**ДВЕ ТЫСЯЧИ ПЯТЫЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ***Д.И. Трубецков*

Время – друг великих сочинений  
И смертельный враг плохих.  
Там поймешь, кто гений, кто не гений,  
Где давно не будет нас в живых.

*Александр Кушнер*

Уважаемый читатель! Минул еще один год и Вашему вниманию предлагается опять же, как и в прошлом году<sup>1</sup>, непрочитанная лекция. Она планировалась для прочтения на Международном симпозиуме «Topical Problems of Nonlinear Wave Physics», который проходил на пароходе, следующем по маршруту Санкт-Петербург – Нижний Новгород в августе 2005 года. Правда, фрагменты лекции были прочитаны школьникам и учителям на традиционных «Нелинейных днях в Саратове для молодых» в ноябре 2005 года.

История распорядилась так, что все даты условно можно сгруппировать следующим образом:

- «гидродинамические» даты (прямо-таки для пароходной конференции!);
- «фрактальные» даты;
- даты других важных событий нелинейной динамики.

Сохранен, как отвечающий жанру, эпиграф к прошлогодней лекции. По-прежнему выбор событий и героев, а также число выделенных дат на совести автора. Сохранена и стилистика прошлогодней лекции.

Итак, чем интересен в указанном смысле 2005 год?

<sup>1</sup>Имеется в виду лекция «Две тысячи четвертый год в датах нелинейной динамики», опубликованная в журнале Известия вузов. ПНД, 2005. Т. 13, №1–2. С. 152–167.

## 1. Созвездие гидродинамических дат

- 305 лет со дня рождения швейцарского ученого Даниила Бернулли – автора книги «Гидродинамика, или Изъяснение сил и движений жидкости». Он вывел уравнение стационарного движения идеальной жидкости, носящее его имя. Бернулли предложил дифференциальное уравнение колебаний струны и нашел его решение в виде бегущих волн
- 260 лет назад Леонард Эйлер вывел нелинейные уравнения идеальной жидкости (1745). В этом же году им вслед за Жаном Лероном Д’Аламбером обнаружено явление, состоящее в том, что при протекании идеальной жидкости по трубе постоянного сечения давление не падает и жидкость течет, не испытывая сопротивления. Не должны испытывать сопротивления и тела, движущиеся равномерно и прямолинейно (парадокс Д’Аламбера – Эйлера)
- 220 лет со дня рождения французского инженера и исследователя строительной механики Луи Мари Анри Навье, сформулировавшего в 1822 году дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости (газа)
- 195 лет со дня рождения английского корабельного инженера Уильяма Фруда, с именем которого связывают создание первого бассейна для испытаний моделей судов и начало теории подобия
- 160 лет назад (1845) английский физик и математик Джордж Габриэль Стокс дополнил теорию движения вязкой жидкости (уравнение Навье – Стокса) и разработал теорию вязкости жидкостей
- 155 лет со дня рождения чешского ученого Стру́хала. Известно «число Струхала», учитывающее нестационарные эффекты в жидкости (газе)
- 130 лет со дня рождения немецкого аэрогидродинамика Людвиг Прандтля, создавшего теорию крыла конечного размаха и теорию пограничного слоя
- 100 лет назад английский ученый Осборн Рейнольдс (1842–1912), убедившись, что последние его работы оказались непонятными из-за утраченной им ясности изложения, отстранился от дел и до конца жизни не занимался больше научной работой. Неожиданная дата, но ведь наука – не только драма идей, но часто и драма их создателей
- 40 лет назад переиздана монография Льюиса Фрая Ричардсона (1881–1953) «Weather prediction by numerical process» Dover, 1965 (первое издание Cambridge University Press, 1922), в которой приведены его знаменитые строки о турбулентности:

Big whirls make little whirls  
Which feed on their velocity,  
Little whirls have smaller ones  
And so on into viscosity.

**Даниил Бернулли.** Академик Н.А. Крылов в «Очерке развития теории корабля» (1933) обратил внимание на один любопытный исторический факт. Он писал: «Сколь это ни странно, жители гористой Швейцарии Иоганн Бернулли и его ученик Леонард Эйлер первые начали прилагать «новую математику» к решению вопросов, касающихся корабля».



Во времена, о которых пойдет речь, Петербургская, Парижская и Берлинская академии наук побуждали и даже обязывали своих профессоров писать трактаты на важные для практики темы. Хотя, скажем, каналы строили инженеры-практики, теоретические работы сыграли важную роль в становлении гидродинамики. Все три основоположника теоретической гидродинамики получали прямые задания от академий: француз Д'Аламбер от Парижской, один из «сухопутных швейцарцев» – Даниил Бернулли – от Петербургской, а другой – Леонард Эйлер – от Петербургской и Берлинской.

Даниил Бернулли – выходец из семьи голландского происхождения, многие представители которой стали физиками и математиками. Несомненно, он – самый выдающийся ученый из этой династии и один из самых выдающихся физиков и математиков XVIII века. Не случайно Парижская королевская академия наук десять раз присуждала ему премии за лучшие работы по вопросам математики и физики, а в 1734 году он разделил со своим отцом Иоганном двойную премию той же академии за сочинение «О причинах различного наклона планетарных орбит к солнечному экватору». Вот некоторые основные даты жизни Даниила Бернулли.



Он родился 8 ноября 1700 года. В 1716 году окончил Базельский университет и получил степень магистра философии. По совету отца он стал изучать медицину в Базеле, а затем в Гейдельберге и Страсбурге. В 1721 году Даниил получил степень лиценциата медицины. Большая часть его первой крупной работы (1724) была посвящена задаче истечения жидкости из сосуда. В медицине его интересовали вопросы определения скорости движения крови в кровеносных сосудах, влияние величины кровяного давления на характер этого движения и т.п. Смысл всех этих задач был чисто гидродинамическим.

Его «Гидродинамика, или Изъяснение сил и движений жидкости» – пестрый набор необычных задач, тонких наблюдений, неожиданных открытий и остроумных рассуждений, часто весьма далеко уходящих от темы заглавия: здесь и движение жидкостей в трубах и каналах, истечение жидкостей из отверстий, изменение формы водной поверхности в ускоренно движущихся и вращающихся объемах, колебания жидкостей в сообщающихся сосудах, размышления о замерзании льда и о том, каким требованиям должен удовлетворять идеальный газ, и, разумеется, жемчужина трактата – уравнение Бернулли (к нему мы вернемся).

В 10-й главе «Гидродинамики» Бернулли четко сформулировал основные идеи кинетической теории газов. Увы, они были забыты, и только в XIX веке их заново предложили и развили Клаузиус и Максвелл.

Интересен и взгляд самого Бернулли на книгу «Гидродинамика», сформулированный в кратком предисловии к ней.

«Наконец, выходит в свет наша «Гидродинамика», после того как были преодолены все препятствия, задерживающие ее напечатание в течение почти восьми лет; возможно, что ей и не пришлось бы увидеть света, если бы вся эта работа пришлось исключительно на мою долю. Я охотно объявляю, что главнейшая часть этой работы обязана руководству, замыслам и поддержке со стороны Петербургской Академии наук. Повод для написания этой книги дало постановление Академии, в котором первых профессоров, собравшихся для ее создания, обязали и затем определенно побуждали, чтобы они писали рассуждения на какую-нибудь полезную и, насколько возможно, новую тему. Всякий легко согласится с тем, что теория о силах и движениях жидкостей, если только она не создана против воли Минервы, не является ни бесполезной, ни тривиальной. Для того чтобы рассеять скуку у читателя, я подверг рассмотрению разнообразные вопросы, в особенности в последних пяти частях, а также включил примеры аналитические, физические, механические, как теоретические, так и практические, некоторые геометрические, мореходные, астрономические и иные. Введение таких примеров представляется мне не только допустимым, но прямо вытекающим из существа предпринятой работы... Настоящая моя работа преследует единственную цель: принести пользу Академии, все усилия которой направлены к тому, чтобы содействовать росту и общественной пользе благих наук.»

В 1725–1733 годах Бернулли работал в Петербургской АН, занимаясь сначала физиологией на основе математики, а с 1730 года – возглавляя кафедру чистой математики. В 1733 году он возвратился в Базель, где сначала возглавил кафедру анатомии и ботаники, а с 1750 года – кафедру опытной физики.

Даниил Бернулли умер в возрасте 82 лет, оставив свою кафедру только за пять лет до смерти.

Напомним смысл уравнения Бернулли, которое имеет вид:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const},$$

где  $p$  – давление жидкости,  $\rho$  – ее плотность,  $v$  – скорость движения,  $g$  – ускорение свободного падения и  $h$  – высота, на которой находится элемент жидкости.

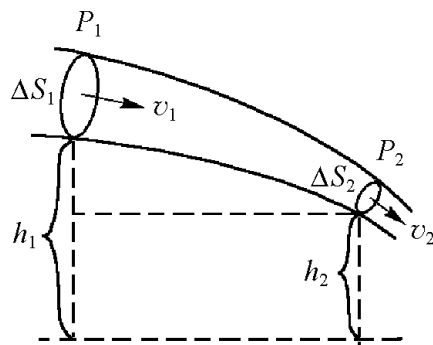


Рис. 1.

Для современного читателя очевидно, что уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии и условие неразрывности течения идеальной жидкости<sup>2</sup>. Предполагается (как и для уравнения неразрывности), что жидкость течет в некоторой трубе, сечение которой изменяется достаточно плавно и картина течения не меняется со временем, то есть течение стационарное. Как видно из рис. 1, за время  $\Delta t$  элемент жидкости массой  $\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t$  спустился с уровня

<sup>2</sup>Для жидкости, текущей в трубе, закон сохранения массы имеет вид уравнения неразрывности:  $vS = \text{const}$ , где  $S$  – площадь сечения трубы, по которой течет жидкость. Иными словами, сколько жидкости вливается в трубу, столько и выливается, если условия течения не изменяются.

$h_1$  на уровень  $h_2$ , а его скорость увеличилась с  $v_1$  до  $v_2$ . Приращение кинетической энергии элемента жидкости

$$\Delta E_{\text{кин}} = \Delta m \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \rho \Delta t (S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3).$$

Изменение потенциальной энергии этого же элемента

$$\Delta E_{\text{пот}} = \Delta m g (h_2 - h_1) = \rho g \Delta t (S_2 v_2 h_2 - S_1 v_1 h_1).$$

Работа сил давления, совершенная над элементом жидкости при его перемещении

$$A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Закон сохранения имеет вид

$$A = \Delta E_{\text{кин}} + \Delta E_{\text{пот}}$$

или после простых преобразований

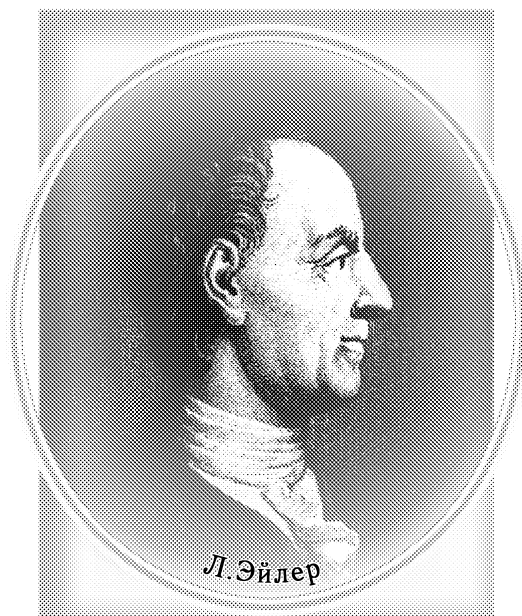
$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const.}$$

Уравнение Бернулли просто объясняет множество явлений, происходящих в жидкости и газе.

