



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Научная статья
УДК 517.926
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-775-798

Периодические режимы группового доминирования в полносвязных нейронных сетях

С. Д. Глызин[✉], А. Ю. Колесов

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, Россия
E-mail: ✉glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru
Поступила в редакцию 20.02.2021, принята к публикации 18.04.2021,
опубликована 30.09.2021

Аннотация. Рассматриваются нелинейные системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, являющиеся математическими моделями полносвязных сетей импульсных нейронов. Целью работы является изучение динамических свойств одного специального класса решений этих систем. Методами большого параметра исследуются вопросы о существовании и устойчивости в изучаемых моделях специальных периодических движений – так называемых режимов группового доминирования или k -доминирования, где $k \in \mathbb{N}$. Результаты. Показано, что каждый такой режим представляет собой релаксационный цикл, ровно k компонент которого совершают синхронные импульсные колебания, а все остальные компоненты асимптотически малы. Максимальное количество устойчивых циклов группового доминирования, сосуществующих в системе при надлежащем выборе параметров, равно $2^m - 1$, где m – число элементов сети. Заключение. Рассматриваемая модель с максимально большим числом связей позволяет описать наиболее сложное и разнообразное поведение, возможное в биологических нейронных ассоциациях. Особенностью рассмотренных нами режимов k -доминирования является то, что часть нейронов сети находится в неработающем (рефрактерном) состоянии. Каждому периодическому режиму k -доминирования может быть поставлен в соответствие бинарный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, где $\alpha_j = 1$, если j -й нейрон активен, и $\alpha_j = 0$ в противном случае. Принимая во внимание это обстоятельство, приходим к выводу, что данные режимы могут быть использованы для построения устройств с ассоциативной памятью на основе искусственных нейронных сетей.

Ключевые слова: полносвязная нейронная сеть, химические синапсы, релаксационные циклы, асимптотика, устойчивость, буферность.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-29-10055.

Для цитирования: Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Периодические режимы группового доминирования в полносвязных нейронных сетях // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 775–798. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-775-798

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Periodic modes of group dominance in fully coupled neural networks

S. D. Glyzin[✉], A. Yu. Kolesov

Yaroslavl State University, Russia

E-mail: ✉glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru

Received 20.02.2021, accepted 18.04.2021, published 30.09.2021

Abstract. Nonlinear systems of differential equations with delay, which are mathematical models of fully connected networks of impulse neurons, are considered. *Purpose* of this work is to study the dynamic properties of one special class of solutions to these systems. Large parameter *methods* are used to study the existence and stability in considered models of special periodic motions – the so-called group dominance or k -dominance modes, where $k \in \mathbb{N}$. *Results.* It is shown that each such regime is a relaxation cycle, exactly k components of which perform synchronous impulse oscillations, and all other components are asymptotically small. The maximum number of stable coexisting group dominance cycles in the system with an appropriate choice of parameters is $2^m - 1$, where m is the number of network elements. *Conclusion.* Considered model with maximum possible number of couplings allows us to describe the most complex and diverse behavior that may be observed in biological neural associations. A feature of the k -dominance modes we have considered is that some of the network neurons are in a non-working (refractory) state. Each periodic k -dominance mode can be associated with a binary vector $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, where $\alpha_j = 1$ if the j -th neuron is active and $\alpha_j = 0$ otherwise. Taking this into account, we come to the conclusion that these modes can be used to build devices with associative memory based on artificial neural networks.

Keywords: fully coupled neural network, chemical synapses, relaxation cycles, asymptotics, stability, buffering.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 18-29-10055.

For citation: Glyzin SD, Kolesov AYu. Periodic modes of group dominance in fully coupled neural networks. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(5):775–798. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-775-798

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

1. Постановка проблемы и основные результаты

Подавляющее большинство нейронных математических моделей базируется на так называемой гипотезе об эквивалентности. В рамках этой гипотезы мы заменяем биологический нейрон физическим объектом – некоторым генератором с сосредоточенными электрическими параметрами. В свою очередь, упомянутый генератор моделируется нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений или аналогичной системой с запаздыванием. А так как колебания мембранного потенциала носят заведомо релаксационный характер, то соответствующая система, как правило, является сингулярно возмущенной.

Указанным выше способом были получены известная модель Ходжкина–Хаксли [1] и многие другие математические модели изолированного нейрона (см. монографию [2] и содержащуюся в ней подробную библиографию). В настоящей работе, оставаясь в рамках гипотезы об эквивалентности, в качестве модели отдельного нейрона мы используем скалярное нелинейное дифференциальное уравнение с запаздыванием вида

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u \quad (1)$$

для мембранного потенциала $u = u(t) > 0$. Здесь параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в нейроне, предполагается большим, точка означает дифференцирование по t , а функция $f(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, обладает свойствами:

$$f(0) = 1, \quad f(u) = -a + O\left(\frac{1}{u}\right), \quad uf'(u) = O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u^2 f''(u) = O\left(\frac{1}{u}\right) \quad (2)$$

при $u \rightarrow +\infty$, где $a = \text{const} > 0$. Примером такой функции служит

$$f(u) = \frac{1-u}{1+u/a}. \quad (3)$$

Отметим, что наш способ моделирования нейронной активности опирается на идеи, принадлежащие Ю. С. Колесову [3] и В. В. Майорову [4]. А именно, в монографии [3] описан общий подход к математическому моделированию биологических процессов с помощью специальных систем с запаздыванием вольтерровского типа. Далее, в работе [4] на основе этого подхода и идеи запаздывающей проводимости в качестве модели отдельного нейрона было предложено некоторое уравнение с запаздыванием, аналогичное (1). И наконец, в статье [5] после надлежащей доработки упомянутое уравнение приобрело требуемый вид (1), (2).

Следует также отметить, что ранее безотносительно к нейродинамическим приложениям уравнение (1) рассматривалось в работе [6] как некоторое обобщение известного уравнения Хатчинсона [7]. В статье [6] установлено, что при всех $\lambda \gg 1$ оно допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u(t, \lambda) > 0$, $u(0, \lambda) \equiv 1$, периода $T(\lambda)$, удовлетворяющий предельным соотношениям:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T(\lambda) = T_0, \quad \max_{0 \leq t \leq T(\lambda)} |x(t, \lambda) - x_0(t)| = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

где $T_0 = (1 + a)t_0$, $t_0 = 1 + 1/a$, $x(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln(u(t, \lambda))$, а T_0 -периодическая функция $x_0(t)$ задается равенствами

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - a(t - 1) & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1, \\ t - T_0 & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t). \quad (5)$$

Наглядное представление о релаксационных свойствах (4) этого цикла дает его график на плоскости (t, u) , построенный численно для случая (1), (3) при $\lambda = 5$, $a = 2$ (рис. 1), а также график функции (5) (рис. 2).

Для построения математической модели ассоциации синаптически связанных нейронов будем использовать подход к моделированию химических синапсов, изложенный в статье [8]. В основе этого подхода лежит подходящим образом модифицированная идея быстрой пороговой модуляции (fast threshold modulation, ФТМ). Феномен ФТМ, впервые описанный в работе [9], представляет собой специальный способ связи динамических систем. Характерная особенность

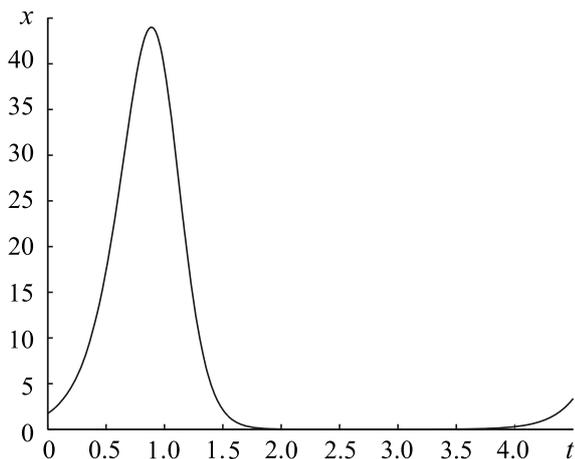


Рис. 1. График решения $x(t)$ уравнения (1), с функцией (3) при $\lambda = 5$, $a = 2$

Fig. 1 Graph of the solution $x(t)$ of the equation (1), with the function $f(u)$ satisfying the formula (3) for $\lambda = 5$, $a = 2$

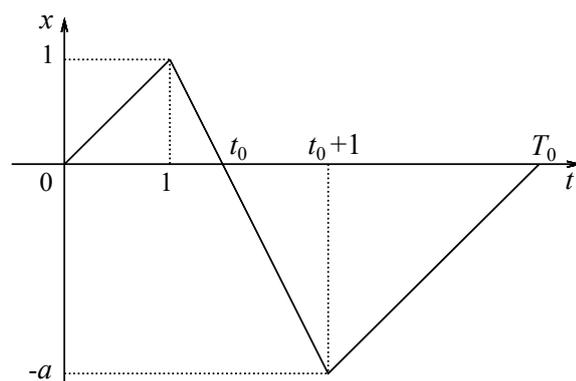


Рис. 2. График функции $x_0(t)$

Fig. 2 Graph of the function $x_0(t)$

этого способа состоит в том, что правые части соответствующих дифференциальных уравнений меняются скачкообразно при переходе некоторых управляющих переменных через свои критические значения. В нейронных системах идея ФТМ реализуется, как правило, следующим образом.

