловие

От авторов

Введение. Квазипериодические колебания и их простейшие свойства

1. Квазипериодические колебания. Определения и простейшие характеристики
2. Представление о многочастотных квазипериодических колебаниях

3. Квазипериодические бифуркации
4. Спектр ляпуновских показателей и метод ляпуновских карт
5. Ансамбли взаимодействующих осцилляторов. Уравнения Ландау–Стюарта и фазовые модели
6. Эффект «гибели колебаний» и широкополосная синхронизация
7. Резонансная паутина Арнольда
8. Геометрия связей
9. Сценарии Ландау–Хопфа и Рюэля–Такенса
10. Генераторы квазипериодических колебаний и автономные системы с бифуркацией Неймарка–Сакера
11. Физические системы с многочастотной динамикой

Часть I. Взаимная синхронизация фазовых осцилляторов

- 1.1. Три диссипативно связанных осциллятора. Фазовая модель. 1.1.1. Фазовые уравнения. 1.1.2. Простейшие типы колебаний трех связанных фазовых осцилляторов. 1.1.3. Условия полного захвата трех фазовых осцилляторов. Бифуркации, отвечающие за разрушение полной синхронизации. 1.1.4. Карта режимов трех фазовых осцилляторов. Плоскость частотная расстройка – величина связи. 1.1.5. Квазипериодическая седло-узловая бифуркация в фазовой модели. 1.1.6. Дерево синхронизации и кластеризация. 1.1.7. Классификация инвариантных кривых. 1.1.8. Карта торов системы трех связанных фазовых осцилляторов. 1.1.9. Точка «saddle node fan». 1.1.10. Точка «accumulation of saddle node fans». 1.1.11. Плоскость собственных частот осцилляторов.
- 1.2. Четыре диссипативно связанных осциллятора. Фазовая модель. 1.2.1. Фазовые уравнения четырех диссипативно связанных осцилляторов. 1.2.2. Режим полной синхронизации четырех связанных осцилляторов. 1.2.3. Карта режимов четырех фазовых осцилляторов и типичные фазовые портреты. 1.2.4. Дерево синхронизации, кластеризация и резонансные квазипериодические режимы разной размерности. 1.2.5. Механизмы разрушения полной синхронизации и квазипериодичности разной размерности. 1.2.6. Двухпараметрическая картина разрушения полной синхронизации. 1.2.7. Двухпараметрическая картина разрушения двухчастотной и трехчастотной квазипериодичности. 1.2.8. Устройство пространства собственных частот. 1.2.9. Обобщение на случай большего числа осцилляторов.
- 1.3. Реактивно связанные фазовые осцилляторы. 1.3.1. Фазовые уравнения трех реактивно связанных осцилляторов. 1.3.2. Устройство пространства собственных частот трех реактивно связанных осцилляторов. 1.4. Влияние геометрии связи: сеть из фазовых осцилляторов. Случаи диссипативной и активной связи. 1.5. Физические системы.

Часть II. Взаимная синхронизация в ансамблях осцилляторов

- 2.1. Три диссипативно связанных осциллятора Ван-дер-Поля. 2.1.1. Случай малого управляющего параметра. 2.1.2. Случай большого управляющего параметра. 2.1.3. Плоскость частотных расстройек.
- 2.2. Четыре диссипативно связанных осциллятора Ван-дер-Поля. 2.2.1. Эффект повышения порога области «гибели колебаний». 2.2.2. Квазипериодические бифуркации. 2.2.3. Сравнение с фазовой моделью.
- 2.3. Сценарий Ландау–Хопфа в ансамбле осцилляторов.
- 2.4. Реактивно связанные осцилляторы Ван-дер-Поля.
- 2.5. Влияние характера нелинейности.

Часть III. Вынужденная синхронизация фазовых систем и ансамблей осцилляторов

- 3.1. Фазовые уравнения возбуждаемой системы двух диссипативно связанных осцилляторов.
- 3.2. Полная синхронизация двух осцилляторов внешней силой.
- 3.3. Устройство плоскости параметров частота–амплитуда воздействия. 3.3.1. Случай захвата автономных осцилляторов. 3.3.2. Случай биений автономных осцилляторов.
- 3.4. Два возбуждаемых осциллятора Ван-дер-Поля. 3.4.1. Фазовые портреты и динамика фазы в исходной системе. 3.4.2. Двухчастотные и трехчастотные тора и Фурье-спектры. 3.4.3. Режим захвата автономных осцилляторов. 3.4.4. Механизмы синхронизации и ее разрушения. 3.4.5. Режим биений автономных осцилляторов. 3.4.6. Резонанс на гармониках внешней силы.
- 3.5. Система трех возбуждаемых диссипативно связанных фазовых осцилляторов.
- 3.6. Возбуждение двух осцилляторов с реактивной связью.
- 3.7. Случаи индивидуального и коллективного возбуждения.
- 3.8. Случай модуляции частоты осциллятора.

Часть IV. Автономные квазипериодические колебания и их синхронизация

- 4.1. Автономные генераторы квазипериодических колебаний. 4.1.1. Схема Чуа. 4.1.2. Система Лоренц-84. 4.1.3. Квазипериодический генератор Анищенко–Астахова и бифуркация удвоения двумерного тора.
- 4.2. Генератор Кузнецова–Кузнецова–Станкевич.
- 4.3. Синхронизация квазипериодического генератора внешним сигналом.
- 4.4. Связанные квазипериодические генераторы.

