

**МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ***Учебное пособие**Н.А. Кудряшов*

ISBN 978-5-7262-0943-2

М.: МИФИ, 2008. 352 с.

© Московский инженерно-физический институт (государственный университет), 2008

Основное внимание в книге уделено методам построения аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений. Для решения задач Коши для уравнений Кортевега–де Вриза и \sin -Гордона представлен метод обратной задачи рассеяния. Для ряда других нелинейных дифференциальных уравнений предложены методы, с помощью которых находятся точные решения.

Для демонстрации методов, представленных в книге, выбраны наиболее популярные нелинейные дифференциальные уравнения: уравнение Кортевега–де Вриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение \sin -Гордона, уравнение Курамото–Сивашинского, уравнение Гинзбурга–Ландау, уравнение нелинейной теплопроводности и хорошо известные системы уравнений: система Лоренца и система Хенона–Хейлеса. Книгу можно рассматривать как справочник по наиболее известным нелинейным дифференциальным уравнениям и методам их решения. В ней дается краткая история открытия известных нелинейных дифференциальных уравнений и предлагается информация о физических процессах, при описании которых они встречаются.

Предназначена для студентов, аспирантов и научных работников интересующихся нелинейными математическими моделями, теорией солитонов и методами построения решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Предисловие**Глава 1. Нелинейные математические модели**

1.1. Уравнение Кортевега–де Вриза для описания волн на воде. 1.2. Иерархия уравнений Кортевега–де Вриза. 1.3. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили. 1.4. Модель для описания возмущений в цепочке одинаковых масс. 1.5. Иерархия модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза. 1.6. Уравнение Буссинеска. 1.7. Фазовая и групповая скорости волн. 1.8. Нелинейное уравнение Шредингера для огибающей волнового пакета. 1.9. Уравнение Гинзбурга–Ландау. 1.10. Уравнение \sin -Гордона для описания дислокаций в твердом теле.

1.11. Нелинейное уравнение переноса и уравнение Бюргерса. 1.12. Уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса для описания волн в вязкоэластичной трубке. 1.13. Уравнение Курамото–Сивашинского для описания волновых процессов. 1.14. Уравнение для описания волн в жидкости с конвекцией. 1.15. Уравнение пятого порядка для описания волн под ледяным покровом. 1.16. Нелинейное уравнение шестого порядка для описания процессов турбулентности. 1.17. Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова. 1.18. Уравнение Бюргерса–Хаксли. 1.19. Уравнения фильтрации газа в пористой среде. 1.20. Нелинейное уравнение теплопроводности. 1.21. Модель Хенона–Хейлеса. 1.22. Система Лоренца.

Глава 2. Элементы группового анализа дифференциальных уравнений

2.1. Однопараметрическая группа преобразований Ли. 2.2. Инварианты. Инфинитезимальный оператор группы преобразований. 2.3. Инвариантные уравнения. 2.4. Групповой анализ дифференциальных уравнений. 2.5. Группы преобразований, допускаемые обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка. 2.6. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группы преобразований. 2.7. Группы преобразований для линейного уравнения теплопроводности. 2.8. Группы преобразований для нелинейного уравнения теплопроводности. 2.9. Группы преобразований для уравнения Кортевега–де Вриза.