Предположим, что напряжение $u = u(t)$ и сила тока $v = v(t)$ в отдельной нервной клетке удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \dot{u} = p(u, v), \quad \dot{v} = q(u, v). \quad (6)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а на правые части $p, q \in C^\infty$ наложены стандартные ограничения, обеспечивающие существование устойчивого релаксационного цикла.

Рассмотрим, для примера, простейшую сеть, состоящую из двух синаптически связанных нейронов. В этом случае (см., например, [9]) соответствующие им электрические переменные (u_s, v_s) , $s = 1, 2$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}_1 &= p(u_1, v_1) + b h_2(u_2)(u_* - u_1), & \dot{v}_1 &= q(u_1, v_1), \\ \varepsilon \dot{u}_2 &= p(u_2, v_2) + b h_1(u_1)(u_* - u_2), & \dot{v}_2 &= q(u_2, v_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь b – положительный параметр, характеризующий максимальную проводимость синапса, u_* – потенциал покоя (или потенциал Нернста), а функции $h_s(u_s)$, $s = 1, 2$ – постсинаптические проводимости, зависящие от пресинаптических потенциалов u_s . Руководствуясь идеей ФТМ, считаем функции $h_s(u_s)$ имеющими следующий вид:

$$h_s(u_s) = H(u_s - u_{**}), \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (8)$$

где u_{**} – порог, начиная с которого одна клетка влияет на другую. Например, если $u_1 < u_{**}$, то первый нейрон не действует на второй, а если $u_1 > u_{**}$, то действует.

В статье [8] приведенный выше способ моделирования химических синапсов был адаптирован для дифференциально-разностных уравнений вольтерровского типа. Для этого предполагается, что функционирование отдельного нейрона моделируется уравнением вида (1) и рассматривается сеть из m ($m \geq 2$) нейронов, взаимодействующих посредством химических синапсов и связанных между собой по принципу «каждый со всеми» (такую сеть принято называть полносвязной). Тогда, руководствуясь описанной выше методикой, мы можем перейти от уравнения (1) к аналогичной (7) системе

$$\dot{u}_j = \lambda f(u_j(t-1))u_j + b \left(\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m h_s(u_s) \right) (u_* - u_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad (9)$$

где функции h_s заданы равенствами (8). В статье [8] математическая модель химических синапсов модифицирована так, что от (9) приходим к следующей системе:

$$\dot{u}_j = \left[\lambda f(u_j(t-1)) + b \left(\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m g(u_s) \right) \ln \frac{u_*}{u_j} \right] u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Здесь $b = \text{const} > 0$, $u_* = \exp(\lambda c)$, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, функция $f(u)$ та же самая, что и в (1), а функция $g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $g(u) > 0 \forall u > 0$, такова, что

$$g(0) = 0, \quad g(u) = 1 + O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u g'(u) = O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u^2 g''(u) = O\left(\frac{1}{u}\right) \quad (11)$$

при $u \rightarrow +\infty$. Мотивы, по которым в [8] вместо (9) выбирается система (10), состоят в следующем. Во-первых, при переходе от (9) к (10) общий качественный характер синаптической связи сохраняется, поскольку в обоих случаях соответствующие связующие слагаемые $bh_s(u_s)(u_* - u_j)$ и $bg(u_s)u_j \ln(u_*/u_j)$ меняют знак с «+» на «-» при увеличении потенциалов u_j и при прохождении их через критическое значение u_* . Во-вторых, для системы (10) удастся корректно определить предельный объект, которым оказывается некоторая релейная система с запаздыванием, и с его помощью построить асимптотики периодических решений.

Действительно, выполним в (10) замены

$$u_j = \exp(\lambda \omega_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

В результате для переменных ω_j , $1 \leq j \leq m$ получаем систему

$$\dot{\omega}_j = F(\omega_j(t-1), \varepsilon) + b(c - \omega_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(\omega_s, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (13)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$, а функции $F(\omega, \varepsilon)$, $G(\omega, \varepsilon)$ задаются равенствами

$$F(\omega, \varepsilon) = f\left(\exp\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\right), \quad G(\omega, \varepsilon) = g\left(\exp\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\right). \quad (14)$$

Далее, обратим внимание, что в силу свойств (2), (11) справедливы предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\omega, \varepsilon) = R(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } \omega < 0, \\ -a & \text{при } \omega > 0, \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\omega, \varepsilon) = H(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0, \\ 1 & \text{при } \omega > 0. \end{cases} \quad (15)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ система (13) переходит в релейную систему

$$\dot{\omega}_j = R(\omega_j(t-1)) + b(c - \omega_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m H(\omega_s), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (16)$$

В дальнейшем будем интересоваться вопросом о возможных аттракторах полностью связанных нейронных сетей. В случае модели (13) наличие предельного объекта (16) облегчает проблему отыскания ее аттракторов и позволяет, в частности, применить к ней общие результаты из [10] о соответствии между устойчивыми циклами релейной и релаксационной систем. Однако проблема поиска аттракторов системы (16) также достаточно сложна. В связи с этим, не претендуя на полноту анализа, ограничимся рассмотрением специальных ее периодических решений, описание которых приводится ниже.

Фиксируем произвольно индекс j_0 и разобьем множество $\{1, 2, \dots, m\}$ на два подмножества \mathcal{A}_{j_0} и \mathcal{B}_{j_0} по правилу:

$$\mathcal{A}_{j_0} = \{j = j_0\}, \quad \mathcal{B}_{j_0} = \{j = 1, 2, \dots, m, j \neq j_0\}. \quad (17)$$

Полагая далее в системе (16) компоненты

$$\omega_j = x \text{ при } j \in \mathcal{A}_{j_0}, \quad \omega_j = y \text{ при } j \in \mathcal{B}_{j_0}, \quad (18)$$

для отыскания переменных x , y получаем релейную систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R(x(t-1)) + (m-1)b(c-x)H(y), \\ \dot{y} &= R(y(t-1)) + b(c-y)(H(x) + (m-2)H(y)). \end{aligned} \quad (19)$$

В дальнейшем нас будет интересовать периодическое решение данной системы, компонента $y(t)$ которого строго отрицательна при всех $t \in \mathbb{R}$. Учитывая это обстоятельство и опираясь на явный вид функций $R(\omega)$, $H(\omega)$ (см. (15)), приходим к выводу, что указанное периодическое решение удовлетворяет одновременно и системе

$$\dot{x} = R(x(t-1)), \quad \dot{y} = 1 + b(c-y)H(x). \quad (20)$$

Система (20) допускает устойчивое периодическое решение

$$(x, y) = (x_0(t), y_0(t)) \quad (21)$$

периода T_0 , компонента $y_0(t)$ которого строго отрицательна, при условии, что параметры a, b, c связаны неравенством

$$\frac{1}{b} + c + \frac{a+1}{1 - \exp(-bt_0)} < 0, \quad (22)$$

где, напомним, t_0 – величина, фигурирующая в (5).

В самом деле, релейное уравнение для x , отщепляющееся от системы (20), проинтегрировано в статье [6]. В упомянутой работе показано, что оно имеет устойчивое периодическое решение $x = x_0(t)$, где $x_0(t)$ – функция (5). Подставляя далее $x = x_0(t)$ во второе уравнение из (20), приходим к выводу, что получившееся в итоге линейное неоднородное скалярное уравнение с T_0 -периодическими коэффициентами допускает устойчивое T_0 -периодическое решение $y = y_0(t)$, где

$$y_0(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{b} + c\right) (1 - \exp(-bt)) - z_0 \exp(-bt) & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ t - t_0 + \left(\frac{1}{b} + c\right) (1 - \exp(-bt_0)) - z_0 \exp(-bt_0) & \text{при } t_0 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad (23)$$

$$z_0 = -\frac{a+1}{1 - \exp(-bt_0)} - \frac{1}{b} - c. \quad (24)$$

Добавим еще, что в силу условия (22) и формулы (24) справедливы неравенства

$$z_0 > 0, \quad \frac{1}{b} + c + z_0 < 0. \quad (25)$$

А отсюда и из (23) последовательно заключаем, что

$$\dot{y}_0(t) < 0 \quad \forall t \in (0, t_0), \quad \dot{y}_0(t) > 0 \quad \forall t \in (t_0, T_0), \quad \max_{0 \leq t \leq T_0} y_0(t) = -z_0 < 0. \quad (26)$$

Свойство отрицательности $y_0(t)$ (см. (26)) свидетельствует о том, что периодическое решение (21) является одновременно и решением системы (19). Подставляя далее компоненты $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ этого решения в (18), получаем некоторое периодическое решение релейной системы (16). А поскольку индекс j_0 в (17) может принимать любое значение от 1 до m , то таким образом найдено m различных решений этой системы.

Вопрос о соответствии между построенными выше периодическими решениями релейной системы (16) и некоторыми периодическими решениями исходной релаксационной системы (13) разбивается на два этапа. Сначала мы установим существование у системы (13) периодических решений, асимптотически близких к (18), (21), а затем убедимся в их устойчивости.

Проблема существования интересующих нас периодических движений сводится к анализу аналогичной (19) вспомогательной релаксационной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x(t-1), \varepsilon) + (m-1)b(c-x)G(y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= F(y(t-1), \varepsilon) + b(c-y)(G(x, \varepsilon) + (m-2)G(y, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (27)$$

получающейся из (13) при условиях (18). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнено требование (22). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ у системы (27) существует цикл

$$(x, y) = (x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon)), \quad x_*(0, \varepsilon) \equiv 0 \quad (28)$$

периода $T_*(\varepsilon)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ этот цикл допускает асимптотику

$$T_*(\varepsilon) = T_0 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = \text{const} > 0, \quad (29)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |y_*(t, \varepsilon) - y_0(t)| = O(\varepsilon),$$

где $x_0(t), y_0(t)$ – функции (5), (23), T_0 – величина из (5).

