

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Научная статья  
УДК 535.015; 535.14; 535.530; 537.86  
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-727-738

**Внутрирезонаторный оптический параметрический осциллятор:  
модель динамической системы с различными временами запаздывания  
для накачивающего и сигнального излучения**

*Ю. А. Морозов*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН, Россия  
E-mail: yuri.mor@rambler.ru

Поступила в редакцию 4.05.2021, принята к публикации 3.06.2021,  
опубликована 30.09.2021

**Аннотация.** Большинство современных внутрирезонаторных оптических параметрических генераторов (осцилляторов, ОПО) строится по схеме с размещением однорезонаторного ОПО внутри резонатора лазера накачки. При этом резонаторы лазера накачки и излучения резонансного для поля ОПО (сигнального излучения) имеют, как правило, различные времена кругового обхода (запаздывания). Цель настоящего исследования состоит в построении математической модели внутрирезонаторного оптического параметрического осциллятора (ВРОПО) как динамической системы с двумя значениями запаздывания в резонаторах накачки и сигнального излучения и применении этой модели для анализа состояния стационарного режима и его устойчивости. Методы. Построенная математическая модель позволяет исследовать состояние равновесия динамической системы и с помощью решения характеристического уравнения – устойчивость этого состояния. Результаты. Установлено, что множество решений характеристического уравнения состоит из комплексно-сопряженных пар с мнимыми частями, находящимися в приблизительно кратном отношении с частотами межмодовых колебаний в резонаторах накачки и сигнала. Построена диаграмма устойчивости на плоскости параметров длина резонатора ОПО – положение нелинейного кристалла внутри этого резонатора. Определены особенности разбиения этой плоскости на области устойчивости/неустойчивости в зависимости от поведения корней характеристического уравнения. Обсуждение. Результаты проведенных исследований дополняют физические представления о внутрирезонаторных параметрических генераторах, поскольку позволяют рассматривать ВРОПО как динамическую систему с запаздыванием.

**Ключевые слова:** трехволновое нелинейно-оптическое взаимодействие, полупроводниковый дисковый лазер, оптический параметрический генератор, динамическая система с запаздывающим аргументом.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН.

**Для цитирования:** Морозов Ю. А. Внутрирезонаторный оптический параметрический осциллятор: модель динамической системы с различными временами запаздывания для накачивающего и сигнального излучения // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 727–738. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-727-738

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Intracavity optical parametric oscillator: Model of dynamic system with different values of time delay for pump and signal radiation

*Yu. A. Morozov*

Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Russia

E-mail: yuri.mor@rambler.ru

Received 4.05.2021, accepted 3.06.2021, published 30.09.2021

**Abstract.** Most of intracavity pumped optical parametric oscillators (OPO) are made nowadays according to a scheme with a single-resonance OPO located in the cavity of a pump laser. Usually the cavities of the pump and OPO (signal) emission have different values of round-trip time (delay). *Aim* of the study is therefore to build up the mathematical model of intracavity optical parametric oscillator (ICOPO) considered as a time-delay dynamic system with two values of delay in both cavities (the pump and signal). *Methods.* The model allows to analyze the steady state (equilibrium point) of the dynamic system and its stability with the help of characteristic equation's solution. *Results.* Countless set of the characteristic equation roots is shown to consist of complex-conjugate pairs with imaginary parts which are nearly multiples of intermode beat frequencies in the pump and signal cavities. The diagram of stability depending on the position of nonlinear crystal in the resonator was built on the parameter plane. Features of the plane partition into the areas of stability/instability vs behavior of the characteristic equation roots are examined. *Discussion.* The results of the study allow to consider an ICOPO as the time-delay dynamic system thus adding to the physical picture of intracavity parametric oscillators.

**Keywords:** three-wave nonlinear-optical interaction, semiconductor disk laser, optical parametric oscillator, time-delayed dynamic system.