Глава 3. Аналитические свойства нелинейных дифференциальных уравнений

3.1. Классификация особых точек функций комплексной переменной. 3.2. неподвижные и подвижные особые точки. 3.3. Уравнения, не имеющие решений, с критическими подвижными особыми точками. 3.4. Определение свойства Пенлеве и уравнения Пенлеве. 3.5. Алгоритм Ковалевской анализа дифференциальных уравнений. 3.6. Локальные представления решений уравнений типа Пенлеве. 3.7. Трансцендентная зависимость решений первого уравнения Пенлеве. 3.8. Преобразования Бэклунда для решений второго уравнения Пенлеве. 3.9. Рациональные и специальные решения второго уравнения Пенлеве. 3.10. Дискретные уравнения Пенлеве. 3.11. Пары Лакса для уравнений Пенлеве. 3.12. Алгоритм Конта–Форди–Пикеринга для анализа уравнений на тест Пенлеве. 3.13. Применение алгоритма Конта–Форди–Пикеринга. 3.14. Преобразование Миуры и пара Лакса для уравнения Кортевега–де Вриза. 3.15. Законы сохранения для уравнения Кортевега–де Вриза. 3.16. Преобразования Бэклунда для уравнения Кортевега–де Вриза. 3.17. Преобразования Бэклунда для уравнения \sin -Гордона. 3.18. Семейство уравнений Кортевега–де Вриза. 3.19. Тест Абловица–Рамани–Сигура для нелинейных уравнений в частных производных. 3.20. Метод Вайса–Табора–Карневейля для анализа нелинейных уравнений. 3.21. Пенлеве-анализ уравнения Бюргерса методом Вайса–Табора–Карневейля. 3.22. Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса. 3.23. Анализ уравнения Кортевега–де Вриза методом Вайса–Табора–Карневейля. 3.24. Построение пары Лакса для уравнения Кортевега–де Вриза методом ВТК.

Глава 4. Методы решения интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных

4.1. Общие, частные и точные решения дифференциальных уравнений. 4.2. Простейшие решения уравнения Кортевега–де Вриза. 4.3. Автомодельные решения уравнения Кортевега–де Вриза. 4.4. Метод обратной задачи рассеяния решения

задачи Коши для уравнения Кортевега–де Вриза. 4.5. Метод Хироты для нахождения солитонных решений уравнения Кортевега–де Вриза. 4.6. Простейшие решения модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза. 4.7. Автомодельные решения модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза. 4.8. Решения уравнения Кортевега–де Вриза пятого порядка в переменных бегущей волны. 4.9. Уединенные волны, описываемые нелинейным уравнением Шредингера и групповой солитон. 4.10. Простейшие решения уравнения \sin -Гордона и топологический солитон. 4.11. Метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши для уравнения \sin -Гордона.

Глава 5. Методы построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений

5.1. Метод укороченного разложения для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. 5.1.1. Точные решения уравнения Шарма–Тассо–Олвера. 5.1.2. Точные решения уравнения Бюргерса–Хаксли. 5.1.3. Точные решения уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса.

5.2. Метод экспоненциальной функций для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. 5.2.1. Точные решения уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова. 5.2.2. Точные решения уравнения Гарднера с учетом диссипации.

5.3. Метод гиперболического тангенса для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. 5.3.1. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка. 5.3.2. Точные решения уравнения Гинзбурга–Ландау.

5.4. Метод простейших уравнений для поиска точных решений. 5.4.1. Уединенные волны, описываемые уравнением Курамото–Сивашинского. 5.4.2. Периодические волны уравнения Курамото–Сивашинского. 5.4.3. Уединенные волны на поверхности жидкости с конвекцией. 5.4.4. Периодические волны на поверхности жидкости с конвекцией.

5.5. Применение многоугольников при построении точных решений. 5.5.1. Точные решения обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского. 5.5.2. Автомодельные решения уравнения Кортевега–де Вриза пятого порядка. 5.5.3. Автомодельные решения модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза пятого порядка. 5.5.4. Уединенные волны нелинейного эволюционного уравнения шестого порядка.

5.6. Аналитические свойства системы уравнений Лоренца. 5.6.1. Тест Пенлеве для системы уравнений Лоренца. 5.6.2. Первые интегралы системы уравнений Лоренца. 5.6.3. Точно решаемые случаи системы Лоренца. 5.6.4. Точные решения системы уравнений Лоренца.

5.7. Аналитические свойства системы уравнений Хенона–Хейлеса. 5.7.1. Тест на свойство Пенлеве для системы уравнений Хенона–Хейлеса. 5.7.2. Точные решения системы уравнений Хенона–Хейлеса.

5.8. Автомодельные решения задач нелинейной теплопроводности. 5.8.1. Автомодельные решения задачи о распространении тепловой волны из мгновенного точечного источника. 5.8.2. Приближенные решения задачи нелинейной теплопроводности при заданной температуре на границе. 5.8.3. Приближенные решения задачи нелинейной теплопроводности при экспоненциальной зависимости температуры от времени на границе. 5.8.4. Автомодельные решения плоской задачи при заданном потоке на границе.

Литература