Цикл (28) порождает целое семейство циклов

$$C_{j_0} : \omega_j = x_*(t, \varepsilon) \text{ при } j \in \mathcal{A}_{j_0}, \quad \omega_j = y_*(t, \varepsilon) \text{ при } j \in \mathcal{B}_{j_0} \quad (30)$$

исходной системы (13), где $j_0 = 1, 2, \dots, m$. Прежде чем перейти к вопросу об устойчивости этих циклов, сделаем два полезных наблюдения.

Во-первых, несложная проверка показывает, что система (13) инвариантна относительно замен

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \rightarrow (\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_m}), \quad (31)$$

где (j_1, j_2, \dots, j_m) – произвольная перестановка набора индексов $(1, 2, \dots, m)$. Во-вторых, любые два периодических режима из семейства (30) переходят друг в друга при соответствующей замене вида (31).

Суммируя вышесказанное, убеждаемся в том, что проблема устойчивости всех режимов (30) сводится к исследованию устойчивости только одного цикла

$$C_1 : \omega_1 = x_*(t, \varepsilon), \quad \omega_j = y_*(t, \varepsilon), \quad j = 2, \dots, m. \quad (32)$$

На этом пути получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Все периодические режимы (30), доставляемые Теоремой 1, экспоненциально орбитально устойчивы.

Завершая описание основных результатов данной статьи, отметим, что в системе (10) любому циклу (30) соответствует периодическое решение с компонентами

$$u_{j_0}(t, \lambda) = \exp\left(\frac{x_*(t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \Big|_{\varepsilon=1/\lambda}, \quad u_j(t, \lambda) = \exp\left(\frac{y_*(t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) \Big|_{\varepsilon=1/\lambda}, \quad j \neq j_0. \quad (33)$$

Объединяя свойства (26) функции (23) со свойствами $x_0(t) > 0 \forall t \in (0, t_0), x_0(t) < 0 \forall t \in (t_0, T_0)$ функции (5) и с асимптотическими формулами (29), приходим к выводу, что компонента $u_{j_0}(t, \lambda)$ цикла (33) совершает импульсные колебания, аналогичные показанным на рис. 1. Все же остальные компоненты $u_j(t, \lambda), j \neq j_0$ при $\forall t \in \mathbb{R}$ имеют порядок малости $O(\exp(-\lambda q)), q = \text{const} \in (0, z_0)$. Такого типа периодические решения будем называть режимами одиночного доминирования или 1-доминирования. С биологической точки зрения это означает, что, если сеть функционирует в таком режиме, то ровно один ее нейрон генерирует электрические импульсы, а все остальные нейроны «молчат».

2. Доказательство Теоремы 1

В техническом плане обоснование Теоремы 1 базируется на асимптотическом интегрировании системы (27) с начальными условиями из некоторого множества S . Для описания этого множества фиксируем постоянную σ_0 , удовлетворяющую условию

$$0 < \sigma_0 < \min \left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2a} \right), \quad (34)$$

и рассмотрим банахово пространство $E = C([-1 - \sigma_0, -\sigma_0]; \mathbb{R}^2)$ непрерывных по $t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ вектор-функций $\varphi(t) = \text{colon}(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ со значениями в \mathbb{R}^2 . Норму в E зададим обычным образом, то есть посредством формулы

$$\|\varphi\| = \max_{j=1,2} \max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |\varphi_j(t)|.$$

Интересующее нас множество начальных функций $S \subset E$ определим равенством

$$S = \{ \varphi(t) = \text{colon}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) : -q_1 \leq \varphi_1(t) \leq -q_2, \quad -q_3 \leq \varphi_2(t) \leq -q_4, \\ \varphi_1(-\sigma_0) = -\sigma_0, \quad z_\varphi \in \Omega \}, \quad (35)$$

где $q_1 > q_2 > 0$, $q_3 > q_4 > 0$ – некоторые универсальные (не зависящие от t, φ, ε) постоянные, выбор которых распорядимся в дальнейшем, через z_φ обозначен функционал

$$z_\varphi = -\varphi_2(-\sigma_0) - \sigma_0, \quad (36)$$

а множество Ω представляет собой отрезок вида

$$\Omega = [z_0 - \delta_0, z_0 + \delta_0]. \quad (37)$$

Здесь z_0 – величина (24), а постоянную $\delta_0 \in (0, z_0)$ считаем настолько малой, что

$$\frac{1}{b} + c + z < 0 \quad \forall z \in [z_0 - \delta_0, z_0 + \delta_0]. \quad (38)$$

Подчеркнем, что в силу (25) такое δ_0 заведомо найдется.

Общая схема доказательства Теоремы 1 состоит в следующем. Рассмотрим решение $\omega_\varphi(t, \varepsilon) = \text{colon}(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$, $t \geq -\sigma_0$, системы (27) с произвольным начальным условием $\varphi(t) \in S$ при $t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$, обозначим через $t = T_\varphi(\varepsilon)$ второй положительный корень уравнения

$$x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0 \quad (39)$$

(если он существует) и зададим оператор Π , действующий из S в E по правилу

$$\Pi(\varphi) = \omega_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon), \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (40)$$

Как будет показано в последующем, при подходящем выборе параметров q_j , $j = 1, \dots, 4$ оператор (40) определен на множестве (35) и, более того, $\Pi(S) \subset S$, $T_\varphi(\varepsilon) > 1$ при всех $\varphi \in S$. Далее, поскольку множество S замкнуто, ограничено и выпукло, а оператор Π в силу неравенства $T_\varphi > 1$ вполне непрерывен, то согласно принципу Шаудера он имеет в S хотя бы одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Ясно также, что решение $\omega(t, \varepsilon) = \omega_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ системы (27) является периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$. Что же касается искомого периодического решения (28), то оно получается из $\omega(t, \varepsilon)$ после некоторого сдвига по времени.

Заметим, что для реализации описанной выше программы действий достаточно знать равномерную по $\varphi \in S$ асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $\omega_\varphi(t, \varepsilon)$ на промежутке времени

$$-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2, \quad (41)$$

где параметр σ_0 удовлетворяет требованию (34). При построении этой асимптотики будем предполагать, что на отрезке (41) выполнено априорное условие

$$y_\varphi(t, \varepsilon) \leq -M \quad (42)$$

с некоторой не зависящей от t, φ, ε постоянной $M > 0$.

Объединяя неравенство (42) со свойствами (11) функции $g(u)$ и с явной формулой для $G(\omega, \varepsilon)$ (см. (14)), приходим к выводу, что

$$G(y_\varphi(t, \varepsilon), \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (43)$$

(здесь и в последующем одной и той же буквой q обозначаются различные не зависящие от t, φ, ε положительные константы, точные значения которых несущественны). Далее, принимая во внимание асимптотическую формулу (43), убеждаемся в том, что компонента $x_\varphi(t, \varepsilon)$ интересующего нас решения $\omega_\varphi(t, \varepsilon)$ системы (27) удовлетворяет уравнению вида

$$\dot{x} = F(x(t-1), \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (44)$$

Напомним, что уравнение, получающееся из (44) после отбрасывания добавки порядка малости $O(\exp(-q/\varepsilon))$, асимптотически проинтегрировано на отрезке (41) в статье [6]. Опираясь на результаты этой статьи, для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ приходим к следующей серии асимптотических формул.

- 1) На отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняется равномерное по t, φ асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (45)$$

- 2) На отрезке $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо равномерное по t, φ асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad (46)$$

где

$$v_0(\tau) = \tau + \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp s) - 1] ds. \quad (47)$$

Отметим еще, что

$$v_0(\tau) = \tau + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad v_0(\tau) = -a\tau + c_0 + O(\exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (48)$$

где

$$c_0 = \int_0^1 \frac{f(u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{f(u) + a}{u} du. \quad (49)$$

- 3) На промежутке времени $1 + \sigma_0 \leq t \leq t_0 + 1 - \sigma_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место равномерное по t, φ асимптотическое представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = 1 - a(t-1) + \varepsilon c_0 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad (50)$$

где c_0 – постоянная (49).