**Acknowledgements.** This work was carried out within the framework of the state task of Kotelnikov IREE of RAS.

**For citation:** Morozov YuA. Intracavity optical parametric oscillator: Model of dynamic system with different values of time delay for pump and signal radiation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(5):727–738.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-727-738

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Квантово-каскадные лазеры (ККЛ), созданные впервые в 1994 году [1], в настоящее время претендуют на роль основных источников когерентного излучения в среднем инфракрасном (ИК) и терагерцевом диапазонах. Этому способствовали физические особенности функционирования и, в частности то, что оптические переходы в активной области ККЛ происходят между уровнями размерного квантования внутри зоны проводимости, что обеспечивает возможность варьирования длины волны излучения в широких пределах, независимо от ширины запрещенной зоны. Кроме того, внутризонный характер оптических переходов делает ККЛ униполярными приборами, то есть работающими на одном типе носителей (электронов). При этом в значительной степени подавляются процессы безызлучательной Оже-рекомбинации – одного из главных факторов, препятствующих продвижению длины волны излучения традиционных полупроводниковых лазеров на межзонных переходах в средний и дальний ИК диапазоны. Однако для ККЛ характерны и недостатки, которые, как это бывает, являются продолжением достоинств – переходы между уровнями размерного квантования требуют изготовления большого количества (несколько сотен) слоев, размеры которых должны выдерживаться с погрешностью, не превышающей единицы ангстрем. При этом возрастает сложность производства и стоимость этих приборов. К другим недостаткам ККЛ можно отнести то, что резонатор этих лазеров, образованный

пространством между плоскопараллельными зеркалами, является неустойчивым и поперечный профиль мод излучения далек от идеального гауссова профиля, создавая неудобства при использовании.

С другой стороны, еще с 60-х годов прошлого века известны и применяются лазеры, основанные на нелинейно-оптическом взаимодействии – оптические параметрические генераторы (осцилляторы, ОПО) и генераторы разностной частоты (ГРЧ) [2, 3]. При использовании для преобразования частоты современных кристаллов и методов, основанных на внутриврезонаторном нелинейно-оптическом взаимодействии, такие генераторы могут быть достаточно компактными и удобными в использовании [4–8]. К тому же, вследствие использования устойчивых резонаторов, поперечный профиль излучения этих устройств близок к идеальному, соответствующему фундаментальной гауссовой моде.

Для применения в устройствах спектроскопии высокого разрешения необходимы ОПО, работающие в непрерывном режиме. Однако для реализации непрерывного излучения в однорезонаторных ОПО (то есть устройствах, где лишь одно из электромагнитных полей, участвующих в нелинейно-оптическом взаимодействии, является резонансным) требуется непрерывный одночастотный лазер накачки с мощностью порядка десятков ватт. Заметим, что в ОПО взаимодействуют три оптических поля с различными частотами. Согласно традиционной терминологии, наиболее коротковолновое из этих полей называется накачкой, а остальные два – сигнальным и холостым в соответствии с возрастанием длины волны. Преимущество однорезонаторных ОПО, по сравнению с двух- или трехрезонаторными, состоит в устойчивости стационарного режима к малым изменениям параметров и предсказуемости перестройки частоты без перескоков между кластерами [9]. Использование резонансного возрастания интенсивности накачки вследствие размещения однорезонаторного ОПО внутри резонатора лазера накачки позволяет снизить требования к этому лазеру. Такой ОПО называется внутриврезонаторным параметрическим осциллятором (ВРОПО). Первоначально ВРОПО был продемонстрирован с титан-сапфировым лазером накачки [10], затем с лазером на легированном неодимом кристалле  $YVO_4$  [11] и, наконец, с накачкой от полупроводникового лазера с вертикальным внешним резонатором (ЛВВР) [12]. При этом накачка от ЛВВР, который также называют полупроводниковым дисковым лазером (ПДЛ, SDL), предпочтительна по сравнению с накачкой неодимовым лазером. Это обусловлено сокращением продолжительности переходных релаксационных колебаний вследствие значительно меньшего времени жизни (на несколько порядков величины) возбужденного состояния активной среды ПДЛ. В ВРОПО Стотарда [12] поле накачки (длина волны  $\lambda_p \approx 1$  мкм) и сигнального излучения (длина волны  $\lambda_s \approx 1.6$  мкм) резонируют в двух различных резонаторах, оптически разделенных с помощью дихроичного зеркала. Изготовление такого зеркала для более близких значений  $\lambda_p$  и  $\lambda_s$  и, значит, более длинноволнового холостого излучения является сложной технической задачей. Поэтому в 2015 году нами предложена концепция ВРОПО с одним общим резонатором для накачки и сигнала [8], сочетающая простоту устройства с его компактностью.