Вот одно из коварных проявлений этого уравнения, знакомое капитанам морских и речных судов. Если два корабля идут параллельным курсом слишком близко друг к другу, то возникает гидродинамическая сила, сближающая их, что опасно. Почему возникает эта сила? Из закона неразрывности следует, что относительная скорость воды между судами будет больше, чем снаружи. Тогда давление на корабли в пространстве между ними окажется ниже, чем извне. Этот перепад давления по разные стороны кораблей и создает силу, толкающую их друг к другу.

**Гидродинамика Эйлера и Навье – Стокса. Другие гидродинамические даты.** В 1707 году в швейцарском Базеле в семье пастора родился Леонард Эйлер. Его жизнь пришлось на XVIII век – недолгий временной отрезок Просвещения между эпохами жестокой нетерпимости: за 6 лет до его рождения в Берлине была сожжена последняя ведьма, а через 6 лет после его смерти вспыхнула Великая французская революция. В значительной мере своим начальным образованием он обязан отцу. Высшее образование Эйлер получил в Базельском университете, где познакомился с братьями Николаем и Даниилом Бернулли. Семья Бернулли представляла собой созвездие талантов во главе с Иоганном (отцом Николая и Даниила) и его братом Якобом. Именно благодаря им Базель стал третьим по важности математическим центром Европы после Парижа и Лондона. Помимо математики, которую в университете читал Иоганн Бернулли, Эйлер изучал богословие, восточные языки, физиологию. По приглашению Екатерины I двадцатилетний Эйлер прибыл в Петербург для работы в незадолго до этого учрежденной по указу Петра I Петербургской академии наук, где уже работал Даниил Бернулли. В 26 лет Эйлера избрали российским академиком, а в 1741 году он переехал в Берлин, став членом Берлинской

академии наук. В России завершилось царствование Анны Иоановны и пошла чехарда дворцовых переворотов, а в Берлине молодой король Фридрих II решил создать научный центр не слабее парижского. В Берлине Эйлер провел четверть века, с 1741 по 1766, считая эти годы лучшими в своей жизни. В 1766 году по настоянию Екатерины II он вернулся в Петербург, где и работал до конца жизни. Умер он в 1783 году. Его прах покоится в Петербургском некрополе.



Эйлер был тихим и скромным человеком; он был счастливо женат и имел 13 детей, из которых пять пережили отца. Под конец жизни он ослеп и 16 лет диктовал статьи и книги, работая до самой смерти. Всего им было написано более 800 работ. В 1973 году Швейцарская академия и АН СССР все еще издавали полное собрание его сочинений – более 80 томов.

Дать даже краткий обзор научного наследия Эйлера невозможно. Выделим его работы по математическому анализу, где он придал дифференциальному и интегральному исчислению вид, близкий к современному, решил множество частных задач, создал вариационное исчисление, основал математическую физику в современном смысле слова;

значителен его вклад в алгебру, теорию чисел, геометрию, в астрономию и прикладную механику.

Для нас важно, что с именем Эйлера связаны основные уравнения движения твердого тела и жидкости.

Удивительно ясное изложение современного ему естествознания Эйлер дал в «Письмах некоей германской принцессе<sup>3</sup> о разных физических и философских материях», собранных в трех томах. «Письма» только при жизни Эйлера издавались практически на всех языках Европы более 20 раз. Письма вышли в свет в 1765 году.

Еще раньше, в 1745 году, Эйлер вывел нелинейные уравнения идеальной жидкости, которые, как известно, имеют вид

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{a}_{\text{вн}} \rho, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\vec{v}$  – скорость рассматриваемого объема жидкости,  $p$  – давление (для идеальной жидкости – скаляр),  $\vec{a}_{\text{вн}} \rho$  – плотность внешней заданной силы.

<sup>3</sup>Племяннице Фридриха II.

В это же время им, вслед за Жаном Лероном Д'Аламбером, обнаружено явление, получившее название парадокса Эйлера – Д'Аламбера.

Чтобы напомнить его смысл, рассмотрим следующую задачу. Поток несжимаемой идеальной жидкости с плотностью  $\rho$  обтекает цилиндр. Пусть скорость потока  $v$ , давление вдали от цилиндра равно нулю, а в точке  $A$  на рис. 2 давление равно  $p$ . Необходимо исследовать зависимость  $p$  от  $v$  и найти силу  $F$ , с которой поток действует на цилиндр. Поскольку жидкость является идеальной, то есть совершенно не вязкой, то течение будет ламинарным, и линии тока будут выглядеть как на рисунке.

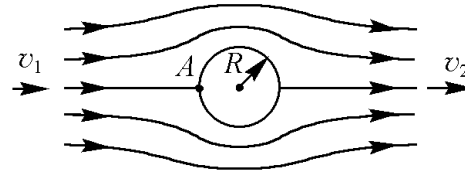


Рис. 2.

Будем искать зависимость  $p = f(\rho, v, R)$  методом размерностей. В системе  $LMT$  матрица размерностей имеет вид:

$$\begin{array}{ccccc} & p & \rho & v & R \\ L & -1 & -3 & 1 & 1 \\ M & 1 & 1 & 0 & 0 \\ T & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array} .$$

Тогда, поскольку  $p = C\rho^\alpha v^\beta R^\gamma$  ( $C$  – неизвестная постоянная), находим, что

$$L^{-1}MT^{-2} = (L^{-3}M)^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma.$$

Откуда

$$\left. \begin{array}{l} -1 = -3\alpha + \beta + \gamma \\ 1 = \alpha \\ -2 = -\beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 0 \end{array}$$

и, следовательно,

$$p = C\rho v^2. \quad (3)$$

Заметим, что в конечном результате нет зависимости от  $R$ . Найдем теперь  $F$ . Очевидно, что

$$LMT^{-2} = (L^{-3}M)^{\alpha_1} (LT^{-1})^{\beta_1} L^{\gamma_1}.$$

и  $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 2$ , то есть

$$F = C_1\rho v^2 R^2. \quad (4)$$

Соотношение (4) верно при любых значениях  $v$ ; естественно предположить, что оно верно и при  $v < 0$ . Поэтому

$$\left. \begin{array}{l} F(-v) = C_1\rho(-v)^2 R^2 \\ F(v) = C_1\rho(v)^2 R^2 \end{array} \right\} \longrightarrow F(v) = F(-v).$$

Но, если  $v < 0$ , то и  $F < 0$ , то есть  $F(-v) = -F(v)$ , что возможно лишь при

$$F(v) = 0. \quad (5)$$



Этот результат и был получен Эйлером из строгой теории. Позднее Д'Аламбер с помощью некоторых ухищрений рассчитал обтекание произвольного тела конечного объема и получил тот же удивительный результат, который противоречил «здравому смыслу». Действительно, для поддержания любого движения к телу необходимо приложить силу тяги для преодоления силы сопротивления (именно поэтому корабли, летательные и подводные аппараты имеют двигатели). Д'Аламбер не смог объяснить полученный результат и с горечью заметил, что нулевое сопротивление – «единственный парадокс, разрешение которого я оставляю геометрии будущего».

Течение, изученное Эйлером и Д'Аламбером, симметрично (см. рис. 2): левая половина течения совпадает с правой. Это означает, что составляющая импульса (она совпадает с направлением невозмущенного потока) струйки жидкости, обтекающей тело, постоянна. Иными словами, она такая же в некотором сечении слева вдали от тела, как и в некотором сечении справа вдали от тела. Согласно закону сохранения импульса, на струйку, как и на помещенное в нее тело, не действует сила сопротивления.

Идеализация математической модели, которую анализировали Эйлер и Д'Аламбер, оказалась избыточной: реальные течения несимметричны, поскольку симметрию нарушает вязкость. Качественно ее влияние легко учесть также в рамках анализа размерностей.

Скорость  $u$  натекающего потока жидкости будем считать постоянной (движения стационарные и не зависят от времени). В жидкости существуют силы трения, возникающие между ее соседними слоями из-за разной скорости их движения. Таковую жидкость, как известно, называют вязкой и характеризуют коэффициентом кинематической вязкости  $\nu [L^2 T^{-1}]$ . Искомой величиной в этом случае будет векторная скорость  $\vec{v}$  течения, которая зависит от пространственных координат, то есть от вектора  $\vec{r}$ . По-прежнему будем говорить о цилиндре радиуса  $R$ . Тогда

$$\vec{v} = f(\vec{r}, \nu, R, u).$$

Будем измерять длины в единицах  $R$ , а скорости в единицах  $u$ , то есть введем безразмерные величины  $\frac{\vec{v}}{u}$  и  $\frac{\vec{r}}{R}$ . Из величин  $R, u, \nu$ , определяющих каждый тип движения жидкости, можно составить всего одну безразмерную комбинацию  $Re = \frac{Ru}{\nu}$  – число Рейнольдса. Тогда можно записать, что

$$\vec{v} = u f_1 \left( \frac{\vec{r}}{R}, Re \right).$$

Из последнего выражения следует, что в двух разных течениях одного типа (например, обтекание цилиндров разного радиуса жидкостями разной вязкости) величины безразмерных скоростей  $\frac{\vec{v}}{u}$  являются одинаковыми функциями от  $\frac{\vec{r}}{R}$  при одинаковых для этих течений числах  $Re$ , то есть  $Re = idem$  – критерий подобия течений. При разных  $Re$  мы имеем разные виды течений. Вязкость ответственна за образование следа за телом.

Но разгадка парадокса Эйлера – Д'Аламбера не в этом. Почему? Потому, что даже при очень больших числах  $Re$ , когда силы вязкости пренебрежимо малы, сила

лобового сопротивления остается конечной. Значит, и в невязкой жидкости может возникнуть асимметрия и ненулевые сопротивления.

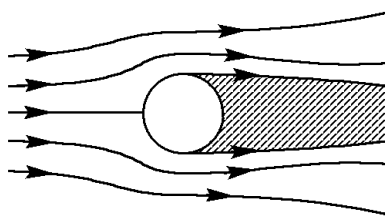


Рис. 3.