- 4) На отрезке $t_0 + 1 - \sigma_0 \leq t \leq t_0 + 1 + \sigma_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $x_\varphi(t, \varepsilon)$ допускает равномерное по t, φ асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -a + \varepsilon w_0(\tau)|_{\tau=(t-t_0-1)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad (51)$$

где

$$w_0(\tau) = -a\tau + c_0 + \int_{-\infty}^{\tau} [f(\exp(-as + c_0)) + a] ds. \quad (52)$$

Что же касается функции (52), то для нее справедливы асимптотические формулы

$$w_0(\tau) = -a\tau + c_0 + O(\exp(a\tau)), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad w_0(\tau) = \tau + O(\exp(-a\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (53)$$

- 5) На отрезке $t_0 + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t, φ имеем

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - T_0 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (54)$$

Характерная особенность системы (27) состоит в том, что ее компоненты x, y взаимодействуют между собой по принципу «ведущий – ведомый». Действительно, как уже было сказано выше, уравнение для x с экспоненциальной точностью отщепляется от (27). Это обстоятельство позволило нам воспользоваться результатами из [6] и получить для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ формулы (45)–(54). Теперь же обратимся ко второму уравнению из (27), считая в нем компоненту $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$ уже известной функцией. В результате с учетом равенства (43) и аналогичного асимптотического представления

$$F(y_\varphi(t-1, \varepsilon), \varepsilon) = 1 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(вытекающего из свойств (2) функции $f(u)$, предположения (42), явной формулы для $F(\omega, \varepsilon)$ и оценок $-q_3 \leq \varphi_2(t) \leq -q_4$) для отыскания $y = y_\varphi(t, \varepsilon)$ приходим к уравнению вида

$$\dot{y} = 1 + b(c - y)G(x_\varphi(t, \varepsilon), \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (55)$$

Интегрируя уравнение (55) методом шагов, то есть рассматривая последовательно промежутки времени длиной не более единицы, получаем очередную серию асимптотических формул. А именно, для компоненты $y_\varphi(t, \varepsilon)$ на этом пути выходят следующие равенства.

- 1) На отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq -\sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо равномерное по t, φ асимптотическое представление

$$y_\varphi(t, \varepsilon) = t - z + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right). \quad (56)$$

Что же касается величины z , то она представляет собой значение функционала (36) на соответствующей начальной функции $\varphi \in S$. Однако, как в случае (56), так и всюду ниже, индекс φ у z_φ для краткости мы опускаем.

2) На промежутке $-\sqrt{\varepsilon} \leq t \leq \sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t , φ имеем

$$y_{\varphi}(t, \varepsilon) = -z + \varepsilon(v_{1,1}(\tau) + \varepsilon v_{1,2}(\tau))|_{\tau=t/\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (57)$$

где

$$v_{1,1}(\tau) = \tau + b(c+z) \int_{-\infty}^{\tau} g(\exp s) ds, \quad v_{1,2}(\tau) = -b \int_{-\infty}^{\tau} v_{1,1}(s) g(\exp s) ds, \quad (58)$$

$$v_{1,1}(\tau) = \tau + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad v_{1,1}(\tau) = (1+b(c+z))\tau + c_1 + O(\exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (59)$$

$$c_1 = b(c+z) \int_{-\infty}^0 g(\exp s) ds + b(c+z) \int_0^{+\infty} [g(\exp s) - 1] ds, \quad (60)$$

$$v_{1,2}(\tau) = O(\tau \exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty;$$

$$v_{1,2}(\tau) = -b \left[(1+b(c+z)) \frac{\tau^2}{2} + c_1 \tau + c_2 \right] + O(\tau \exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (61)$$

$$c_2 = \int_{-\infty}^0 v_{1,1}(s) g(\exp s) ds + \int_0^{+\infty} [v_{1,1}(s) - (1+b(c+z))s - c_1] g(\exp s) ds + \\ + \int_0^{+\infty} [(1+b(c+z))s + c_1] \cdot [g(\exp s) - 1] ds. \quad (62)$$

3) На отрезке $\sqrt{\varepsilon} \leq t \leq t_0 - \sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняется равномерное по t , φ асимптотическое равенство

$$y_{\varphi}(t, \varepsilon) = y(t, z) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (63)$$

где

$$y(t, z) = \left(\frac{1}{b} + c \right) (1 - \exp(-bt)) - z \exp(-bt). \quad (64)$$

4) На отрезке $t_0 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq t_0 + \sqrt{\varepsilon}$ компонента $y_{\varphi}(t, \varepsilon)$ допускает при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерное по t , φ асимптотическое представление

$$y_{\varphi}(t, \varepsilon) = y(t_0, z) + \varepsilon(w_{1,1}(\tau) + \varepsilon w_{1,2}(\tau))|_{\tau=(t-t_0)/\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (65)$$

где

$$w_{1,1}(\tau) = \dot{y}(t_0, z)\tau + b(c - y(t_0, z)) \int_{-\infty}^{\tau} [g(\exp(-as + c_0)) - 1] ds, \quad (66)$$

$$w_{1,1}(\tau) = \dot{y}(t_0, z)\tau + O(\exp(a\tau)), \quad \tau \rightarrow -\infty;$$

$$w_{1,1}(\tau) = \tau + c_3 + O(\exp(-a\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

$$c_3 = b(c - y(t_0, z)) \left(\int_{-\infty}^0 [g(\exp(-as + c_0)) - 1] ds + \int_0^{+\infty} g(\exp(-as + c_0)) ds \right), \quad (67)$$

$$w_{1,2}(\tau) = -b\dot{y}(t_0, z)\frac{\tau^2}{2} - b\dot{y}(t_0, z)\int_{-\infty}^{\tau} s(g(\exp(-as + c_0)) - 1)ds - \\ - b\int_{-\infty}^{\tau} (w_{1,1}(s) - \dot{y}(t_0, z)s)g(\exp(-as + c_0))ds, \quad (68)$$

$$w_{1,2}(\tau) = -b\dot{y}(t_0, z)\frac{\tau^2}{2} + O(\tau \exp(a\tau)), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad (69)$$

$$w_{1,2}(\tau) = c_4 + O(\tau \exp(-a\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

$$c_4 = -b\dot{y}(t_0, z)\int_{-\infty}^0 s(g(\exp(-as + c_0)) - 1)ds - b\dot{y}(t_0, z)\int_0^{+\infty} sg(\exp(-as + c_0))ds - \\ - b\int_{-\infty}^{+\infty} (w_{1,1}(s) - \dot{y}(t_0, z)s)g(\exp(-as + c_0))ds, \quad (70)$$

а постоянная c_0 задана равенством (49).

- 5) На промежутке $t_0 + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива равномерная по t , φ асимптотическая формула

$$y_\varphi(t, \varepsilon) = y(t_0, z) + t - t_0 + \varepsilon c_3 + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (71)$$

Просуммируем полученные результаты. Объединяя формулы (45)–(71), приходим к выводу, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы равномерные по t из отрезка (41) и по $\varphi \in S$ асимптотические представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_\varphi(t) + O(\varepsilon), \quad y_\varphi(t, \varepsilon) = y_\varphi(t) + O(\varepsilon), \quad (72)$$

где

$$x_\varphi(t) = x_0(t), \quad y_\varphi(t) = \begin{cases} t - z & \text{при } -\sigma_0 \leq t \leq 0, \\ y(t, z) & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ t - t_0 + y(t_0, z) & \text{при } t_0 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad (73)$$

а $x_0(t)$ и $y(t, z)$ – функции (5) и (64), соответственно.

Следует, однако, напомнить, что все наши построения носят условный характер, поскольку были проделаны в предположении (42). Проверим теперь справедливость и самого неравенства (42). С этой целью привлечем вторую формулу (72) (пока априорную) и учтем, что в силу (38), (73) компонента $y_\varphi(t)$ обладает свойствами $\dot{y}_\varphi(t) > 0$ при $t \in (-\sigma_0, 0) \cup (t_0, T_0]$, $\dot{y}_\varphi(t) < 0$ при $t \in (0, t_0)$. А отсюда, в свою очередь, заключаем, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0} y_\varphi(t) = -\min(z, \Phi(z)), \quad (74)$$

где

$$\Phi(z) = z \exp(-bt_0) - a - 1 - \left(\frac{1}{b} + c\right)(1 - \exp(-bt_0)). \quad (75)$$

Заметим далее, что отображение $z \mapsto \Phi(z)$ имеет экспоненциально устойчивую неподвижную точку $z = z_0 > 0$ (см. (24)) и переводит отрезок (37) строго в себя. Поэтому $\min(z, \Phi(z)) \geq z_0 - \delta_0 > 0 \forall \varphi \in S$. А отсюда и из (74) заключаем, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ требование (42) действительно выполняется с любой фиксированной постоянной $M \in (0, z_0 - \delta_0)$.

Таким образом, при указанном выборе M все приведенные выше асимптотические представления для $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $y_\varphi(t, \varepsilon)$ обретают законную силу.

Равенства (72) позволяют локализовать интересующий нас второй положительный корень $t = T_\varphi(\varepsilon)$ уравнения (39). Действительно, из этих равенств вытекает, что значение $t = T_\varphi(\varepsilon) - \sigma_0$ асимптотически близко к $t = T_0 - \sigma_0$. А отсюда и из (54) автоматически следует, что корень $t = T_\varphi(\varepsilon)$ допускает при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерную по $\varphi \in S$ асимптотику

$$T_\varphi(\varepsilon) = T_0 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \quad (76)$$

Кроме того, из очевидного равенства $\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = 1 + O(\exp(-q/\varepsilon))$, имеющего место на отрезке $t_0 + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$, заключаем, что этот корень является простым.

Приступим к реализации описанной в начале данного раздела схемы доказательства Теоремы 1. В связи с этим обратимся к оператору (40), который согласно нашим построениям корректно определен на множестве (35). Покажем теперь, что при подходящем выборе констант q_j , $j = 1, \dots, 4$ в (35) оператор Π действует из S в S .