Для анализа стационарного состояния и динамики излучения ВРОПО, как правило, используется модель, предусматривающая разложение оптических полей по нормальным модам резонатора (модам Слэтера) [12–16]. При этом быстрые (по сравнению с временем обхода резонатора) колебания интенсивности полей остаются недоступными для анализа. В то же время известно [17], что внутриврезонаторный характер нелинейно-оптического взаимодействия в ВРОПО может приводить к сложностям в настройке и неустойчивости стационарного состояния вследствие развития этих быстрых колебаний. Для более всестороннего изучения особенностей динамического поведения ВРОПО с учетом возможных быстрых колебаний интенсивности излучения недавно нами предложена и апробирована новая математическая модель [18]. Модель сформулирована в виде системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, причем динамическими переменными являются числа фотонов в активном лазерном зеркале,

а влияние резонатора (и нелинейно-оптического взаимодействия в нем) учитывается с помощью запаздывающих функций динамических переменных. Указанная модель была применена для изучения стационарного состояния и устойчивости, а также переходного режима к стационарному состоянию в ВРОПО с общим резонатором для накачивающего и сигнального излучения [8]. В модели не учитывалось отличие во временах запаздывания для накачки и сигнала, которое, в основном, определяется дисперсией показателя преломления нелинейного кристалла. Для большинства ВРОПО, подобных [12], величина запаздывания для излучений накачки и сигнала является существенно различной и поэтому модель [18] нуждается в модификации.

В настоящей работе построена модель ВРОПО с различными резонаторами для накачивающего и сигнального излучений. Кроме того, в модели предполагается, что нелинейно-оптическое взаимодействие является сосредоточенным в сечении, располагающемся на произвольном расстоянии от зеркала, общего для обоих резонаторов. Модель применена для ВРОПО Стогарда [12] и определена область параметров, для которых реализуется устойчивость состояния непрерывной генерации.

### 1. Математическая модель ВРОПО с отдельными резонаторами для накачки и сигнального излучения

Схема ВРОПО с отдельными резонаторами накачки и сигнала показана на рис. 1 [12, 17]. Оптический параметрический осциллятор (генератор) сформирован между зеркалами  $M_2$  и  $M_{out}$  с высоким коэффициентом отражения (0.98–0.99) на длине волны  $\lambda_s$  сигнального излучения (показано пунктирной линией). ОПО содержит нелинейный кристалл (NLC)  $MgO:LiNbO_3$  с периодической доменной структурой. Часть резонатора ОПО, содержащая нелинейный кристалл, помещена в резонатор лазера накачки (pump), образованный между зеркалом  $M_{out}$ , поворотным зеркалом  $M_1$  и активным лазерным зеркалом SDL. Активное лазерное зеркало включает квантовые ямы, усиливающие излучение с длиной волны  $\lambda_p$  и размещенные в пучностях стоячей волны этого излучения. Оптическая накачка этих ям выполняется от диодного лазера (primary pump). Резонаторы накачки и сигнального излучения разделены с помощью дихроичного делителя (beam-splitter, BS), являющегося прозрачным для излучения накачки и сильно отражающим излучение сигнала. Холостое излучение (idler), зарождающееся в нелинейном кристалле, является нерезонансным и может свободно выходить через зеркало  $M_{out}$  с нанесенным на него антиотражающим покрытием для этого излучения.