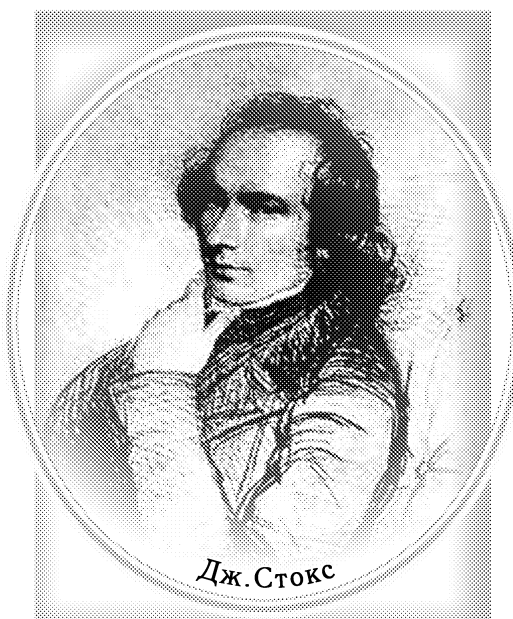
Именно такое сечение «построил» в 1868 году Гельмгольц, снявший последнее покрывало с парадокса. Обтекание цилиндра по модели Гельмгольца показано на рис. 3. За цилиндром образуется область покоящейся жидкости – след, который потом разрушается, превращаясь в турбулентный след.

Дифференциальные уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости (газа) были сформулированы на основе модельных представлений французским инженером и исследователем строительной механики Луи Анри Мари Навье.

Теорию вязкости впоследствии разработал английский физик и математик Джордж Габриэль Стокс<sup>4</sup> (1819–1903). Он дополнил исследования Навье, получив уравнение

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\text{grad } p + \eta \Delta \vec{v} + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad } \text{div } \vec{v}, \quad (6)$$

которое носит название уравнения Навье – Стокса. Здесь  $\eta$  и  $\xi$  – постоянные коэффициенты вязкости, причем  $\xi$  часто называют второй вязкостью. Если жидкость можно считать несжимаемой, то  $\text{div } \vec{v} = 0$ ,



<sup>4</sup>Помимо упомянутых работ в области гидродинамики, Стокс выполнил ряд значительных исследований в математической физике, оптике и спектроскопии.

В 1851 году он вывел формулу, определяющую силу сопротивления, действующую на твердый шар при его падении под действием силы тяжести в вязкой жидкости (закон Стокса).

В области оптики он исследовал абберацию света, кольца Ньютона, интерференцию и поляризацию света, спектры и люминесценцию. В 1852 году установил, что длина волны фотолуминесценции больше длины волны возбуждающего света (правило Стокса). Дал первое теоретическое объяснение происхождения рентгеновских лучей.

Со студенческих лет всем известна теорема Стокса:

$$\oint_C \vec{V} d\vec{r} = \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{V} d\vec{s}$$

– циркуляция поля по кривой  $C$  равна потоку ротации через любую поверхность  $\Sigma$ , ограниченную контуром  $C$ .

и уравнение (6) сильно упрощается, принимая вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (7)$$

Отношение

$$v = \frac{\eta}{\rho} \quad (8)$$

называют кинематической вязкостью, а о самой  $\eta$  говорят как о динамической вязкости. Очевидно, что в пренебрежении вязкостью уравнение (6) совпадает с уравнением (1), когда  $\vec{a}_{\text{вн}} \rho = 0$ .

Интересные рассуждения о важности учета вязкости есть в Фейнмановских лекциях (Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Физика сплошных сред. 7. Москва: Мир, 1966. С. 237). Приведем их.

«...Выбрасывая слагаемое с вязкостью, мы делаем приближение, которое описывает некоторое идеальное вещество, а не реальную воду. Об огромной разнице, возникающей в зависимости от того, оставляем ли мы слагаемое с вязкостью или нет, в свое время хорошо знал Джон фон Нейман. Известно ему было и то, что во времена наибольшего расцвета гидродинамики, то есть примерно до 1900 года, основные усилия были направлены на решение красивых математических задач в рамках именно этого приближения, которое ничего не имеет общего с реальными жидкостями. Поэтому теоретиков, которые занимались подобными веществами, он называл людьми, изучающими «сухую воду». Они отбрасывали важнейшее свойство жидкости. Именно потому, что в этой главе мы при наших вычислениях тоже этим свойством будем пренебрегать, я озаглавил ее «Течение "сухой воды"». А обсуждение настоящей «мокрой» воды мы отложим до следующей главы.»

Вернемся к уравнению (7) и оценим входящие в него слагаемые по порядку величины для стационарного движения

$$\rho (\vec{v} \nabla) \vec{v} \longleftrightarrow \rho \frac{v^2}{L}; \quad \eta \Delta \vec{v} \longleftrightarrow \frac{\eta v}{L^2}; \quad \text{grad } P \longleftrightarrow \frac{P}{L}.$$

Здесь  $L$  – характерный линейный масштаб. Легко заметить, что отношение инерционного (нелинейного) слагаемого к слагаемому, отвечающему за вязкость, дает число Рейнольдса

$$\frac{\rho \frac{v^2}{L}}{\eta \frac{v}{L^2}} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu} = Re.$$

Кстати, этот критерий стали называть числом Рейнольдса в 1919 году, когда немецкий гидродинамик М. Вебер (1871–1951) ввел  $Re$  в научный обиход.

Я умышленно вернулся к числу  $Re$ , поскольку хочу отметить необычную дату, характеризующую Осборна Рейнольдса как человека и ученого.

Молодой инженер-практик Рейнольдс решил, что для успешной работы ему не хватает математических знаний. Для поступления в Кембриджский университет

необходимо было изучить греческий язык, что он сделал и, став студентом, быстро добился успехов в математике. По окончании Кембриджа Рейнольдс получил кафедру физики в Манчестерском университете, где и провел исследования, принесшие ему мировую славу, начатые статьей «Вихревое движение» (1877). Опыты его были наглядны и интересны.

Тонкая струйка красителя, введенная в воду, текущую в стеклянной трубке, быстро вытягивается в длинную резко очерченную, не смешивающуюся с водой полоску, параллельную стенкам трубки. Вода как будто движется концентрическими слоями, как вложенные одна в другую металлические трубки: внутренняя быстрее, примыкающая к ней – чуть медленнее, следующая – еще медленнее. Слоистым – ламинарным – называет Рейнольдс такое течение (от лат. *lamina* – «пластинка»). При увеличении скорости резким скачком замедляется движение подкрашенной струйки. Видно, как беспорядочные завихрения перемешивают краску с водой по всему объему трубки – ламинарное течение потеряло устойчивость, превратилось в вихревое течение, для которого позднее лорд Кельвин придумал великолепное название – турбулентное течение (от лат. *turbulentus* – бурный, беспорядочный).



Рейнольдсу приписывают любопытную аналогию.

«Жидкость, – говорил он своим ученикам, – можно уподобить отряду солдат, ламинарное течение – четкому походному строю, турбулентное – беспорядочному движению. Тогда скорость жидкости и диаметр трубы – это скорость движения и величина отряда. Вязкость – дисциплина, плотность – вооружение. Чем больше отряд, чем быстрее маневры и чем тяжелее вооружение – тем раньше расстраивается походный порядок. И так же в жидкости, турбулентность начинается тем быстрее, чем она тяжелее, чем меньше ее вязкость и больше диаметр и скорость.»

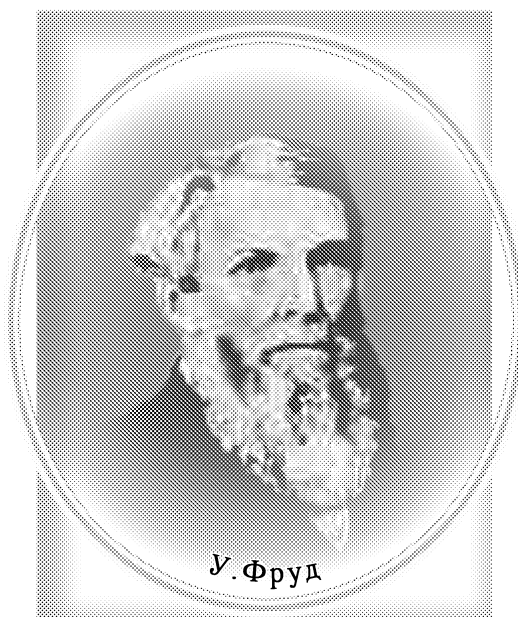
Когда  $Re < 2300$ , течение ламинарное. Если  $Re > 6000$ , то течение всегда турбулентное. В интервале  $Re = 2300-6000$  течение неустойчивое.

В своих работах Рейнольдс исследовал образование града, конденсацию паровоздушной смеси, отслаивание металла с поверхности рельса, построил теорию сопла Лаваля и т.д.

Он мужественно встретил угасание творческой активности. Убедившись, что последние его работы оказались непонятными из-за утраченной им ясности изложения, Рейнольдс в 1905 году в возрасте 63 лет перестал заниматься научной работой.

Именно этот поступок, совершенный 100 лет назад, я и хотел отметить.

С именем английского корабельного инженера Уильяма Фруда (1810–1879) связывают создание первого бассейна для испытаний моделей судов и начало теории подобия.



Середина XIX века. Идет постройка гигантского парохода «Грейт Истерн». В ней оказались связанными в один узел судьбы У. Фруда, создавшего классическую методику модельных испытаний и Скотта Рассела – его постоянного оппонента и принципиального противника моделей...

Инициатором постройки гиганта, главным конструктором и руководителем всего дела был Изамбар Брюнель, – быть может, самый крупный инженер первой половины XIX века, построивший 25 железных дорог, 125 мостов, 8 причалов и сухих доков, двухмильный железнодорожный туннель Бокс, долгое время остававшийся самым длинным туннелем в мире, и три парохода – «Грейт Вестерн», «Грейт Брити» и «Грейт Истерн», каждый из которых

составил эпоху в истории парового океанского судоходства.

Скотт Рассел предложил придать корпусу будущего корабля «гидродинамическую волновую форму», при которой якобы волновое сопротивление получается наименьшим. Брюнель согласился, но его мучали сомнения, поскольку Скотт Рассел, толкуя о наименьшем сопротивлении, не мог ответить на главный для конструктора вопрос: машины какой мощности нужны для того, чтобы сообщить судну заранее заданную скорость. Поэтому одному из своих помощников – Уильяму Фруду – Брюнель поручил всерьез заняться теорией сопротивления судов.

В марте 1872 года вблизи дома Фруда был построен первый в мире опытовый бассейн, который представлял собой крытый легкой деревянной крышей канал длиной 110 м. Шестидесятиметровый измерительный участок имел ширину по уровню воды 11 м и глубину 3 м, с двух сторон к нему примыкали разгонный и тормозной участки шириной 3.4 м и глубиной 0.9 м. Наклонные стенки канала были утрамбованы и покрыты асфальтом. Модели буксировались тележкой с измерительными приборами, которая двигалась по рельсовому пути с помощью паровой лебедки, способной разгонять ее до  $5 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ .

Именно здесь в течение двух лет Фруд производил свои уникальные исследования по сопротивлению трения. Впоследствии один из крупнейших американских гидромехаников Д. Тейлор, оценивая заслуги Фруда, писал: «...работая в опытовом бассейне, грубом и примитивном по сравнению с современными, он разработал методы и количественные коэффициенты, надежно служившие корабельным архитекторам почти пятьдесят лет»<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Более подробно о работах У. Фруда и его сына и преемника Р. Фруда (1846–1942) можно прочитать в интересной книге Германа Смирнова «Рожденные вихрем» (М.: Знание, 1982), из которой мы заимствовали ряд фактов.

Бессмертной заслугой Фруда перед мировым кораблестроением было открытие закона подобия для пересчета данных модели на натуру. Для вывода критерия подобия вновь обратимся к анализу размерностей.

Если влияние силы тяжести на движение существенно, то движение определяется не тремя, как выше, а четырьмя величинами: линейным размером тела  $l$  (в случае цилиндра –  $R$ ),  $v$ ,  $\nu$  и ускорением силы тяжести  $g$ . Из них можно составить две безразмерные комбинации, скажем,  $Re$  и число Фруда

$$F = \frac{v^2}{lg}.$$

Тогда в формуле  $\vec{v} = uf\left(\frac{r}{R}, Re\right)$  функция  $f$  будет зависеть и от  $Re$ , и от  $F$ , а течения будут подобными лишь при равенстве обоих этих чисел.

Из выражения для  $F$ , в частности, следует, что, если одна модель длиннее другой в 4 раза, то они подобны только тогда, когда большую буксируют в  $\sqrt{4} = 2$  раза быстрее, чем малую. При таком подобии легко вычислить волновое сопротивление натурального корабля по измеренному экспериментально волновому сопротивлению модели: достаточно умножить сопротивление модели на куб масштаба (в нашем примере на  $4^3 = 64$ ).

Конечно, все это для идеальной жидкости. Однако при измерениях в бассейне измеряют не только волновое сопротивление, но и сопротивление трения. Их не разделить в эксперименте, но можно разделить в теории, что и сделал Фруд (за это и хвалил его Тейлор). Если сопротивление трения модели зависит от площади подводной части и качества ее поверхности, то, измерив суммарное сопротивление, можно вычестить из него рассчитанную по формулам часть, связанную с трением. Тогда остаток и будет волновым сопротивлением модели. Умножив полученную величину на куб масштаба, можно получить волновое сопротивление натурального корпуса, прибавить к нему расчетное сопротивление трения натурального корпуса, вычислить полное сопротивление будущего корабля.

Работы Фрудов (отца и сына) по моделированию помогли будущей авиации, поскольку вряд ли появились бы аэродинамические трубы, если бы в опытовых бассейнах не была доказана эффективность испытания корабельных моделей.

С помощью анализа размерностей мы получили два критерия подобия гидродинамических течений. Что изменится, если движение станет нестационарным, то есть будет изменяться со временем?

Ответ на этот вопрос связан с именем чешского ученого – физика и гидродинамика В. Струхала (1850–1922).

В данном случае наряду с величинами  $\nu, v, l$  нужно ввести характерное для этого движения время  $\tau$ . Например, при колебаниях погруженного в жидкость твердого тела определенной формы за  $\tau$  можно принять период колебаний. Из четырех размерных величин можно составить две безразмерные комбинации –  $Re$  и число Струхала

$$St = \frac{v\tau}{l}.$$

Подобие движения имеет место в этом случае, когда  $Re = idem$  и  $St = idem$ .

Как указано в работе М.И. Рабиновича «Малые нервные системы: динамика ритмического поведения животных» (СОЖ. 1995, №1), детальные эксперименты специалистов по гидродинамике и биомеханике показали, что при движении любых

живых организмов, реализующих «изгибный» механизм плавания, независимо от размера тела  $St = \text{const}$ . В этом случае  $\tau$  – период осцилляций хвоста,  $v$  – скорость рыбы,  $l$  – размах осцилляций хвоста.

Чтобы плавание было эффективным, нужно  $St \sim 0.3$ . В природе для любых рыб реализуется именно это значение. Если  $St = \text{const}$ , то скорость рыбы будет тем больше, чем больше  $l$ . Последнее возможно, когда изгибные колебания имеют длину волны, равную длине тела. Так, например, и плавают минога, которая изучена очень хорошо.



Еще одна аэрогидродинамическая дата: 130 лет со дня рождения немецкого исследователя Людвига Прандтля (1875–1953) – создателя теории крыла конечного размаха и теории пограничного слоя.

Людвиг Прандтль родился 4 февраля 1875 года в Фрейзинге (Бавария). После окончания Высшего политехнического училища в Мюнхене он работал профессором Высшего технического училища в Ганновере с 1901 года, а затем с 1904 – в Геттингенском университете. С 1925 года Прандтль в течение 22 лет был директором института гидроаэродинамики им. кайзера Вильгельма в Геттингене.

Прандтль внес значительный вклад, занимаясь и теорией и экспериментом, в теорию турбулентности, в теорию несущего крыла и флаттера, в исследования упругости и пластичности. Он был одним из создателей динамической метеорологии. И.В. Андрианов, Р.Г. Баранцев, Л.И. Маневич в книге «Асимптотическая математика и синергетика» (М.: Едиториал УРСС, 2004) указывают следующее. «Многие ученые считают сейчас, что датой рождения теории сингулярных возмущений следует считать третий международный математический съезд, состоявшийся в Гейдельберге в 1904 году, где Прандтль сделал доклад «О движении жидкости с малым трением». В трудах съезда есть 7-страничная заметка Прандтля. На вопрос, почему заметка столь мала, Прандтль ответил, что у него было 10 минут на выступление, а будучи совсем молодым исследователем, он считал, что может опубликовать только то, что успел сказать. Эта короткая заметка оказала огромное влияние на развитие науки в XX веке...

Впервые само понятие «пограничный слой» возникло в указанной работе Прандтля.»

Напомним, что пограничный слой представляет собой область около поверхности обтекаемого тела с толщиной, малой по сравнению с размерами тела  $R$ . Он характеризуется большим градиентом скорости в направлении, перпендикулярном поверхности тела в данной точке. Причина образования такого большого градиента при больших  $Re$  в том, что скорость жидкости равна нулю на поверхности обтекаемого тела и очень велика при небольшом удалении от него (на бесконечности она переходит в скорость потока жидкости).

Пограничный слой может быть как ламинарным (при удалении от поверхности тела он переходит в ламинарное течение), так и турбулентным (он образуется за обтекаемым телом и граничит с турбулентным течением жидкости).

В ламинарном слое нельзя пренебрегать вязкостью жидкости, несмотря на большие значения  $Re$ , так как в нем существенны малые расстояния порядка толщины этого слоя (местное число Рейнольдса невелико). Если поток обтекает какое-то тело, то ламинарный слой образуется перед обтекаемым телом.

Оценим в качестве примера толщину ламинарного пограничного слоя вблизи поверхности тела с характерным размером  $R$ , обтекаемого потоком жидкости со скоростью  $v$ . Число Рейнольдса  $Re = \frac{vR}{\nu} \gg 1$ . Будем следовать книге В.П. Крайнова «Качественные методы в физической кинетике и газодинамике» (М.: Высшая школа, 1989).

Рассмотрим стационарное ламинарное течение, считая, что скорость  $v$  направлена вдоль оси  $x$ , ось  $y$  перпендикулярна поверхности тела, а от координаты  $z$  зависимости нет. Изменения физических величин вдоль оси  $x$  характеризуются размером тела  $R$  (рис. 4).

Из-за отсутствия зависимости от  $z$  уравнение несжимаемости жидкости имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Для оценок его можно представить так:

$$\frac{v_x}{R} \sim \frac{v_y}{\delta},$$

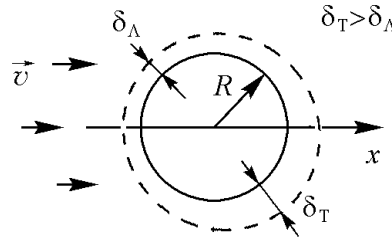


Рис. 4.

где  $\delta$  – толщина пограничного слоя вдоль оси  $y$ . Скорость  $v_x$  совпадает по порядку величины со скоростью  $v$  основного течения жидкости вне ламинарного пограничного слоя, поэтому

$$v_y \sim \frac{\delta}{R}v \ll v. \quad (9)$$

Неравенство (9) будет доказано ниже.

Уравнение Навье – Стокса (7) для стационарного случая будет таким:

$$v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left( \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

Проецируя (10) на ось  $y$  и оценивая каждое слагаемое, получаем при  $\delta \ll R$

$$v \frac{v_y}{R} \sim \frac{p}{\rho \delta} \sim \nu \frac{v_y}{\delta^2}. \quad (11)$$

Из (11) определяем толщину пограничного слоя

$$\delta \sim \left( \frac{\nu R}{v} \right)^{1/2} \sim \frac{R}{(Re)^{1/2}} \ll R, \quad (12)$$



$Re = \frac{vR}{\nu} \gg 1$ . Подставляя (12) в (9) находим, что

$$v_y \sim \frac{v}{(Re)^{1/2}} \ll v,$$

а из (11) следует оценка для давления

$$p \sim \frac{\rho v^2}{Re} \ll \rho v^2.$$

Если теперь спроецировать (10) на ось  $x$ , то получаем

$$\frac{v^2}{R} \sim \nu \frac{v}{\delta^2}, \quad (13)$$

откуда снова получается оценка (12). Слагаемым с давлением в (10) можно пренебречь, так как оно имеет оценку  $\frac{p}{\rho R}$  и его отношение к первому слагаемому в (13) имеет порядок величины  $\frac{p}{\rho v^2} \sim Re^{-1} \ll 1$ .

Уже указывалось, что ламинарный пограничный слой образуется в области перед обтекаемым телом. Он образуется в самой передней точке по отношению к натекающему потоку (см. рис. 4) и стелется по поверхности тела до некоторого расстояния, определяемого формой тела. Потом ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный пограничный слой, который за обтекаемым телом толще, чем перед ним.

Любопытен один эпизод из жизни лаборатории Прандтля, который демонстрирует, как из неточной постановки задачи следует открытие.

В 1911 году докторант К. Хименц по заданию Прандтля должен был построить водяной лоток для исследования отрыва потока от поверхности цилиндра. Цель исследования – проверить, совпадает ли точка отрыва пограничного слоя с рассчитанной теоретически. Сначала требовалось установить распределение давлений вокруг цилиндра в равномерном потоке.

Но Хименц в процессе экспериментов убедился, что течение за цилиндром не устойчивое, а сильно пульсирует. Прандтль при обсуждении результатов предположил, что либо цилиндр недостаточно кругл, либо лоток несимметричен. Регулировка установки ни к чему не привела.

В это время в лаборатории Прандтля в Геттингене появился молодой специалист из Австро-Венгрии Т. фон Карман (1881–1963), который впоследствии работал в Америке. Наблюдая за безнадёжной работой Хименца, Карман подумал, а нужно ли устранять пульсации, не лучше ли их изучить. Потом Карман так вспоминал о своих раздумьях.

«Однажды в воскресенье я попытался рассчитать устойчивость системы вихрей и сделал это весьма примитивно, предположив, что только один вихрь волен двигаться, в то время как все остальные зафиксированы... Полученный результат гласил, что при симметричном расположении неподвижных вихрей подвижный всегда уходит из своего первоначального положения. Такой же результат получился и для асимметричного расположения, но оказалось, что при определенном расстоянии между рядами и двумя последовательными вихрями подвижный вихрь не уходит и остается вблизи своего первоначального положения, описывая вокруг него небольшие замкнутые траектории.

Я закончил работу к понедельнику и утром, показав ее Прандтлю, спросил:

– Что вы скажете на это?

– О, это кое-что важное, – сказал он. – Напишите об этом статью, и я представлю ее в Академию.

Так появилась моя первая статья на эту тему.»

Систему вихрей, следующих в шахматном порядке за движущимся цилиндром или поперечной пластиной, впоследствии стали именовать «вихревой дорожкой Кармана».

В цитируемой выше книге И.В. Андрианова и др. есть интересная характеристика научного стиля Прандтля.

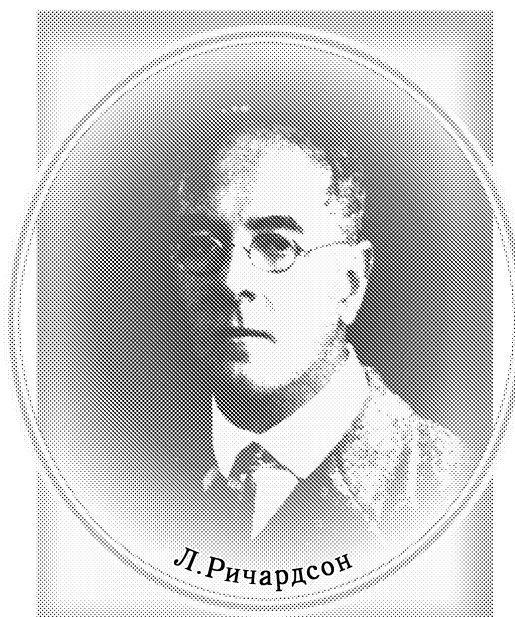
«...Инженер по образованию и, если можно так выразиться, по убеждению, он всегда подчеркивал, что наиболее эффективное приближение к действительности нельзя получить на основе формального решения. Для этого нужно глубокое проникновение в физическую суть явления. К решению сложных проблем он применял простые математические подходы, что и было главной отличительной чертой его научного метода. Таково происхождение теории пограничного слоя, которая возникла при исследовании потока жидкости и описывается весьма скромными математическими средствами.»

Для оценки толщины пограничного слоя в нашей статье использованы еще более скромные средства, чем у Прандтля.

Несомненно удивительной личностью был Льюис Фрай Ричардсон. По словам одного из его современников, он был «очень интересным и оригинальным человеком, который обо всем имел собственное мнение, почти никогда не совпадающее с общепринятым; часто люди просто не понимали его».

Ричардсон окончил Кембриджский университет и получил степени бакалавра по физике, математике, химии, биологии и зоологии. Такое разнообразие было связано с размышлениями о выборе карьеры. Он почему-то был в натянутых отношениях с кембриджской администрацией, поэтому, когда ему понадобилась докторская степень, он отказался получать необходимую степень магистра в Кембридже (это обошлось бы ему в 10 фунтов). Вместо этого он поступил на общих основаниях в Лондонский университет (он преподавал там в это время), учился вместе со студентами и в 47 лет получил степень доктора по математической психологии.

Монография 1922 года со знаменитыми стихотворными строчками о турбулентности, которые приведены выше, через 43 года была переиздана как классическая, хотя в течение первых двадцати лет после выхода у нее была сомнительная репутация.

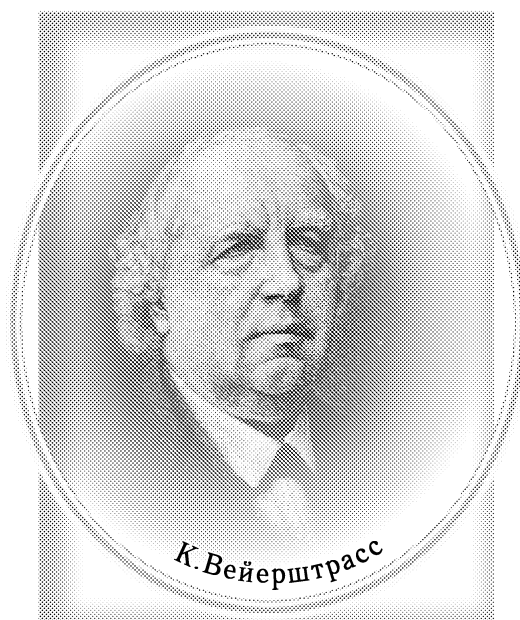


О Ричардсоне можно говорить и в связи с фрактальными датами. Действительно, чтобы дать представление о степени иррегулярности движения воздуха, он в своих работах упоминает функцию Вейерштрасса (она непрерывна, но нигде не дифференцируема). Из посмертных статей стала знаменитой работа Ричардсона «The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels» (General Systems Yearbook, 1961, 6, 139-187), где изложены результаты исследования длины береговых линий. Без ссылки на эту работу не обходится, по крайней мере, ни одна книга по фракталам.

В последние годы жизни Ричардсон занимался изучением психологии вооруженных конфликтов между государствами.

## 2. Созвездие фрактальных дат<sup>6</sup>

- 190 лет со дня рождения немецкого математика Карла Вейерштрасса (1815–1897) – автора многочисленных исследований в области математического анализа, теории чисел, вариационного исчисления. Он впервые привел пример непрерывной функции, не имеющей производных
- 160 лет со дня рождения Георга Фердинанда Кантора (1845–1918). Развив теорию множеств, Кантор, по выражению Гильберта, построил рай для математиков
- 60 лет назад умер Алексей Николаевич Крылов (1863–1945) – всемирно известный кораблестроитель, адмирал. Применил функции без производных для моделирования процесса колебаний корабля
- 35 лет со дня смерти Абрама Самуиловича Безиковича (1891–1970) и Альфреда Реньи (1921–1970)
- 30 лет со дня выхода в свет на французском языке книги Бенуа Мандельброта «Фрактальная геометрия природы»



Когда еще не было термина «фрактал», к функциям, графиком которых была негладкая кривая, относились как к «монстрам» среди гладких обитателей евклидовой, неевклидовой геометрий (типа геометрий Лобачевского и Римана).

Одним из первых, кто начал изучать монстров, был Карл Вейерштрасс. Вслед за чешским философом, математиком и теологом Бернардом Больцано (1781–1848), опубликовавшим книгу «Парадоксы бесконечности» (1851), Вейерштрасс привел пример функции, графиком которой была негладкая кривая. Он обратил внимание на то, что понятия «непрерывная функция» и «непрерывная функция, имеющая в

<sup>6</sup>Часть материалов этого раздела взята из книги Владислава Тарасенко «Фрактальная логика» (М.: «Прогресс-Традиция», 2002).



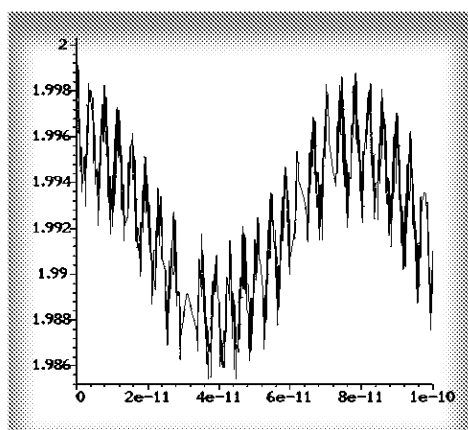


Рис. 5.

масштаба. График функции самоподобен: при растяжении по абсциссе в  $b$  раз и  $1/a$  раз по ординате он инвариантен. Таким образом, из-за того, что в малом масштабе дублируются детали крупного масштаба, функция никогда на малом отрезке не сводится к линии, то есть она непрерывна, но не имеет ни дифференциала, ни производной.

У российских ученых имя Вейерштрасса всегда связывается с именем Софьи Ковалевской, которая познакомилась с ним в 1870 году, когда ей было двадцать лет, а Вейерштрассу – пятьдесят пять, и он считался величайшим аналитиком своего времени.

Вейерштрассу из-за плохого здоровья приходилось читать лекции сидя, а кто-нибудь из способных студентов делал записи на доске. Несмотря на это, на его лекциях аудитория была полна. Ковалевской не разрешили посещать его лекции, поскольку научная жизнь не была рассчитана на свободы женщин. Однако Вейерштрасс, узнав об этой решительной и энергичной девушке, устроил для нее частные уроки. Их дружба продолжалась более двадцати лет, которую оборвала лишь мучительная и преждевременная смерть этой замечательной женщины.

Интересный аспект этой дружбы раскрывают в своей книге «Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости» Ф. Диаку и Ф. Холмс (Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004). Они пишут так.

«Несмотря на всю важность вкладов, внесенных Ковалевской в механику, мы вспомнили историю Сони Ковалевской и Карла Вейерштрасса по другой причине. Дружба этих двух неординарных людей вылилась в длительную переписку, в которой можно найти корни многих математических идей. В частности, читая письма Вейерштрасса, начинаешь понимать образ его мышления и работы. Это совсем не похоже на чтение его математических статей. Научные статьи, особенно по математике, представляют только научный продукт. Они скрывают само создание, путь к конечному результату, надежды и сомнения, страсть, движение в ложном направлении и ошибки, разочарования. Все это присутствует в письмах. Они изображают человеческий разум, стоящий за абстрактными теоремами. Они показывают неудачные попытки, результаты которых никогда не публиковались. Они позволяют нам проследить не всегда гладкий процесс изобретения.»

К построению и исследованию «монстров» в своем творчестве обращался Георг Фердинанд Кантор. В 1883 году Кантор публикует статью «Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten», в которой демонстрирует пример множества – «мон-

каждой точке производную», не тождественны. В докладе Берлинской академии наук 18 июля 1872 года Вейерштрасс привел пример негладкой непрерывной функции, которая задается рядом

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

$$a < 1, b > 1, ab > 1.$$

Функция имеет очень сложную «пилообразную» структуру (рис. 5). Причем на «пилы» большего масштаба до бесконечности накладываются «пилы» меньшего

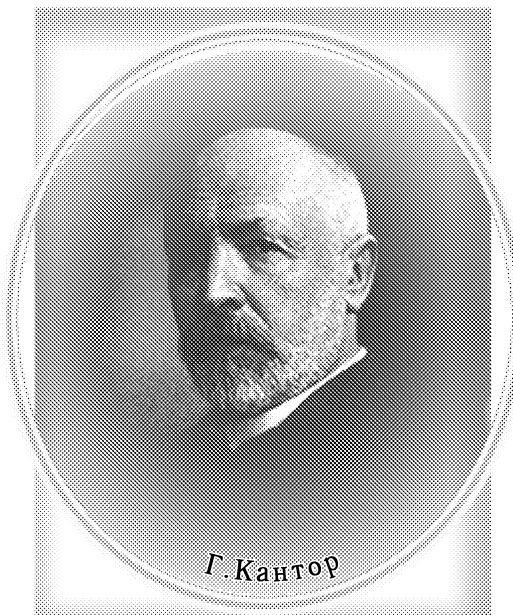
стра», называемого сейчас множеством Кантора или «пылью Кантора». Напомним, как строится множество Кантора.

Возьмем отрезок  $[0, 1]$ , имеющий единичную длину, разделим его на три части и выбросим середину – открытый интервал  $(1/3, 2/3)$ . Будем дальше поступать аналогично: отрезки  $[0; 1/3]$  и  $[2/3; 1]$  делим на три части и выбрасываем середины. На  $k$ -ом шаге описываемой процедуры получим  $2^k$  оставшихся отрезков, не связанных между собой.

Длина каждого отрезка равна  $\left(\frac{1}{3^k}\right)$ . В пределе, когда  $k \rightarrow \infty$ , число вырезанных отрезков неограниченно возрастает, а длина их стремится к нулю. Суммарная длина всех вырезанных отрезков представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем  $q = 2/3$  и первым слагаемым  $a_1 = 1/3$ , то есть

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1.$$

Поскольку исходная длина отрезка равна единице, то мера остатка равна нулю. Однако это не значит, что ничего нет, – множество существует, но нужны другие понятия для его количественной характеристики.



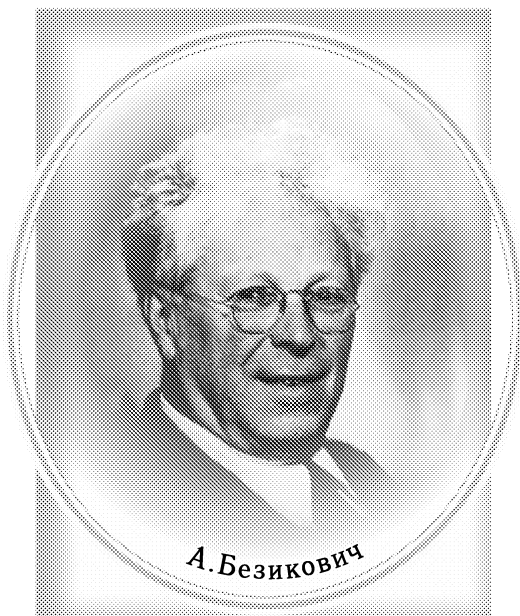
Как известно, размерность Хаусдорфа – Безиковича для множества Кантора

$$D = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63.$$

Абрам Самуилович Безикович, имя которого уже упоминалось в связи с размерностью множества Кантора, происходил из талантливой семьи, в которой было шестеро детей. В 1912 году он окончил Санкт-Петербургский университет и впоследствии стал профессором Пермского университета. Он радовался отречению царя от престола, но нужда и лишения последующих лет вынудили его бежать из России. Существует следующая легенда о том, как Безикович нелегально покинул Россию.

Первоначально он хотел осуществить переход вместе с двумя коллегами

– А.А. Фридманом (известным своей теорией расширения Вселенной) и математиком И.Д. Тамаркиным. Операция финансировалась отцом Фридмана, который был богатым нэпманом. Фридман в последний момент по каким-то причинам отказался



от затишья, а через несколько месяцев умер от тифа. Тамаркин и Безикович продолжали выполнять намеченный план. Путь их лежал через Латвию и включал переход через замерзшую реку, лед на которой был еще не слишком твердым. Чтобы уменьшить давление на лед, нужно было перебираться ползком. Что и сделал успешно Безикович. Тамаркин, однако, обладая внушительными пропорциями, считал такой способ недостойным для человека. Он пошел пешком, заставив всех изрядно поволноваться. Но все обошлось благополучно.

Из Латвии Безикович отправился в Копенгаген, где началась его «заграничная жизнь». Потом были Оксфорд, Ливерпуль и, наконец, Кембридж. В этом университете он проработал с 1927 года до конца своих дней.

Самый значительный вклад Безиковича в математику лежит в области почти периодических функций и фрактальной размерности. Сам себя он называл знатоком «патологии» математики. Если кто-то выдвигал предположение, которое, как чувствовал Безикович, было неверным, он не успокаивался до тех пор, пока не находил контрпредположение. Безикович был добрым и общительным человеком. Среди его друзей был П.Л. Капица. Он был остроумен, его афоризмы пользовались успехом. В день своего тридцатишестилетия Безикович, думая, что его творческие силы иссякли, объявил: «Прошло четыре пятых моей жизни». Когда ему напомнили об этом при занятии в 59 лет кафедры знаменитого Литлвуда, он отправил открытку с ответом: «Числитель был правильным!».

Размерность носит имя Хаусдорфа и Безиковича. Поэтому несколько слов о Феликсе Хаусдорфе (1868–1942).

Хаусдорф до 35 лет большую часть времени посвящал литературе и музыке, писал беллетристические произведения под псевдонимом Paul Mongré. Известен его математический трактат «Grundzuge der Mengenlehre» (Leipzig, 1914), который отличали ясность, точность и доведение каждого результата до полного понимания. Один из американских рецензентов книги, указывая, что способ доказательств в трактате близок к стилю Эвклида и едва ли вызовет активность читателя и даст волю его воображению, тем не менее отмечал: протест против такого стиля изложения подобен спору с Бетховеном из-за того, что он писал симфонии вместо опер.

Хаусдорф был евреем и покончил с собой вместе с женой и ее сестрой 26 января 1942 года, чтобы избежать депортации в концлагерь. У входа в Математический институт Боннского университета висит мемориальная доска: «В этом университете с 1921 по 1935 год работал математик Феликс Хаусдорф (8.11.1868 – 26.01.1942). Он умер по вине национал-социалистов из-за того, что был евреем. В его лице мы чтим память всех жертв тирании. Пусть никогда не повторится диктатура и война!».

Помимо размерности Хаусдорфа – Безиковича фракталы характеризуются и другими размерностями, например, размерностью Реньи – венгерского математика Альфреда Реньи.

Напомним, что Реньи предложил континуальное семейство размерностей, включающее в себя многие известные размерности, в том числе размерность Хаусдорфа – Безиковича. По определению,  $q$ -я размерность Реньи вычисляется по формуле

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} = \frac{\log \sum_{i=1}^N p_i^q}{\log \varepsilon},$$

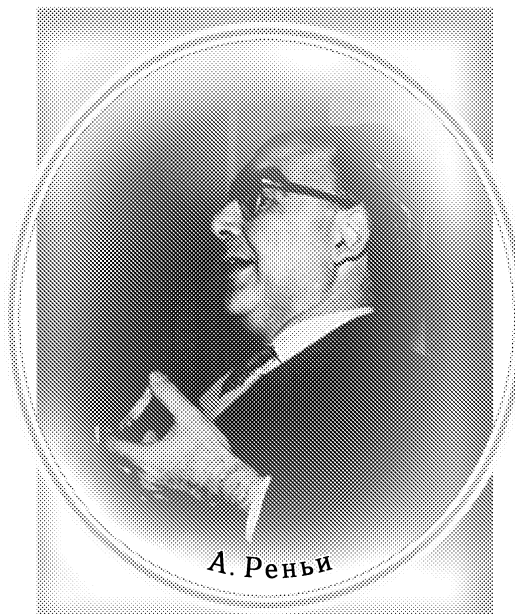
где  $p_i$  – вероятность попадания на  $i$ -ю компоненту фрактала,  $\varepsilon$  – радиус сферы покрытия. При  $q = 0$

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(-1)} = \frac{\log \sum_{i=1}^N p_i^0}{\log \varepsilon} = \frac{\log \sum_{i=1}^N 1}{-\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

– размерность Хаусдорфа – Безиковича.

Альфред Реньи родился 20 марта 1921 года в Будапеште в семье инженера. Его дед со стороны отца был известным литературным критиком и большим знатоком древнегреческой литературы. Отец будущего ученого свободно владел многими европейскими языками. Видимо от них внук унаследовал и литературные способности.

Реньи окончил в 1944 году университет в Будапеште и защитил первую диссертацию в Сегеде. Затем поступил в докторантуру к академику Ю.В. Линнику (Ленинградское отделение Математического института им. В.И. Стеклова). Он окончил докторантуру за год благодаря своей одаренности и трудолюбию.



Возвратившись после защиты диссертации в Венгерскую Народную Республику, Реньи приступил к научно-педагогической работе в Дебреценском университете. В 1950 году при активном участии Реньи в Будапеште был создан Институт прикладной математики Венгерской академии наук (позже он был переименован в Институт математики). Альфред Реньи стал первым и бессменным (на протяжении двадцати лет) директором этого института. С 1952 года Реньи заведовал кафедрой теории вероятностей Будапештского университета имени Этвеша.

В нашей стране Реньи известен всем интересующимся математикой книгой «Трилогия о математике. Диалоги о математике. Письма о вероятности. Дневник. Записки студента по теории информации» (М.: Мир, 1980. 376 с.)<sup>7</sup>. Форма диалогов позволила автору не только изложить собственные взгляды на предмет, но и противопоставить им иные точки зрения и привести доводы «за» и «против».

Обратимся далее к воспоминаниям академика АН УССР Б.В. Гнеденко (из Предисловия к «Трилогии о математике»).

«Вслед за этой книгой (имеется в виду книга «Диалоги о математике». – *Д.И.Т.*), принесшей Реньи широкую известность как популяризатору и ученому, занимающемуся философскими проблемами математики, он начал работать над другой популярной книгой – «Письмами о вероятности». Замыслами о ней поделился со мной в октябре 1966 года, когда я был гостем венгерских математиков в Будапеште. Как-то перед одной из своих лекций по телевидению, посвященной элементам теории вероятностей, он,

<sup>7</sup>Первые две части трилогии издавались отдельными книгами: «Диалоги о математике» (М.: Мир, 1969) и «Письма о вероятности» (М.: Мир, 1970). Обе книги стали уже библиографической редкостью.



рассказывая мне о том, что собирается публично выступить с демонстрацией игральных костей различных времен и народов, упомянул о замысле задуманной им книги. Надо полагать, идея написания такой книги и ее форма были навеяны его поездкой во Францию по случаю 300-летия со дня смерти Паскаля, когда он побывал не только в Париже, но и в Клермон-Ферране, неподалеку от которого Паскаль проводил свои опыты.»