Действительно, из формул (72), (73) и включения $[T_0 - 1 - \sigma_0, T_0 - \sigma_0] \subset [t_0 + \sigma_0, T_0 - \sigma_0]$ (имеющего место в силу условия (34)) вытекает, что неравенства

$$-q_1 \leq x_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon), \varepsilon) \leq -q_2, \quad -q_3 \leq y_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon), \varepsilon) \leq -q_4$$

заведомо выполняются при $\forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$, $\forall \varphi \in S$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ с любыми фиксированными константами

$$q_1 > -\min_{T_0 - 1 - \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0} x_0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{T_0 - 1 - \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0} x_0(t), \quad (77)$$

$$q_3 > -\min_{z \in \Omega} (T_0 - 1 - t_0 - \sigma_0 + y(t_0, z)), \quad 0 < q_4 < -\max_{z \in \Omega} (T_0 - t_0 - \sigma_0 + y(t_0, z)). \quad (78)$$

Проверим теперь справедливость для функционала (36), вычисленного на $\Pi(\varphi)$, включения

$$z_{\Pi(\varphi)} \stackrel{\text{def}}{=} -y_\varphi(t, \varepsilon)|_{t=T_\varphi(\varepsilon)-\sigma_0} - \sigma_0 \in \Omega \quad \forall \varphi \in S. \quad (79)$$

С этой целью привлечем асимптотическое представление для $y_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (72)) и формулу для $y_\varphi(t)$ из (73). Из упомянутых формул следует, что выполняется равномерное по $\varphi \in S$ асимптотическое равенство

$$z_{\Pi(\varphi)} = \Phi(z) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (80)$$

где $\Phi(z)$ – функция (75). А так как очевидным образом $\Phi([z_0 - \delta_0, z_0 + \delta_0]) \subset (z_0 - \delta_0, z_0 + \delta_0)$, то при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ требуемое включение (79) действительно справедливо.

Итак, мы убедились в том, что при условиях (34), (38), (77), (78), наложенных на параметры σ_0 , δ_0 , q_j , $j = 1, \dots, 4$, оператор Π переводит множество S в себя. Далее, в силу формулы (76) и очевидного неравенства $T_0 > 1$ имеем $T_\varphi(\varepsilon) > 1 \forall \varphi \in S$, а значит, этот оператор является вполне непрерывным. Тем самым, согласно принципу Шаудера он допускает в S хотя бы одну неподвижную точку $\varphi_* = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Как уже было сказано выше, соответствующее решение

$$\omega(t, \varepsilon) = \omega_\varphi|_{\varphi=\varphi_*} = \text{colon}(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) \quad (81)$$

системы (27) оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$.

Отдельно остановимся на вычислении асимптотики решения (81). В связи с этим положим $z_*(\varepsilon) = z_{\varphi_*} = z_{\Pi(\varphi_*)}$. Из асимптотического представления (80) очевидным образом следует, что

$$z_*(\varepsilon) = z_0 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (82)$$

где, напомним, z_0 – величина (24). Что же касается асимптотических представлений для $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$, то они получаются из соответствующих асимптотических формул для $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $y_\varphi(t, \varepsilon)$ при подстановке в них $\varphi = \varphi_*$, $z = z_*(\varepsilon)$. На этом пути с учетом формулы (82) приходим к равномерным по t из отрезка (41) асимптотическим равенствам

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + O(\varepsilon), \quad y(t, \varepsilon) = y_0(t) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (83)$$

где $x_0(t)$, $y_0(t)$ – функции (5), (23). Добавим еще, что период $T_*(\varepsilon)$ цикла (81) в силу формулы (76) обладает требуемой асимптотикой из (29).

Для завершения обоснования Теоремы 1 рассмотрим корень $t = t_*(\varepsilon)$ уравнения $x(t, \varepsilon) = 0$, асимптотически близкий к нулю. Из представления для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (45)) и из равенства $\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = 1 + O(\exp(-q/\varepsilon))$, имеющего место на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$, вытекает, что этот корень является простым и допускает асимптотику

$$t_*(\varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (84)$$

Полагая затем

$$x_*(t, \varepsilon) = x(t + t_*(\varepsilon), \varepsilon), \quad y_*(t, \varepsilon) = y(t + t_*(\varepsilon), \varepsilon), \quad (85)$$

получаем искомое периодическое решение (28) системы (27). Добавим еще, что, в силу (84), для функций (85) сохраняются асимптотические представления вида (83). Теорема 1 полностью доказана.

3. Доказательство Теоремы 2

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости периодических режимов одиночного доминирования (30). Как уже отмечалось в разделе 1, все эти режимы имеют одинаковые свойства устойчивости. Поэтому достаточно рассмотреть лишь цикл (32). Линеаризуя на нем исходную систему (13), приходим к линейной системе вида

$$\dot{h}_1 = A_1(t, \varepsilon)h_1 + A_2(t, \varepsilon)h_1(t-1) + A_3(t, \varepsilon) \sum_{s=2}^m h_s, \quad (86)$$

$$\dot{h}_j = B_1(t, \varepsilon)h_j + B_2(t, \varepsilon)h_j(t-1) + B_3(t, \varepsilon)h_1 + B_4(t, \varepsilon) \sum_{\substack{s=2 \\ s \neq j}}^m h_s, \quad 2 \leq j \leq m, \quad (87)$$

где

$$A_1(t, \varepsilon) = -(m-1)bG(y_*(t, \varepsilon), \varepsilon), \quad A_2(t, \varepsilon) = F'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=x_*(t-1, \varepsilon)}, \quad (88)$$

$$A_3(t, \varepsilon) = b(c - x_*(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_*(t, \varepsilon)},$$

$$B_1(t, \varepsilon) = -b(G(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon) + (m-2)G(y_*(t, \varepsilon), \varepsilon)),$$

$$B_2(t, \varepsilon) = F'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_*(t-1, \varepsilon)}, \quad B_3(t, \varepsilon) = b(c - y_*(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=x_*(t, \varepsilon)}, \quad (89)$$

$$B_4(t, \varepsilon) = b(c - y_*(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_*(t, \varepsilon)}.$$

Как оказывается, при подходящей замене переменных система (86), (87) принимает блочную структуру: распадается на одну двумерную и $m-2$ одномерных подсистем.

Действительно, положим

$$e_1 = \text{colon}(1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = \text{colon}(0, 1, 1, \dots, 1), \quad (90)$$

$$e_{s+2} = \text{colon}\left(0, \underset{2}{1}, 0, \dots, 0, \underset{s+2}{-1}, 0, \dots, 0\right), \quad s = 1, \dots, m-2 \quad (91)$$

(нижние подписи в (91) обозначают номера соответствующих координат). Далее, обратим внимание, что векторы (90), (91) образуют базис в \mathbb{R}^m . Поэтому мы вправе выполнить в (86), (87) замену переменных

$$\text{colon}(h_1, h_2, \dots, h_m) = g_1(t)e_1 + g_2(t)e_2 + \sum_{s=3}^m g_s(t)e_s. \quad (92)$$

В результате убеждаемся в том, что пара коэффициентов $g_1(t)$, $g_2(t)$ из (92) удовлетворяет линейной системе

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= A_1(t, \varepsilon)g_1 + A_2(t, \varepsilon)g_1(t-1) + (m-1)A_3(t, \varepsilon)g_2, \\ \dot{g}_2 &= (B_1(t, \varepsilon) + (m-2)B_4(t, \varepsilon))g_2 + B_2(t, \varepsilon)g_2(t-1) + B_3(t, \varepsilon)g_1. \end{aligned} \quad (93)$$

Что же касается группы коэффициентов $g_s(t)$, $s = 3, \dots, m$, то все они являются решениями одного и того же скалярного уравнения

$$\dot{g} = (B_1(t, \varepsilon) - B_4(t, \varepsilon))g + B_2(t, \varepsilon)g(t-1). \quad (94)$$

Итак, вопрос об устойчивости цикла (32) системы (13) сводится к вопросу о расположении мультипликаторов системы (93) и уравнения (94). В связи с этим поясним смысл термина «мультипликатор» применительно, например, к системе (93).

Введем в рассмотрение линейный оператор $V(\varepsilon) : E \rightarrow E$ (так называемый оператор монодромии), действующий на произвольную начальную функцию $g(t) = \text{colon}(g_1(t), g_2(t)) \in E$ по правилу:

$$V(\varepsilon) : g(t) \mapsto g(t + T_*(\varepsilon), \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (95)$$

где $g(t, \varepsilon) = \text{colon}(g_1(t, \varepsilon), g_2(t, \varepsilon))$ – решение системы (93) на отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0$ с начальной функцией $g(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Отметим, что этот оператор очевидным образом компактен, а значит, его спектр дискретен. Мультипликаторами системы (93) по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть собственные значения оператора (95). В случае скалярного уравнения (94) мультипликаторы определяются аналогично.

Опираясь на оценку вида (42) для компоненты $y_*(t, \varepsilon)$ цикла (28) и свойства (2), (11) функций $f(u)$, $g(u)$, удастся несколько упростить коэффициенты (88), (89). А именно, нетрудно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место равномерные по $t \in [-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} A_j(t, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad j = 1, 3; \quad B_j(t, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad j = 2, 4; \\ B_1(t, \varepsilon) &= -bG(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned} \quad (96)$$

Далее, положим $\bar{x}(t, \varepsilon) = x(t, \lambda)|_{\lambda=1/\varepsilon}$, где $x(t, \lambda)$ – функция из (4), и заметим, что, поскольку компонента $x_*(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению вида (44), то автоматически

$$x_*(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (97)$$

Учитывая затем представление (97) в явной формуле для $A_2(t, \varepsilon)$, приходим к выводу, что

$$A_2(t, \varepsilon) = \bar{A}(t, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \bar{A}(t, \varepsilon) = F'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=\bar{x}(t-1, \varepsilon)}. \quad (98)$$

Приведенная информация (96)–(98) позволяет, отбрасывая экспоненциально малые добавки, перейти от (93) к упрощенной системе

$$\dot{g}_1 = \bar{A}(t, \varepsilon)g_1(t-1), \quad (99)$$

$$\dot{g}_2 = -bG(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon)g_2 + B_3(t, \varepsilon)g_1. \quad (100)$$

Заметим, далее, что в силу треугольной структуры этой системы ее мультипликаторы есть объединение мультипликаторов скалярного уравнения (99) и еще одного мультипликатора $\mu_0(\varepsilon)$, задающегося формулой

$$\mu_0(\varepsilon) = \exp\left(-b \int_0^{T_*(\varepsilon)} G(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon)dt\right). \quad (101)$$

Опираясь на асимптотическое представление для $x_*(t, \varepsilon)$ из (29), нетрудно показать, что $\mu_0(\varepsilon) \rightarrow \exp(-bt_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а значит, $\mu_0(\varepsilon) < 1$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Отдельно остановимся на уравнении (99), которое было асимптотически проинтегрировано в работе [6]. В упомянутой статье показано, что оно имеет простой единичный мультипликатор (поскольку (99) – линейаризация уравнения $\dot{x} = F(x(t-1), \varepsilon)$ на цикле $x = \bar{x}(t, \varepsilon)$), а все остальные его мультипликаторы лежат в круге вида

$$\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq M \exp(-q/\varepsilon)\}, \quad M, q = \text{const} > 0. \quad (102)$$

Для завершения анализа системы (93) заметим, что, так как ее коэффициенты отличаются от коэффициентов упрощенной системы (99), (100) на экспоненциально малые добавки, то общий качественный характер расположения мультипликаторов этих систем одинаков. В частности, система (93), будучи линейаризацией системы (27) на цикле (28), также допускает простой единичный мультипликатор. Еще один ее мультипликатор с точностью до величины порядка $O(\exp(-q/\varepsilon))$ совпадает с (101), а все остальные мультипликаторы находятся в круге (102).

Обратимся теперь к скалярному уравнению (94) и заметим, что, в силу (96), ему отвечает (после отбрасывания экспоненциально малых добавок) упрощенное уравнение

$$\dot{g} = -bG(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon)g. \quad (103)$$

Это уравнение, несмотря на то, что оно является обыкновенным, мы должны изучать в бесконечномерном фазовом пространстве E . В данном случае спектр аналогичного (95) оператора монодромии $V(\varepsilon)$ состоит из простого собственного значения (101) и из собственного значения $\mu = 0$ бесконечной кратности. При обратном же переходе от (103) к (94) общий характер расположения спектра оператора $V(\varepsilon)$ сохранится. Таким образом, исходное уравнение (94) имеет простой вещественный мультипликатор, экспоненциально близкий к (101), а все остальные его мультипликаторы лежат в круге вида (102).

Подведем итог. Из проделанного выше анализа следует, что система в вариациях (86), (87) допускает простой единичный мультипликатор, а все остальные ее мультипликаторы по модулю меньше единицы. Тем самым, установлен факт экспоненциальной орбитальной устойчивости цикла (32) системы (13). Теорема 2 доказана.

4. Периодические режимы группового доминирования

После изучения вопросов о существовании и устойчивости периодических режимов одиночного доминирования естественным образом возникает проблема нахождения так называемых периодических режимов k -доминирования. Эти режимы характеризуются тем, что группа из $k : 1 < k < m$ произвольно выбранных нейронов сети генерирует синхронные периодические

импульсы, а остальные нейроны практически не возбуждены. В модели (10) такие режимы обнаружить не удастся, но они существуют в системе

$$\dot{u}_j = \left[\lambda f(u_j(t-1)) + b \left(\sum_{s=1, s \neq j}^m g(u_s(t-\Delta)) \right) \ln \frac{u_*}{u_j} \right] u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (104)$$

получающейся из (10) при учете дополнительного запаздывания Δ в химических синапсах. Ниже ограничимся рассмотрением случая

$$t_0 + 1 < \Delta < T_0, \quad (105)$$

когда все встречающиеся ниже формулы выглядят наиболее просто.

Как и в разделе 1, обратимся к аналогичной (13) системе

$$\dot{\omega}_j = F(\omega_j(t-1), \varepsilon) + b(c - \omega_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(\omega_s(t-\Delta), \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (106)$$

получающейся из (104) при заменах (12). Далее, для описания интересующих нас режимов системы (106) фиксируем произвольно натуральное $k : 1 < k < m$ и предположим, что совокупность индексов $1 \leq j \leq m$ разбита на два непересекающихся подмножества \mathcal{A} и \mathcal{B} , состоящих из k и $m - k$ элементов, соответственно, то есть

$$\{1, 2, \dots, m\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}. \quad (107)$$

Тогда, очевидно, система (106) допускает решения с компонентами

$$\omega_j = x \text{ при } j \in \mathcal{A}, \quad \omega_j = y \text{ при } j \in \mathcal{B}, \quad (108)$$

где переменные x, y удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x(t-1), \varepsilon) + b(c-x)[(k-1)G(x(t-\Delta), \varepsilon) + (m-k)G(y(t-\Delta), \varepsilon)], \\ \dot{y} &= F(y(t-1), \varepsilon) + b(c-y)[kG(x(t-\Delta), \varepsilon) + (m-k-1)G(y(t-\Delta), \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (109)$$

Нас будет интересовать цикл

$$(x, y) = (x_k(t, \varepsilon), y_k(t, \varepsilon)), \quad x_k(0, \varepsilon) \equiv 0 \quad (110)$$

этой системы, компонента $x_k(t, \varepsilon)$ которого знакопеременна, а компонента $y_k(t, \varepsilon)$ строго отрицательна.

Для отыскания упомянутого цикла, опираясь на равенства (15), перейдем от (109) к соответствующей релейной системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R(x(t-1)) + b(c-x)[(k-1)H(x(t-\Delta)) + (m-k)H(y(t-\Delta))], \\ \dot{y} &= R(y(t-1)) + b(c-y)[kH(x(t-\Delta)) + (m-k-1)H(y(t-\Delta))], \end{aligned} \quad (111)$$

а затем – к упрощенной системе

$$\dot{x} = R(x(t-1)) + (k-1)b(c-x)H(x(t-\Delta)), \quad (112)$$

$$\dot{y} = R(y(t-1)) + kb(c-y)H(x(t-\Delta)), \quad (113)$$

получающейся из (111) при априорном предположении $y < 0$.

Обратимся сначала к уравнению (112) и заметим, что в случае (105) оно было проинтегрировано в статье [8]. Из результатов этой работы следует, что при условии

$$c < -\frac{1}{(k-1)b} + \frac{T_0 - \Delta}{\exp((k-1)bt_0) - 1} \quad (114)$$

упомянутое уравнение допускает устойчивый цикл $x_k(t)$ периода T_k , где

$$x_k(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta, \\ \theta_k(t - \Delta) & \text{при } \Delta \leq t \leq \Delta + t_0, \\ \theta_k(t_0) + t - \Delta - t_0 & \text{при } \Delta + t_0 \leq t \leq T_k, \end{cases} \quad x_k(t + T_k) \equiv x_k(t), \quad (115)$$

$$\theta_k(t) = \left(\frac{1}{(k-1)b} + c \right) (1 - \exp(-(k-1)bt)) + (\Delta - T_0) \exp(-(k-1)bt), \quad T_k = \Delta + t_0 - \theta_k(t_0). \quad (116)$$

Что же касается уравнения (113), то при $x = x_k(t)$ и при дополнительном условии

$$z_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 - \exp(-kbt_0)} \left\{ \Delta(\exp(-(k-1)bt_0) - \exp(-kbt_0)) - T_0 \exp(-(k-1)bt_0) + \left(\frac{1}{(k-1)b} + c \right) (1 - \exp(-(k-1)bt_0)) - \left(\frac{1}{kb} + c \right) (1 - \exp(-kbt_0)) \right\} > \Delta \quad (117)$$

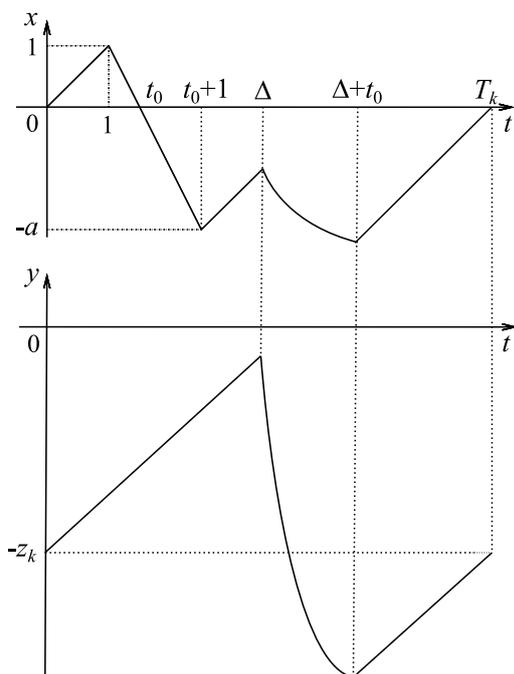


Рис. 3. Взаимное расположение графиков функций $x_k(t)$, $y_k(t)$ решения (x, y) системы (112), (113)

Fig. 3. Graphs of functions $x_k(t)$, $y_k(t)$ of solution (x, y) of the system (112), (113)

оно имеет устойчивое периодическое решение $y_k(t)$ периода T_k , где

$$y_k(t) = \begin{cases} t - z_k & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta, \\ \psi_k(t - \Delta) & \text{при } \Delta \leq t \leq \Delta + t_0, \\ \psi_k(t_0) + t - \Delta - t_0 & \text{при } \Delta + t_0 \leq t \leq T_k, \end{cases} \quad y_k(t + T_k) \equiv y_k(t), \quad (118)$$

$$\psi_k(t) = \left(\frac{1}{kb} + c \right) (1 - \exp(-kbt)) + (\Delta - z_k) \exp(-kbt). \quad (119)$$

Опираясь на условия (114), (117) и на явные формулы (115), (116), (118), (119), нетрудно показать, что $y_k(t) < 0 \forall t \in [0, T_k]$, а компонента $x_k(t)$ знакопеременна (взаимное расположение графиков функций $x_k(t)$, $y_k(t)$ представлено на рис. 3). Тем самым, найденное нами периодическое решение $(x_k(t), y_k(t))$ системы (112), (113) удовлетворяет и системе (111).