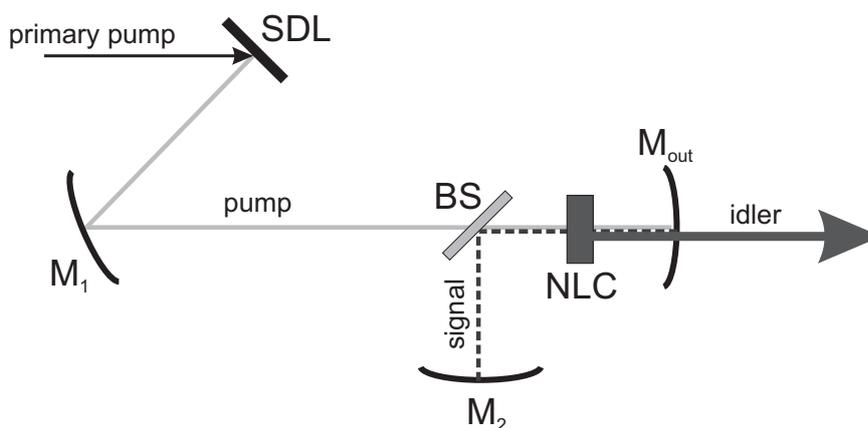


Рис. 1. Схема внутриврезонаторного ОПО с накачкой ПДЛ

Fig. 1. Scheme of intracavity OPO pumped by SDL

Математическая модель ВРОПО [18, 19], модифицированная с учетом различных значений запаздывания в резонаторах накачки и сигнала, может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \eta \left[ (G - 1) + \frac{1}{T} \left( \frac{a_{1\tau_p}^-}{a_1} - 1 \right) - \frac{\delta}{T} (a_{2\tau_p}^- + a_{2\tau_p}^+) \right] a_1, \\ \dot{\nu} &= \sigma - \nu - G a_1, \\ \dot{a}_2 &= \eta \left[ -1 + \frac{1}{T} \left( \frac{a_{2\tau_s}^-}{a_2} - 1 \right) + \frac{\delta}{T} (a_{1\tau_s}^- + a_{1\tau_s}^+) \right] a_2.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь функции  $a_1$  и  $a_2$  представляют числа фотонов в полях накачки и сигнала, нормированные на  $a_0 = \nu_{th}/\eta$  ( $\nu_{th}$  – число носителей на пороге лазерной генерации),  $\eta = \tau_r/\tau_{ph} \gg 1$  – отношение времени жизни носителей и фотонов накачки в активном зеркале, причем  $\tau_{ph} = (v_g \alpha_s)^{-1}$ , где  $v_g$  – групповая скорость, а  $\alpha_s$  – суммарные потери, приведенные к единице длины активного зеркала. Время  $t$  нормировано на величину времени жизни носителей, точки над переменными означают дифференцирование по  $t/\tau_r$ . Нормированные значения запаздывания в резонаторе накачки  $\tau_p = 2L_p/c\tau_r$  и сигнала  $\tau_s = 2L_s/c\tau_r$  определяются оптическими длинами  $L_p$ ,  $L_s$  и скоростью света  $c$  в свободном пространстве;  $\tau_p^\pm = \tau_p/2 \pm \tau_x$ ,  $\tau_s^\pm = \tau_s/2 \pm \tau_x$ , где  $\tau_x = L_x/c\tau_r$  и  $L_x$  – расстояние от зеркала  $M_{out}$  до нелинейного кристалла NLC (заметим, что в нашей модели мы полагаем нелинейное взаимодействие сосредоточенным в одном геометрическом сечении резонаторов. Это допустимо, если длина нелинейного кристалла намного меньше длин этих резонаторов). Величины с индексом  $\tau_{p,s}^{\pm}$  относятся к запаздывающему моменту времени. Для простоты мы полагаем, что потери излучения накачки и сигнального излучения за один проход по резонаторам имеют одинаковое значение  $T$ . Нормированный коэффициент усиления  $G$  равен

$$G = 1 + G_0 \ln \nu, \quad (2)$$

где  $G_0 = 4mG_{QW}/T$ ,  $m$  – число квантовых ям (КЯ, QW) в активной области,  $G_{QW}$  – коэффициент усиления, приходящийся на одну квантовую яму. Пороговое значение числа носителей может быть записано в виде  $\nu_{th} = m\pi\omega_{pp}^2 N_t \exp(1/G_0)$ , где  $\omega_{pp}$  – радиус пучка первичной оптической накачки,  $N_t$  – плотность числа носителей при просветлении активной среды. Коэффициент нелинейного взаимодействия определяется в виде  $\delta = \mu a_0/\tau_{in}$ , где  $\tau_{in} = 2L_{in}/v_g$  – время обхода активного зеркала,  $\mu = 2\gamma/[\pi(w_p^2 + w_s^2)]$ . Оптические поля накачки и сигнала представлены гауссовыми пучками с радиусами перетяжек внутри кристалла  $w_p$  и  $w_s$ ,

$$\gamma = \frac{32Z_0}{n_p n_s n_i} d_{14}^2 \left( \frac{L_c^2}{\lambda_p \lambda_s} \right) \hbar\omega_i, \quad (3)$$

$Z_0 = 120\pi$  – волновое сопротивление вакуума,  $d_{14}$  – элемент тензора нелинейной восприимчивости NLC,  $L_c$  – длина кристалла,  $\lambda_p$  и  $\lambda_s$  – длина волны накачки и сигнальной волны,  $n_{p,s,i}$  – коэффициенты преломления,  $\hbar\omega_i$  – энергия фотонов холостой волны. В уравнениях (1)  $\sigma$  соответствует мощности внешней первичной накачки  $P$ , нормированной на пороговое значение  $P_{th}$  лазерной генерации.