«Дневник» посвящен выяснению основного понятия теории информации – количества передаваемой информации. Форма, к которой прибегнул автор, своеобразна и удивительно интересна. Преждевременная смерть не позволила Реньи завершить эту книгу. Его не стало 1 февраля 1970 года. Книгу закончили его ученики и друзья.

Альфред Реньи был тонким музыкантом и знатоком литературы, он высоко ценил в математике ее эстетическое начало; интересовался историей математики и размышлял над ее философскими проблемами.

### 3. Даты, которые не имеют отношения к гидродинамике и фракталам, но важны для нелинейной динамике

375 лет назад умер Иоганн Кеплер (1571–1630).

370 лет со дня рождения Роберта Гука (1635–1703), через 30 лет в 1665 году вышла в свет его знаменитая «Микрография».

310 лет со дня смерти Христиана Гюйгенса (1629–1695).

240 лет назад вышли в свет «Письма к одной немецкой принцессе» Леонарда Эйлера.

150 лет назад умер Карл Фридрих Гаусс (1777–1855).

140 лет назад Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879) постулировал существование электромагнитных волн и выдвинул идею электромагнитной природы света.

Рудольф Клаузиус (1822–1888) ввел понятие энтропии.

Умер Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865).

115 лет назад родился Рональд Эймлер Фишер (1890–1962), который одновременно с Колмогоровым, Петровским и Пискуновым исследовал уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k u(1 - u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(частный случай уравнения КПП).

80 лет назад умер Александр Александрович Фридман – автор теории расширяющейся Вселенной, созданной в рамках общей теории относительности Эйнштейна.

65 лет назад в США построена первая ЭВМ. Проведены исследования, получившие название парадокса Ферми – Пасты – Улама.

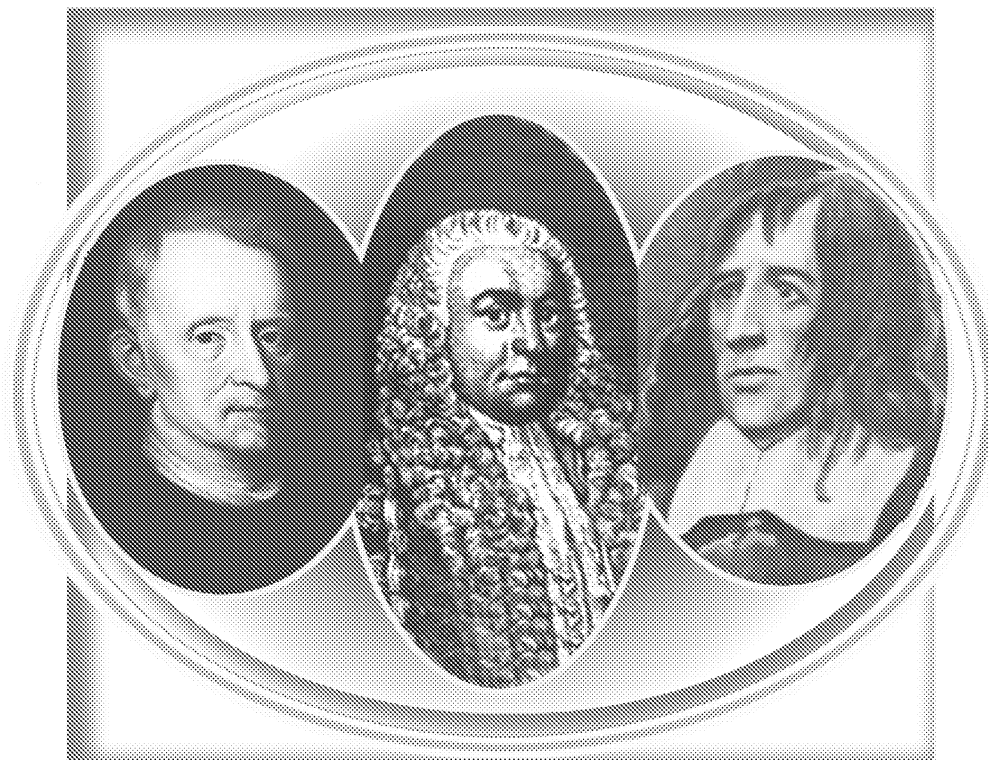
50 лет со дня смерти Николая Митрофановича Крылова (1879–1955). Метод Крылова – Боголюбова применяется необычайно широко.

Вышла в свет книга И.Р. Пригожина «Введение в термодинамику необратимых процессов» (Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes Springfield, Illinois, USA, 1955.)

40 лет назад Забуски и Крускал опубликовали статью: Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of unital states (Phys. Rev. Lett. 1965. Vol.15. P. 240), в которой ввели термин «солитон» для уединенных волн – решений уравнения Кортевега – де Вриза.







Посмертные портреты Гука

Подлинных портретов Роберта Гука не существует. Есть несколько изображений, воссозданных по описаниям современников, поскольку подлинного портрета до сих пор обнаружить не удалось. Легенда гласит, что после смерти Гука Ньютон, заняв место президента Королевского общества, приказал уничтожить все портреты Гука. За легендой стоит научное столкновение между Ньютоном и Гуком, длившееся без малого 30 лет. Приведем словесный портрет Гука, принадлежащий Ричарду Уоллеру (Waller R. *The Life of Dr. Robert Hooke*, – In: *Hooke R. Posthumous Works*. 2nd ed. L., 1974, XXVI – XXVII)<sup>8</sup>.

«Что касается его вида, то он был неописуем, будучи чрезвычайно сгорбленным, хотя, как я слышал от него и от других, приблизительно до шестнадцатилетнего возраста он был стройным. С этого возраста он стал горбиться, к чему его привела постоянная работа на токарном станке и иные искривляющие тело упражнения, тем более, что телом он был хилый и слабый. С возрастом все это увеличивалось, так что в конце концов стало весьма заметно: таким образом, он казался очень низкого роста, хотя судя по его членам, был достаточно высок. Всегда он был очень бледен и худ, а позже стал только кожа да кости, очень тощий, у него были серые глаза навывкате с острым умным взглядом в годы его молодости. У него был тонкий нос умеренной высоты и длины, средней величины рот с тонкой верхней губой, острый подбородок и высокий лоб; голова средней величины. Он носил собственные волосы темно-каштанового цвета, очень длинные, которые небрежно спадали на его лицо, неподрезанные и гладкие; лишь за три года до смерти он постриг их и начал носить парик. Ходил он наклонившись и очень быстро (пока его болезнь за несколько лет до смерти не помешала ему в этом), ибо его ноги несли легкое тело. Он был чрезвычайно умен и деятелен, в особенности в молодые годы.

<sup>8</sup>Текст взят из книги А.Н. Боголюбова «Роберт Гук» («Наука», 1984).

Он обладал активной, беспокойной, неутомимой одаренностью почти до самого своего конца, и всегда, вплоть до своей смерти, он спал мало, редко ложился спать раньше двух, трех или четырех часов утра и еще реже укладывался в кровать, зачастую продолжая свои занятия всю ночь и лишь позволяя себе днем немного вздремнуть. Характер его был меланхолический, недоверчивый и ревнивый, что с возрастом у него усиливалось.»

Роберт Гук известен чуть ли не каждому образованному человеку в связи с законом Гука (1678), который положил начало науке о прочности материалов и механике упругого тела. И мало кто знает, что Гук был замечательным ученым-энциклопедистом с чрезвычайно широким диапазоном творчества, он был талантливым изобретателем, выдающимся архитектором и градостроителем, отличным организатором, профессором и лектором и поистине гениальным экспериментатором.

Невозможно найти такое направление в науке или технике XVII века, которым бы Гук не занимался. Его работы выполнены в области физики, химии, биологии, геологии, астрономии, палеонтологии, физиологии. Он превосходно чертил и рисовал, знал архитектуру и производство строительных работ, любил музыку, был замечательным гравером. Но основные его исследования сделаны в области механики (пожалуй, он разбирался в механике лучше всех своих современников), а в технике эксперимента равных ему не было.

Жизнь Гука пришлось на период бурных перемен в Англии. Он пережил две революции, несколько гражданских войн, пять монархов и одного лорда-протектора и оставил громадное научное наследие. По широте диапазона научных интересов Гука можно сравнить, пожалуй, лишь с Леонардо да Винчи.

И конечно, имя Гука неотделимо от Королевского общества. В своей «Истории Королевского общества» де Андраде так пишет о деятельности Гука:

«Гук произвел перед Обществом удивительное разнообразие экспериментов, например, относительно действия вакуума, о силе артиллерийского пороха, о термическом расширении стекла. Между прочими вещами он показал первый действительный микроскоп и множество открытий, сделанных с его помощью, первую ирисовую диафрагму и целый ряд метеорологических приборов. Если бы не его преданность, Общество скончалось бы подобно Академии дель Чименто или влачило бы существование как Французская академия наук в свои ранние дни» (Andrade E.N. da S. A brief History of the Royal Society. L., 1960).

По существу, Гук воспроизводил каждую работу, присылаемую в Общество, и докладывал ее коллегам. Он делал то, что под силу целому научно-исследовательскому институту.

Что в работах Гука наиболее близко науке о колебаниях и волнах?

Гук был сторонником теории «всемирных и всепроникающих» колебательных процессов, которой он не безуспешно пытался заменить декартовские вихри<sup>9</sup>. И конечно, Гук не мог оставить в стороне вибрацию, связанную с одним из «дел его жизни» – созданием часов.

<sup>9</sup>Напомним, что Декарт подразделял Вселенную на три различные области: первая включает в себя вихрь вокруг Солнца, вторая – вихри вокруг звезд, а все то, что находится вне этих двух областей, отнесено к третьей. Вихрь вокруг Солнца занимает особое положение, так как в нем расположена Земля. Декарт пытался разъяснить из этой теории все явления, наблюдаемые на небе, пятна на Солнце, появление новой звезды, кометы, выявить законы движения небесных светил.

Одно из важных направлений творчества Гука – механика упругого тела. В Кутлеровской лекции (Hooke R. Lectures De Potentia or of Spring. L., 1678. P.1.) Гук пишет:

«Около двух лет назад я напечатал эту теорию в виде анаграммы в конце моей книги... *ut tensio sic vis*; что значит, сила любой пружины находится в одинаковом отношении с напряжением. Иными словами, если одна сила растягивает или сгибает ее на одну длину, две согнут ее на два, а три согнут ее на три, и так далее.»

Он прекрасно понимал ценность своей теории и те возможности, которые она открывает перед человечеством:

«При помощи этого принципа легко можно будет подсчитать различные силы луков – будут ли они сделаны из дерева, стали, рога, из сухожилий или шнуров, а также катапульта или баллист, которыми пользовались древние; все это можно сделать однажды и вычислить соответствующие таблицы. Вскоре я покажу способ, как вычислять мощность, которую они имеют при стрельбе или бросании стрел, пуль, камней, гранат и подобных им.

Из этих же принципов будет легко вычислять силы пружины для механизма часов и соответственно приспособления механизма к пружине для того, чтобы он обеспечивал движение часов всегда с одинаковой силой.»

Гук надеялся применить свой закон к сжатию пружины и найти возможность так закручивать часовую пружину, чтобы она, раскручиваясь в постоянном отношении, могла послужить основой для создания часов, пригодных для мореплавания, на которые не влияли бы непогода, сырость, буря, изменения гравитационного поля. Если удлинения пружины прямо пропорциональны приложенному к ней растягивающему усилию, то, очевидно, восстанавливающая сила в закрученной пружине также будет находиться в линейной зависимости от ее раскручивания. Один конец раскручивающейся пружины продвигался бы на равные расстояния в равные времена. Так Гук нашел механическое воспроизведение изохронности.

В литературе имя Гука, как правило, связывают с его спорами с Ньютоном о приоритете в теории света и формулировке закона всемирного тяготения. Обычно об этом пишут в книгах о творчестве Ньютона, однозначно вставая на его сторону. Не все так просто, если заглянуть в переписку Гука и Ньютона, которая, несмотря на все их заявления о глубоком уважении друг друга и о чрезвычайной преданности к раскрытию правды, полна взаимных щипков и пренебрежительных замечаний. Вот один из примеров.

Гук, ссылаясь на свой общепризнанный авторитет в области теории света и цветов, указывает, что Ньютон только закончил ту картину, которую он, Гук, сделал еще в молодости и что завершил бы ее и сам, если бы «это разрешили его иные трудные занятия». Явный намек на то, что младший на семь лет Ньютон был всего лишь последователем Гука.

Ответ Ньютона следует 6 февраля 1676 года. В нем знаменитая фраза: «Если я видел дальше, то лишь потому, что стоял на плечах гигантов». Вряд ли эти слова не содержали в себе намека на малый рост и искривленность Гука. Назвать его гигантом можно было только в насмешку.

Но знаменитая фраза могла быть вложена и в уста Гука: он тоже видел дальше других, а кое в чем и дальше Ньютона.

Несомненно, что Гук внес некоторый вклад и в установление закона всемирного тяготения, поскольку именно ему принадлежат первые публикации и чтения на эту тему. Справедливость некоторых его требований вынужден был признать и Ньютон. Наследие Гука и его вклад в человеческую культуру огромны. Для доказательства этого приведем основные даты жизни и деятельности Роберта Гука, основываясь на уже цитированной книге А.Н. Боголюбова.

- 1635 Роберт Гук родился 18 июля в Фрешуотере (Англия)
- 1648 после смерти отца переехал в Лондон и поступил учеником к художнику Питеру Лели
- 1649 поступил в Вестминстерскую школу педагога Башби
- 1653 студент Оксфордского университета; хорист в церкви Христа
- 1654 ассистент доктора Уиллиса. Знакомство с участниками Оксфордского «Невидимого колледжа»; ассистент и ближайший сотрудник Роберта Бойля
- 1657 изобрел пружинный привод карманных часов
- 1658 изобрел воздушный насос
- 1661 опубликовал трактат о капиллярном движении жидкостей
- 1662 оксфордский университет присвоил Гуку степень магистра искусств; Гук назначен куратором экспериментов Королевского общества
- 1663 составил устав Королевского общества;  
3 июня избран членом Королевского общества
- 1664 стал профессором Грешемовского колледжа;  
получил квартиру в здании колледжа
- 1665 11 января избран куратором пожизненно;  
вышла из печати «Микрография», которая послужила распространению экспериментальных исследований с помощью микроскопа. Книга была написана прекрасным языком и иллюстрирована рисунками-гравюрами самого Гука. Книга явилась результатом ряда фундаментальных открытий и поставила Гука в число основоположников биологии. В книге приведены теоретические рассуждения о природе света и тепла, о цветах в тонких пластинках, о капиллярности, эксперименты о распространении тепла в твердых телах и жидкостях, наблюдения над структурой кристаллов, астрономические рассуждения, расчет величин звезд, указание о том, что с помощью более мощных телескопов будут открыты новые звезды
- 1666 назначен представителем Сити в комиссии по восстановлению Лондона, пострадавшего от Великого пожара. Начал работать в качестве архитектора, проводил эксперименты по гравитации
- 1667 17 января назначен профессором по чтению «Кутлеровских лекций».  
28 февраля демонстрировал перед Королевским обществом свой отражательный (зеркальный) телескоп.  
Начал читать Кутлеровские лекции о землетрясениях. По свидетельству самого Гука, возникли лекции так: «По тщательном обсуждении того, что сэр Джон Кутлер, рыцарь и баронет, определил платить мне пятьдесят фунтов в год в течение моей жизни, я обязался и предпринял читать в Грешемовском колледже или в каком-либо ином месте, где будет устроено собрание Королевского общества, по шестнадцати лекций в год для распространения знаний по искусствам и природе»

- 1670 предложил принять каплю ртути в качестве стандартной единицы мер и весов
- 1671 провел серию экспериментов по выяснению природы и причины тяготения
- 1674 изобрел машину для выполнения всех арифметических операций; впервые опубликовал одну из «Кутлеровских лекций» – «Попытка доказать движение Земли»
- 1675 ставил эксперименты над мускулами человека и животных
- 1677 избран секретарем Королевского общества
- 1678 провел опыты по созданию искусственных мускулов; опубликовал «закон Гука»
- 1679 ставил опыты по исследованию феноменов дыхания и горения; разработал теорию о причастности к обоим феноменам той части воздуха, которая содержится в селитре. Он ясно представлял себе функцию кислорода, хотя и не нашел для этой субстанции, которая имеется и в воздухе, и в селитре, особого наименования
- 1680 прочел лекции о кометах
- 1681 читал лекции о свете
- 1686 вступил в спор с Ньютоном о приоритете закона всемирного тяготения
- 1691 получил степень доктора медицины
- 1697 прочел три лекции о янтаре
- 1699 30 июля выступил с лекцией о причине землетрясений
- 1701 в феврале Галлей доложил на заседании Королевского общества о морском барометре – последнем изобретении Гука
- 1703 Роберт Гук скончался 3 марта в Лондоне в своей квартире в Грешемовском колледже

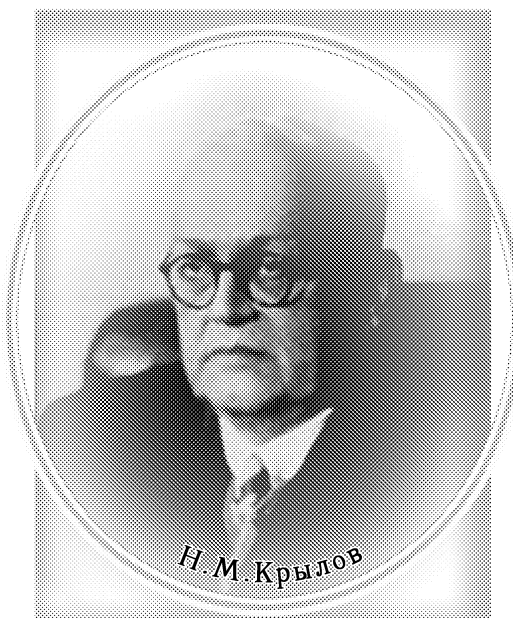
Краткое повествование о Гуке закончим фразой из книги А.Н. Боголюбова.

«Представляется, что изложенное выше является хотя бы частичным доказательством того, что идеи Гука в значительной степени определили развитие наук в XVII веке».

1955 год – скончался Николай Митрофанович Крылов (1879–1955). Всем читателям известен метод Крылова – Боголюбова.

В книге И.В. Баранцева и др. «Асимптотическая математика и синергетика» находим следующую характеристику творчества Крылова.

«Своеобразие Крылова как ученого заключается в том, что, по словам известного французского математика А. Данжуа (1884–1973), он объединял в себе три ипостаси: одновременно был выдающимся математиком, физиком и инженером. Что же касается творческой карьеры Крылова, то она как нельзя лучше характеризуется цитатой из его популярной статьи: «Естественные и





технические науки часто ставят перед математикой вопросы, на которые математика не может дать точные ответы. Другие же задачи, хотя уже и решенные точно, дают настолько сложные алгоритмы, что не могут быть применены на практике. Нахождение простейшего и, в то же время, достаточно точного метода приближенного решения вместе с оценкой степени точности приближения нередко требуют исключительного таланта и глубоких знаний. В этом смысле и нужно, очевидно, воспринимать слова великого русского математика П.Л.Чебышева (приведенные как-то французским геометром Г. Дарбу) о том, что приближенное решение лучше точного» (Боголюбов А.Н., Урбанский В.М. Николай Митрофанович Крылов. Киев: Наукова Думка, 1987).

Николай Митрофанович Крылов родился 29 декабря 1879 года в Санкт-Петербурге. В 1889 году он поступает в Киевский кадетский корпус, а в 1897 году – в Санкт-Петербургский горный институт, по окончании которого получает звание горного инженера. В 1902 году он был послан за границу (во Францию и Италию) для повышения уровня математической подготовки, где учился у выдающихся математиков того времени, таких как Г. Дарбу, Ж. Буссинеск, Ж. Адамар, А. Лебег, Э. Пикар, П. Пенлеве, Л. Бианки, У. Дини.

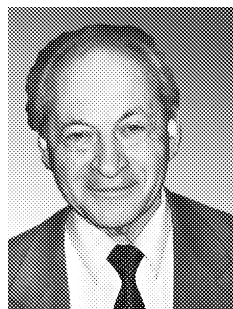
Его научная работа началась в 1910 году, и за 50 лет Крылов опубликовал более 180 книг и научных статей по теории аппроксимации, вариационному исчислению, приближенному интегрированию дифференциальных уравнений математической физики, нелинейной механике.

Вернувшись в Россию, Крылов преподает математику в своей alma mater (с 1912 по 1917 г. он профессор кафедры высшей математики Горного института). Октябрьская революция застала его в Крыму, где он вынужден был подолгу находиться из-за болезни туберкулезом. С 1918 по 1922 г. Крылов – профессор математики Таврического университета в Симферополе. В 1923 году он переезжает в Киев, где начинается его сотрудничество с Н.Н.Боголюбовым.

Крылов был избран членом-корреспондентом АН СССР в 1925 году, а ее действительным членом – в 1929 году.

Во время Великой Отечественной войны до 1943 года он работал в Уфе в тяжелых условиях, которые подорвали его здоровье. Последние годы жизни провел в Москве, тяжело болея и будучи практически слепым. Умер Николай Митрофанович Крылов 11 мая 1955 года.

Как и в прошлый раз не все упомянутые в списках даты нашли отражение в статье (особенно из последнего раздела). Можно указать разные причины, но, в основном, выбор описаний определяется вкусами автора.



*Трубецков Дмитрий Иванович* – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.