Аналогом Теоремы 1 в данном случае является следующая

Теорема 3. Пусть выполнены условия (105), (114), (117). Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (109) имеет цикл (110) периода $T_k(\varepsilon)$ с асимптотикой

$$T_k(\varepsilon) = T_k + O(\varepsilon), \quad \max_{0 \leq t \leq T_k(\varepsilon)} |x_k(t, \varepsilon) - x_k(t)| + \max_{0 \leq t \leq T_k(\varepsilon)} |y_k(t, \varepsilon) - y_k(t)| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (120)$$

На доказательстве сформулированной теоремы не останавливаемся, поскольку оно проводится по схеме, описанной в разделе 2.

Цикл (110) порождает множество периодических режимов системы (106), задающихся равенствами (108), (110). Обозначим это множество через \mathcal{U}_k и заметим, что количество элементов в нем совпадает с количеством всевозможных разбиений (107), а значит, равно C_m^k . Добавим еще, что, в силу асимптотических формул (120) и замен (12) в исходной системе (104), каждому циклу семейства \mathcal{U}_k соответствует периодический режим k -доминирования.

Перейдем к вопросу об устойчивости циклов из \mathcal{U}_k . В связи с этим обратим внимание, что любые два из них переходят друг в друга при подходящей замене вида (31), а значит, их свойства устойчивости одинаковы. Таким образом, достаточно разобраться с устойчивостью только одного цикла из \mathcal{U}_k , имеющего вид

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_k = x_k(t, \varepsilon), \quad \omega_{k+1} = \omega_{k+2} = \dots = \omega_m = y_k(t, \varepsilon). \quad (121)$$

Упомянутая выше проблема устойчивости сводится к анализу расположения мультипликаторов линейной системы, получающейся из (106) при линеаризации на цикле (121). Несложный подсчет показывает, что эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{h}_j = & A_1(t, \varepsilon)h_j + A_2(t, \varepsilon)h_j(t-1) + A_3(t, \varepsilon) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^k h_s(t-\Delta) + \\ & + A_4(t, \varepsilon) \sum_{s=k+1}^m h_s(t-\Delta), \quad 1 \leq j \leq k, \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_j = & B_1(t, \varepsilon)h_j + B_2(t, \varepsilon)h_j(t-1) + B_3(t, \varepsilon) \sum_{s=1}^k h_s(t-\Delta) + \\ & + B_4(t, \varepsilon) \sum_{\substack{s=k+1 \\ s \neq j}}^m h_s(t-\Delta), \quad k+1 \leq j \leq m, \end{aligned} \quad (123)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(t, \varepsilon) = & -b((k-1)G(x_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon) + (m-k)G(y_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon)), \\ A_2(t, \varepsilon) = & F'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=x_k(t-1, \varepsilon)}, \quad A_3(t, \varepsilon) = b(c-x_k(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=x_k(t-\Delta, \varepsilon)}, \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} A_4(t, \varepsilon) = & b(c-x_k(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_k(t-\Delta, \varepsilon)}; \\ B_1(t, \varepsilon) = & -b(kG(x_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon) + (m-k-1)G(y_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon)), \\ B_2(t, \varepsilon) = & F'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_k(t-1, \varepsilon)}, \quad B_3(t, \varepsilon) = b(c-y_k(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=x_k(t-\Delta, \varepsilon)}, \end{aligned} \quad (125)$$

$B_4(t, \varepsilon) = b(c-y_k(t, \varepsilon))G'_\omega(\omega, \varepsilon)|_{\omega=y_k(t-\Delta, \varepsilon)}$.
Общая схема исследования системы (122), (123) та же самая, что и в случае системы (86), (87). А именно, при соответствующей замене переменных она распадается на одну двумерную и $m-2$ одномерных подсистем.

Действительно, положим

$$e_{0,0} = \text{colon} \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-k} \right), \quad e_{0,1} = \text{colon} \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m-k} \right),$$

$$e_{1,s} = \text{colon} \left(1, 0, \dots, 0, \underbrace{-1, 0, \dots, 0}_{s+1} \right), \quad s = 1, \dots, k-1,$$

$$e_{2,s} = \text{colon} \left(0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_k, \underbrace{-1, 0, \dots, 0}_{k+1+s} \right), \quad s = 1, \dots, m-k-1$$

(как и в случае (91), нижние подписи здесь обозначают номера соответствующих координат). Выполним, далее, в (122), (123) аналогичную (92) замену переменных

$$\text{colon} (h_1, h_2, \dots, h_m) = g_{0,0}(t)e_{0,0} + g_{0,1}(t)e_{0,1} + \sum_{s=1}^{k-1} g_{1,s}(t)e_{1,s} + \sum_{s=1}^{m-k-1} g_{2,s}(t)e_{2,s}.$$

В результате приходим к выводу, что пара коэффициентов $(g_{0,0}(t), g_{0,1}(t))$ удовлетворяет линейной системе

$$\begin{aligned} \dot{g}_{0,0} = & A_1(t, \varepsilon)g_{0,0} + A_2(t, \varepsilon)g_{0,0}(t-1) + \\ & + (k-1)A_3(t, \varepsilon)g_{0,0}(t-\Delta) + (m-k)A_4(t, \varepsilon)g_{0,1}(t-\Delta), \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \dot{g}_{0,1} = & B_1(t, \varepsilon)g_{0,1} + B_2(t, \varepsilon)g_{0,1}(t-1) + \\ & + kB_3(t, \varepsilon)g_{0,0}(t-\Delta) + (m-k-1)B_4(t, \varepsilon)g_{0,1}(t-\Delta), \end{aligned} \quad (127)$$

а коэффициенты $g_{1,s}(t)$, $s = 1, \dots, k-1$ являются решениями одного и того же скалярного уравнения

$$\dot{g} = A_1(t, \varepsilon)g + A_2(t, \varepsilon)g(t-1) - A_3(t, \varepsilon)g(t-\Delta). \quad (128)$$

Аналогичным образом для коэффициентов $g_{2,s}(t)$, $s = 1, \dots, m-k-1$ приходим к уравнению

$$\dot{g} = B_1(t, \varepsilon)g + B_2(t, \varepsilon)g(t-1) - B_4(t, \varepsilon)g(t-\Delta). \quad (129)$$

Анализ получившихся уравнений (126)–(129) требует некоторой информации о коэффициентах (124), (125). В первую очередь, опираясь на оценку вида $y_k(t, \varepsilon) \leq -M$, $M = \text{const} > 0$ и свойства (2), (11) функций $f(u)$, $g(u)$, убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} A_1(t, \varepsilon) = & -(k-1)bG(x_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ A_4(t, \varepsilon) = & O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} B_1(t, \varepsilon) = & -kbG(x_k(t-\Delta, \varepsilon), \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ B_j(t, \varepsilon) = & O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad j = 2, 4, \end{aligned} \quad (131)$$

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq \Delta - \sigma_0} |B_3(t, \varepsilon)| = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \quad \int_{-\sigma_0}^{T_k(\varepsilon) - \sigma_0} |B_3(t, \varepsilon)| dt \leq M, \quad (132)$$

$$\int_{-\sigma_0}^{T_k(\varepsilon) - \sigma_0} |A_j(t, \varepsilon)| dt \leq M, \quad j = 2, 3, \quad M = \text{const} > 0.$$

Добавим еще, что поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициентов $A_2(t, \varepsilon)$, $A_3(t, \varepsilon)$ носит δ -образный характер. Как вытекает из результатов работы [8] (где изучена аналогичная ситуация), в нашем случае, во-первых,

$$\begin{aligned} \max_{t \in \Sigma_1} |A_2(t, \varepsilon)| &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right), & \max_{t \in \Sigma_2} |A_3(t, \varepsilon)| &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right), \\ \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1-\sigma_0} |A_2(t, \varepsilon)| + \max_{-\sigma_0 \leq t \leq \Delta-\sigma_0} |A_3(t, \varepsilon)| &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \quad (133)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= [-\sigma_0, T_k(\varepsilon) - \sigma_0] \setminus \{(1 - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \sqrt{\varepsilon}) \cup (t_0 + 1 - \sqrt{\varepsilon}, t_0 + 1 + \sqrt{\varepsilon})\}, \\ \Sigma_2 &= [-\sigma_0, T_k(\varepsilon) - \sigma_0] \setminus \{(\Delta - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \sqrt{\varepsilon}) \cup (\Delta + t_0 - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + t_0 + \sqrt{\varepsilon})\}; \end{aligned} \quad (134)$$

во-вторых,

$$\begin{aligned} \int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\sqrt{\varepsilon}} A_2(t, \varepsilon) dt &= -a - 1 + O(\sqrt{\varepsilon}), & \int_{t_0+1-\sqrt{\varepsilon}}^{t_0+1+\sqrt{\varepsilon}} A_2(t, \varepsilon) dt &= -1 - \frac{1}{a} + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{\Delta-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\sqrt{\varepsilon}} A_3(t, \varepsilon) dt &= b(c - \beta_1) + O(\sqrt{\varepsilon}), & \int_{\Delta+t_0-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+t_0+\sqrt{\varepsilon}} A_3(t, \varepsilon) dt &= \frac{b}{a}(c - \beta_2) + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (135)$$

где $\beta_1 = \Delta - T_0$, $\beta_2 = \Delta + t_0 - T_k$.

Опираясь на приведенную информацию (130)–(135), удастся провести асимптотическое интегрирование уравнений (126)–(129) и выяснить характер поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ их мультипликаторов. Как оказывается, система (126), (127) допускает простой единичный мультипликатор (поскольку она – линеаризация системы (109) на цикле (110)), еще один простой вещественный ее мультипликатор при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к пределу $\exp(-kb t_0)$, а все остальные мультипликаторы лежат в круге вида (102).

В случае скалярных уравнений (128), (129) ситуация аналогичная: у каждого из них существует простой вещественный мультипликатор, имеющий при $\varepsilon \rightarrow 0$ конечный предел μ_* , а все остальные их мультипликаторы находятся в круге (102). Для уравнения (128) упомянутый выше предел равен

$$\mu_* = -\frac{1}{k-1} + \left(1 + \frac{1}{k-1}\right) \exp(-(k-1)bt_0),$$

а для уравнения (129) имеем $\mu_* = \exp(-kb t_0)$. Остается добавить, что в обоих случаях $\mu_* \in (0, 1)$.

Суммируя проделанные построения, приходим к выводу, что справедлива следующая

Теорема 4. *Все циклы семейства \mathcal{U}_k , доставляемые Теоремой 3, экспоненциально орбитально устойчивы.*

Заключение

Из полученных нами результатов следует, что при соответствующем выборе параметров a , b , c и при увеличении m количество сосуществующих устойчивых циклов в системах (10) и (104) неограниченно растет, то есть наблюдается характерное для нейронной динамики явление буферности. В случае системы (10) удалось построить устойчивые периодические режимы 1-доминирования, а в случае системы (104) – устойчивые периодические режимы k -доминирования при $2 \leq k \leq m - 1$. Впрочем, следует добавить, что при условии (22) и при любом $\Delta > 0$ вспомогательная система (109) в случае $k = 1$ допускает релаксационный цикл, асимптотически близкий к $(x, y) = (x_0(t), y_0(t - \Delta))$, где $x_0(t)$, $y_0(t)$ – функции (5), (23). В исходной системе (104) этот цикл порождает m экспоненциально орбитально устойчивых периодических режимов 1-доминирования.

Заметим еще, что при условиях (105) и (114) (в случае $k = m$) система (104) имеет устойчивый периодический режим m -доминирования или однородный цикл. Этот цикл задается равенствами

$$u_j(t, \lambda) = \exp\left(\frac{x_m(t, \varepsilon)}{\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=1/\lambda}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где $x_m(t, \varepsilon)$, $x_m(0, \varepsilon) \equiv 0$ – релаксационный цикл скалярного уравнения

$$\dot{x} = F(x(t-1), \varepsilon) + (m-1)b(c-x)G(x(t-\Delta), \varepsilon),$$

асимптотически близкий к периодической функции (115) при $k = m$ (существование требуемого цикла установлено в статье [8]).

Итак, максимальное количество устойчивых циклов группового доминирования, сосуществующих в системе (104) при надлежащем выборе параметров, равно $2^m - 1$. Действительно, несложный анализ полученных выше условий существования этих циклов показывает, что упомянутого эффекта всегда можно добиться при фиксированных a , b , m и при достаточно больших по модулю отрицательных значениях параметра c . Что же касается вопроса о нахождении других аттракторов систем (10) и (104), отличных от режимов k -доминирования, то он остается открытым.

Следует отметить, что модель (104) с максимально большим числом связей позволяет описать наиболее сложное и разнообразное поведение, возможное в биологических нейронных ассоциациях. Особенностью рассмотренных нами режимов k -доминирования является то, что часть нейронов сети находится в неработающем (рефрактерном) состоянии. Несмотря на это, такие режимы могут играть существенную роль в функционировании рассматриваемых ассоциаций, поскольку в обработке информации мозгом могут играть роль не только аттракторы соответствующей динамической системы, но и различные переходные процессы. Учитывая относительную узость области притяжения соответствующих циклов, такие переходные процессы непременно появятся при условии учета случайных воздействий. Вместе с тем имеется простой способ применения построенных режимов для конструирования искусственных нейронных сетей с заданными свойствами. С этой целью каждому периодическому режиму k -доминирования может быть поставлен в соответствие бинарный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, где $\alpha_j = 1$, если j -й нейрон активен, и $\alpha_j = 0$ в противном случае. Принимая во внимание это обстоятельство, приходим к выводу, что данные режимы могут быть использованы для построения устройств с ассоциативной памятью на их основе.

Список литературы

1. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. Vol. 117, no. 4. P. 500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
2. *Ижикевич Е. М.* Динамические системы в нейронауке. Геометрия возбудимости и пачечной активности. М., Ижевск: Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2018. 520 с.
3. *Колесов А. Ю., Колесов Ю. С.* Релаксационные колебания в математических моделях экологии // *Тр. МИАН.* 1993. Т. 199. С. 3–124.
4. *Майоров В. В., Мышкин И. Ю.* Математическое моделирование нейронной сети на основе уравнений с запаздыванием // *Математическое моделирование.* 1990. Т. 2, № 11. С. 64–76.
5. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // *УМН.* 2015. Т. 70, № 3(423). С. 3–76. DOI: 10.4213/gm9659.
6. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Об одной модификации уравнения Хатчинсона // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2010. Т. 50, № 12. С. 2099–2112.
7. *Hutchinson G. E.* Circular causal systems in ecology // *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 1948. Vol. 50, no 4. P. 221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
8. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Об одном способе математического моделирования химических синапсов // *Дифференциальные уравнения.* 2013. Т. 49, № 10. С. 1227–1244. DOI: 10.1134/S0374064113100014.
9. *Somers D., Kopell N.* Rapid synchronization through fast threshold modulation // *Biol. Cybern.* 1993. Vol. 68, no. 5. P. 393–407. DOI: 10.1007/BF00198772.
10. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация // *Тр. МИАН.* 1997. Т. 216. С. 126–153.

References

1. Hodgkin AL, Huxley AF. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 1952;117(4):500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
2. Izhikevich EM. *Dynamical Systems in Neuroscience. The Geometry of Excitability and Bursting.* Cambridge, Mass.: MIT Press; 2006. 464 p.
3. Kolesov AY, Kolesov YS. Relaxational oscillations in mathematical models of ecology. *Proc. Steklov Inst. Math.* 1995;199:1–126.
4. Maiorov VV, Myshkin IY. Mathematical modeling of a neuron net on the basis of the equation with delays. *Math. Models Comput. Simul.* 1990;2(11):64–76 (in Russian).
5. Glyzin SD, Kolesov AY, Rozov NK. Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons. *Russian Math. Surveys.* 2015;70(3):383–452. DOI: 10.1070/RM2015v070n03ABEH004951.
6. Kolesov AY, Mishchenko EF, Rozov NK. A modification of Hutchinson's equation. *Comput. Math. Math. Phys.* 2010;50(12):1990–2002. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
7. Hutchinson GE. Circular causal systems in ecology. *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 1948;50(4):221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
8. Glyzin SD, Kolesov AY, Rozov NK. On a method for mathematical modeling of chemical synapses. *Diff. Equat.* 2013;49(10):1193–1210. DOI: 10.1134/S0012266113100017.

9. Somers D, Kopell N. Rapid synchronization through fast threshold modulation. *Biol. Cybern.* 1993;68(5):393–407. DOI: 10.1007/BF00198772.
10. Kolesov AY, Mishchenko EF, Rozov NK. A relay with delay and its C^1 -approximation. *Proc. Steklov Inst. Math.* 1997;216:119–146.



Глызин Сергей Дмитриевич – родился в Новгородской области (1957), окончил Ярославский государственный университет (1979). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ВГУ (1991) и доктора физико-математических наук в НИЯУ МИФИ (2009) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей. Опубликовал более 100 научных работ. Приказом Министерства образования и науки награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования». Зам. главного редактора научного журнала «Моделирование и анализ информационных систем».

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, glyzin.s@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6403-4061
AuthorID: 6481-9499



Колесов Андрей Юрьевич – родился в городе Старый Оскол Белгородской области (1961), окончил Ярославский государственный университет (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1988) и доктора (1991) физико-математических наук в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН в области дифференциальных уравнений и динамических систем. Профессор кафедры дифференциальных уравнений. Опубликовал более 200 научных работ, среди которых 6 монографий.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru
ORCID: 0000-0001-5066-0881
AuthorID: 5544