Библиографический список

Исследования трех и четырех осцилляторов, связанных каждый с каждым, дают достаточно сложную, практически неисчерпаемую картину. *А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртц*, «Синхронизация – фундаментальное нелинейное явление». М.: Техносфера, 2003

Предисловие

Наряду с периодическими и хаотическими движениями в нелинейных системах как консервативных, так и диссипативных, встречаются квазипериодические колебания, когда возврат системы к исходному состоянию с некоторой точностью происходит регулярно, но с периодом, увеличивающимся при повышении требуемой точности. Квазипериодические колебания можно мыслить как наложение двух или более колебательных составляющих, частоты которых находятся в иррациональном отношении, и они характеризуются дискретным спектром Фурье. В диссипативных динамических системах образом квазипериодических колебаний в пространстве состояний служат аттракторы в виде торов размерности два или выше, в зависимости от числа участвующих в динамике колебательных составляющих с несоизмеримыми частотами.

Квазипериодические колебания встречаются во многих областях науки и техники. Их исследование имеет долгую историю, кстати сказать, намного более дол-

гую, чем, скажем, у такого популярного предмета, как динамический хаос. В этой связи можно вспомнить о задачах небесной механики, таких как анализ движения планет Солнечной системы. Многочастотные колебания естественным образом возникают в приложениях, связанных с радиотехникой, электроникой, а также лазерной физикой и нелинейной оптикой.

Имеется ряд глубоких, хотя проработанных в разной степени, идей и представлений, связанных с квазипериодическими колебаниями. Например, фундаментальное значение имеет теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ), содержание которой на физическом языке состоит в установлении возможности квазипериодической динамики в системе слабо взаимодействующих нелинейных осцилляторов. Другая фундаментальная идея, вовлекающая квазипериодические колебания – это выдвинутый в свое время Ландау и Хопфом сценарий возникновения гидродинамической турбулентности, подразумевающий последовательное рождение новых колебательных составляющих с несоизмеримыми частотами при увеличении параметра, отвечающего за степень неравновесности системы (число Рейнольдса). Можно вспомнить и о знаменитой проблеме Ферми–Паста–Улама, когда при одной из первых попыток численного моделирования динамики многомерной нелинейной механической системы авторы неожиданно столкнулись с возникновением квазипериодических колебаний вместо предполагавшегося установления равновесного состояния в соответствии с представлениями статистической физики.

К проблеме квазипериодических колебаний примыкает круг вопросов, связанных с синхронизацией. Речь может идти о синхронизации колебаний в системе при воздействии на нее внешней силы или о внутренней синхронизации колебательных составляющих, вовлеченных в квазипериодическую динамику, при изменении каких-либо параметров системы.

Математическое исследование квазипериодических колебаний оказалось очень сложной проблемой, требующей кропотливого и нетривиального анализа с привлечение новых подходов. Хотя на этом пути достигнуты важные результаты (например, намечены контуры теории бифуркаций квазипериодических движений), до построения сколько-нибудь полной математической теории, как предоставляется, еще достаточно далеко.

В такой ситуации заслуживает внимания подход, развиваемый авторами данной книги. В его основе лежит несколько ключевых моментов, позволяющих существенно образом продвинуться в построении и понимании картины феноменов, сопровождающих существование и эволюцию квазипериодических режимов в нелинейных системах.

Во-первых, это принципиальное выдвигание на первое место конкретных физически мотивированных и допускающих физическую реализацию модельных систем, конструируемых целенаправленным образом и подвергаемых аналитическому и численному исследованию.

Во-вторых, это методология исследования, опирающаяся на построение и интерпретацию карт динамических режимов на плоскости параметров, получаемых путем сканирования (перебора параметров) и анализа типа динамики в каждой точке. (Разновидностями таких карт являются карты показателя Ляпунова и карты чисел вращения на торе фаз осцилляторов.) Если классический бифуркационный анализ можно сравнить с кропотливой работой топографов, составляющих карту, проходя складки местности, дорожки и овраги, то построение карты режимов – это вид той

же местности с птичьего полета, когда мы, возможно, теряем какие-то детали, но зато сразу получаем общее представление о присутствии и взаимном расположении различных объектов.

В-третьих, это привлечение аналитических подходов описания в рамках методов медленных амплитуд и фазовой динамики. При этом авторы смотрят на них не только как на способ приближенного описания, но и как на способ построения специального класса моделей, заслуживающих изучения с точки зрения качественного поведения в зависимости от параметров, с последующим сопоставлением наблюдаемых феноменов с теми, что имеют место в исходных системах.

В книге собран обширный материал, существенно обогащающий наши представления о поведении нелинейных систем, способных демонстрировать квазипериодические колебания и другие феномены сложной динамики. Книга прекрасно иллюстрирована, многие картинки представляются достойными занять место классических иллюстраций в курсах теории колебаний и нелинейной динамики. Авторы придерживаются достаточно популярного стиля изложения, что делает книгу доступной для широкого круга читателей, знакомых с основами теории колебаний, в том числе для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Книга выходит в рамках серии, выпускаемой, как приложение к известному российскому научному журналу «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика». Это естественно и логично, поскольку она близка по стилю к этому журналу. Кроме того, надо отметить, что значительная часть представленных в книге результатов впервые опубликована именно на его страницах.

Кузнецов С.П., доктор физико-математических наук, профессор, член редакционной коллегии журнала «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика»