

**ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ***В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова*

ISBN 978-5-292-03977-8

Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 322 с.: ил.

© Анищенко В.С, Вадивасова Т.Е., 2010

© Саратовский государственный университет, 2010

В лекционном курсе по фундаментальным аспектам нелинейной динамики детерминированных и стохастических систем излагаются основы теории динамических систем, теории устойчивости и бифуркаций, теории фракталов и размерности; анализируются основные нелинейные эффекты, такие как генерация регулярных и хаотических колебаний и синхронизация; обсуждаются проблемы флуктуаций в нелинейных системах, включая влияние шумов на автогенераторы регулярных и хаотических колебаний, стохастический резонанс и стохастическую синхронизацию.

Для магистров, аспирантов и молодых ученых в области радиофизики, статистической радиофизики, теории колебаний и волн, а также для студентов естественно-научных специальностей классических университетов.

*Рекомендовано УМО РАО по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям: (013800) – «Радиофизика и электроника», (010400) – «Физика» (Протокол № 239 от 20 октября 2009 г.)*

**Оглавление****Предисловие****Лекция 1. Динамические системы**

- 1.1. Введение.
- 1.2. Динамическая система и ее математическая модель.
- 1.3. Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений.
- 1.4. Определение динамической системы, классификация.
- 1.5. Колебательные системы и их свойства.
- 1.6. Фазовые портреты типовых колебательных систем.
- 1.7. Автоколебательные системы.
- 1.8. Регулярные и хаотические аттракторы.
- 1.9. Системы с дискретным временем. Отображения последования.
- 1.10. Заключение.

## **Лекция 2. Устойчивость динамических систем. Линейное приближение**

2.1. Введение. 2.2. Определение устойчивости. 2.3. Линейный анализ устойчивости. 2.4. Устойчивость фазовых траекторий в системах с дискретным временем. 2.5. Заключение.

## **Лекция 3. Бифуркации динамических систем**

3.1. Введение. 3.2. Бифуркация «двукратное равновесие». 3.3. «Мягкие» и «жесткие» бифуркации. Катастрофы. 3.4. Бифуркация «трехкратное равновесие». 3.5. Бифуркация Андронова–Хопфа. 3.6. Бифуркации предельных циклов. 3.7. Нелокальные бифуркации. Гомоклинические траектории и структуры. 3.8. Заключение.

## **Лекция 4. Динамические системы с одной степенью свободы**

4.1. Введение. 4.2. Предельные множества и аттракторы на фазовой плоскости. Предельный цикл Андронова–Пуанкаре. 4.3. Структурная устойчивость систем на фазовой плоскости. Системы Андронова–Понтрягина. 4.4. Генераторы с одной степенью свободы. 4.5. Анализ уравнения Ван дер Поля. Возникновение автоколебаний. 4.6. Генератор с жестким возбуждением автоколебаний. 4.7. Заключение.

## **Лекция 5. Системы с размерностью фазового пространства $N > 3$ . Детерминированный хаос**

5.1. Введение. 5.2. Детерминированность. 5.3. Хаос. 5.4. Устойчивость и неустойчивость. 5.5. Нелинейность. 5.6. Неустойчивость и нелинейное ограничение. 5.7. Детерминированный хаос. 5.8. Перемешивание. 5.9. Вероятностные свойства детерминированных систем. 5.10. Детерминированный хаос – математическая экзотика или типичное свойство материального мира? 5.11. Странные хаотические аттракторы. 5.12. Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы. 5.13. Заключение.

## **Лекция 6. От порядка к хаосу: бифуркационные сценарии (часть I)**

6.1. Введение. 6.2. Переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Универсальность Фейгенбаума. 6.3. Жесткие переходы к хаосу. Кризис и перемежаемость.

## **Лекция 7. От порядка к хаосу: бифуркационные сценарии (часть II)**

7.1. Переход к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний. 7.2. Переход к хаосу через разрушение эргодического тора. Странные нехаотические аттракторы. 7.3. Заключение.

## **Лекция 8. Грубые и негрубые динамические системы. Классификация типов аттракторов**

8.1. Введение. 8.2. Гомоклинические и гетероклинические кривые. 8.3. Структурно-устойчивые системы в  $RN, N > 3$ . Свойство гиперболичности. 8.4. Структурно-неустойчивые динамические системы. 8.5. Квазигиперболические аттракторы. Аттракторы типа Лоренца. 8.6. Квазиаттракторы и их свойства. 8.7. Заключение.

## **Лекция 9. Фракталы в нелинейной динамике**

9.1. Введение. 9.2. Понятие фрактала. Классические примеры фрактальных множеств. 9.3. Природа фрактальности в ДС. 9.4. Фрактальные размерности множеств. 9.5. Соотношение между различными размерностями. 9.6. Заключение.

**Лекция 10. Генератор хаотических автоколебаний Анищенко–Астахова**

10.1. Введение. 10.2. Генератор Теодорчика. 10.3. Модификация генератора с инерционной нелинейностью. Генератор Анищенко–Астахова. 10.4. Заключение.

**Лекция 11. Генератор квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами**

11.1. Введение. 11.2. Пути реализации двухчастотных колебаний и их свойства. 11.3. Формулировка уравнений генератора. 11.4. Бифуркационная диаграмма генератора квазипериодических колебаний. 11.5. Бифуркация удвоения двумерного тора. 11.6. Заключение.

**Лекция 12. Синхронизация периодических автоколебаний**

12.1. Введение. 12.2. Внешняя синхронизация генератора Ван дер Поля. Укороченные уравнения для амплитуды и фазы. 12.3. Анализ синхронизации в фазовом приближении. 12.4. Бифуркационный анализ системы укороченных уравнений. 12.5. Бифуркационный анализ неавтономного генератора Ван дер Поля. 12.6. Заключение.

**Лекция 13. Синхронизация двухчастотных автоколебаний**

13.1. Введение. 13.2. Воздействие внешней периодической силы на резонансный предельный цикл в системе связанных генераторов. 13.3. Основные бифуркации квазипериодических режимов при синхронизации резонансного предельного цикла. 13.4. Заключение.

**Лекция 14. Синхронизация хаотических колебаний**

14.1. Введение. 14.2. Частотно-фазовая синхронизация хаотических автоколебаний. 14.3. Исследование вынужденной синхронизации генератора спирального хаоса в натурном эксперименте. 14.4. Полная синхронизация взаимодействующих хаотических систем. 14.5. Количественные характеристики степени синхронности хаотических автоколебаний. 14.6. Заключение.

**Лекция 15. Основы теории случайных процессов**

15.1. Введение. 15.2. Основные характеристики случайных процессов. 15.3. Основы теории марковских процессов. 15.4. Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ). 15.5. Заключение.

**Лекция 16. Флуктуации в квазигармонических и хаотических автогенераторах**

16.1. Введение. 16.2. Флуктуации в квазигармоническом генераторе с источником шума. 16.3. Заключение.

**Лекция 17. Влияние шума на эффект синхронизации колебаний**

17.1. Введение. 17.2. Вынужденная синхронизация зашумленных автоколебаний внешней гармонической силой. 17.3. Взаимная синхронизация квазигармонических автогенераторов в присутствии шума. 17.4. Синхронизация хаотических автоколебаний в присутствии шума. 17.5. Синхронизация автоколебаний узкополосным шумом. 17.6. Заключение.

**Лекция 18. Стохастический резонанс**

18.1. Введение. 18.2. Физические основы эффекта стохастического резонанса. 18.3. Характеристики эффекта стохастического резонанса. 18.4. Теория двух

состояний. 18.5. Стохастический резонанс в хаотических системах с сосуществующими аттракторами. 18.6. Физический эксперимент. 18.7. Стохастический резонанс в механорецепторах речного рака. 18.8. Заключение.

### **Лекция 19. Синхронизация стохастических колебаний**

19.1. Введение. 19.2. Внешняя синхронизация процесса переключений в бистабильном осцилляторе под действием шума и периодического сигнала. 19.3. Внешняя стохастическая синхронизация триггера Шмитта. 19.4. Внешняя и взаимная стохастическая синхронизация процессов переключений в хаотических системах. 19.5. Стохастическая синхронизация как индуцированный шумом порядок. 19.6. Заключение.

### **Лекция 20. Реконструкция динамических систем**

20.1. Введение. 20.2. Определение размерности вложения и реконструкция аттрактора. 20.3. Расчет старшего показателя Ляпунова по временному ряду. 20.4. Реконструкция динамической системы. 20.5. Пример реконструкции динамической системы. 20.6. Заключение.

### **Лекция 21. Динамический хаос и диагностика в биологии и медицине**

21.1. Введение. 21.2. Количественные характеристики хаотических сигналов. 21.3. Динамические болезни. 21.4. Моделирование динамики сердечного ритма. 21.5. Синхронизация кардиоритма. 21.6. Степень хаотичности как критерий диагностики. 21.7. Заключение.

### **Список рекомендуемой литературы**

*100-летию Саратовского ордена Трудового  
Красного Знамени государственного универ-  
ситета имени Н.Г. Чернышевского и памя-  
ти основателя кафедры радиофизики СГУ  
профессора Венедикта Ивановича Калинина  
посвящают свой труд авторы*

## **Предисловие**

Вашему вниманию предлагается книга лекций по нелинейной динамике. Нелинейная динамика, предметом исследований которой является анализ сложных эволюционных процессов в принципиально нелинейных системах, сформировалась в качестве научного направления сравнительно недавно, примерно за последние 25-30 лет. Пока не создано четкой программы, тем более стандарта этой дисциплины, которая продолжает интенсивно развиваться. На физико-математических факультетах классических университетов мира ведущие профессора включают вопросы нелинейной динамики в курсы лекций по теории колебаний и волн, теории динамических систем, статистической физики, а также в спецкурсы по теории самоорганизации или синергетике. В то же время в ряде университетов появились самостоятельные курсы лекций по нелинейной динамике. Анализ содержания этих курсов лекций свидетельствует о том, что ряд научных проблем, составляющих базовую основу нелинейной

динамики, входит в программу курсов практически у всех лекторов. К таким проблемам относятся элементы теории динамических систем, теория устойчивости и бифуркаций, механизмы формирования режимов детерминированного хаоса, теория фракталов и размерности. Отличия в содержании курсов лекций в основном касаются уровня строгости изложения указанных разделов и, главным образом, представления прикладных аспектов нелинейной динамики. Вопросы изложения прикладных проблем, как правило, носят индивидуальный характер, что связано с научными задачами, которые решаются профессором, читающим курс лекций.

Внимание читателей предлагается наша версия программы курса лекций по нелинейной динамике, которая не претендует на истину в последней инстанции, но базируется на большом опыте научной и педагогической работы авторов. Содержание программы отражает оглавление и собственно название лекций. В основу книги положены лекции по курсу «Введение в нелинейную динамику», который на протяжении многих лет читается студентам кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ одним из авторов. Материалы лекций существенно переработаны и дополнены. Предлагаемый курс лекций характеризуется рядом особенностей. Содержание и объем представленных лекций удовлетворяют достаточно высокому уровню требований, предъявляемых сегодня к научным работникам в области нелинейной динамики. В связи с этим полный текст лекций ориентирован на магистров, аспирантов и молодых ученых, работающих в данной области. В то же время материалы лекций при определенном сокращении можно использовать для чтения студентам старших курсов естественно-научных специальностей университетов. Вторая особенность книги заключается в том, что помимо проблем нелинейной динамики детерминированных (динамических) систем, лекции включают большой материал по описанию и исследованию динамики нелинейных систем в условиях воздействия внешних флуктуаций. В результате предлагаемый курс лекций служит, по существу, развитием и дополнением содержания классических курсов теории нелинейных колебаний и статистической радиофизики применительно к современным требованиям.

Нелинейная динамика как новое научное направление, связанное с изучением колебательных явлений в принципиально нелинейных системах, сформировалось, как уже упоминалось, совсем недавно. Коллектив кафедры радиофизики и нелинейной динамики в силу ряда благоприятных обстоятельств оказался в числе тех, кто принимал активное участие в создании этого научного направления и внес свой небольшой, но заметный вклад в содержание этой дисциплины. Поэтому третьей особенностью настоящей книги является то, что лекции органически включают ряд научных результатов, полученных сотрудниками и аспирантами кафедры под руководством авторов книги.

Относительно литературы. К лекциям мы прилагаем список рекомендуемой литературы, который содержит наиболее важные монографии и учебники. Подробных ссылок на оригинальные научные статьи в лекциях мы не даем. Однако при необходимости читатель может найти всю информацию, используя подробную библиографию, представленную в рекомендованных учебниках и монографиях.

Пользуемся приятной возможностью выразить глубокую благодарность сотрудникам кафедры, совместные научные результаты которых в той или иной степени использованы нами при написании книги. Среди них особо отметим В.В. Аста-

хова, А.Б. Неймана, Д.Э. Постнова, А.Н. Павлова, М.А. Сафонову, Б.В. Шульгина, Н.Б. Янсон, Г.И. Стрелкову, С.М. Николаева, С.В. Астахова, А.С. Захарову и других. В частности, мы благодарны В.В. Астахову и А.Н. Павлову за материалы, использованные нами при написании лекций 4 и 20, соответственно.

Считаем своим долгом выразить особую благодарность нашим учителям и коллегам, которые привили нам интерес к этой области знания и благодаря общению с которыми в итоге стало возможным написание этой книги. Среди них в первую очередь отметим Ю.Л. Климонтовича, Л.П.Шильникова, М.И. Рабиновича, А. Хибника, В.Н. Белых, В. Эбелинга, Л. Чуа, Л. Шиманского-Гайера, Ф. Мосса и С.П. Кузнецова. Мы выражаем глубокую благодарность Г.И. Стрелковой и С.Ю. Маловой за большой труд по изготовлению электронного макета книги для печати.

Книга посвящается 100-летию юбилею со дня основания Саратовского государственного университета и памяти одного из выдающихся профессоров СГУ, основателя кафедры радиофизики и саратовской радиофизической школы, Калинина Венедикта Ивановича, столетие со дня рождения которого отмечалось в 2008 году.

Мы благодарны руководству СГУ и, в частности, профессору Е.Г. Елиной за проявленный интерес к этой книге и поддержку ее издания.

*В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова*

*Саратов, январь 2010*