Состояние равновесия ( $a_{10}$ ,  $a_{20}$ ,  $\nu_0$ ) легко находится из решений уравнений (1) в виде:

$$\begin{aligned}G - 1 - 2\delta a_{20}/T &= 0, \\ \sigma - \nu_0 - G a_{10} &= 0, \\ -1 + 2\delta a_{10}/T &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Матрица  $\Delta(\lambda)$ , определяющая характеристическое уравнение задачи

$$\det(\Delta(\lambda)) = 0, \quad (5)$$

имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + D(1 - e^{-\lambda\tau_p}) & -\eta(b-1) & \eta e^{-\lambda\tau_p/2} \cosh \lambda\tau_x \\ G & \lambda + b & 0 \\ -\eta(G-1)e^{-\lambda\tau_s/2} \cosh \lambda\tau_x & 0 & \lambda + D(1 - e^{-\lambda\tau_s}) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $D = \eta/T \gg 1$ ,  $b = 1 + a_{10}dG/dv$ . Элементы матрицы  $\Delta$  рассчитываются в точке, отвечающей стационарному состоянию системы (1).

## 2. Результаты расчетов

Характеристическое уравнение (5) является трансцендентным и имеет бесконечное множество корней, состоящее из комплексно-сопряженных пар, мнимые части которых находятся вблизи значений  $\Omega_m^{(p,s)} = 2\pi m/\tau_{p,s}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Это означает, что изменение во времени малых отклонений от стационарного состояния происходит приблизительно на гармониках частоты межмодовых биений резонаторов. (Анализ проводился как с помощью пакета BIFTOOL [20], так и прямого решения уравнения (5)). На рис. 2 показана часть корней характеристического уравнения, расположенных в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\lambda$ . На рисунке можно выделить ветви  $p$  (звездочки) и  $s$  (круги). Частоты  $\text{Im}(\lambda)$  на ветви  $p$  приблизительно кратны частоте межмодовых биений  $\Omega_1^{(p)} = 2\pi/\tau_p \approx 9.4$  резонатора накачки длиной  $L_p = 200$  мм; на ветви  $s$  – частоте межмодовых биений  $\Omega_1^{(s)} = 2\pi/\tau_s \approx 29$  в резонаторе сигнального излучения ( $L_s = 65$  мм). Наибольший интерес представляет корень характеристического уравнения с максимальным значением действительной части, поскольку он определяет поведение отклонений от

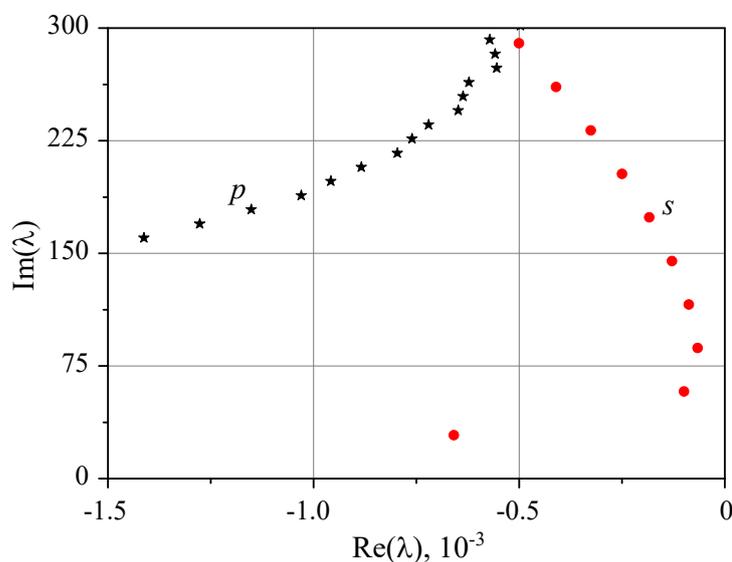


Рис. 2. Корни характеристического уравнения. Для ветвей  $p$  и  $s$  мнимая часть корней близка к  $\Omega_m^{(p)}$  и  $\Omega_m^{(s)}$ , соответственно

Fig. 2. Roots of the characteristic equation. For the branches marked by  $p$  and  $s$ , the imaginary part of the roots is close to  $\Omega_m^{(p)}$  and  $\Omega_m^{(s)}$ , respectively

стационарного состояния на конечной стадии переходного процесса. Из рис. 2 видно, что при выбранных значениях параметров такой корень принадлежит ветви  $s$  и имеет  $\text{Re}(\lambda) \sim 10^{-4}$ . Этому корню отвечает значение круговой частоты  $\Omega_3^{(s)} = 6\pi/\tau_s$  в единицах времени  $t/\tau_r$ , что для  $\tau_r = 2$  нс, принятой в расчетах, соответствует циклической частоте около 6.9 ГГц.

При некоторых значениях параметров ВРОПО максимальное значение действительной части корня характеристического уравнения может стать положительным и тогда состояние стационарной генерации теряет устойчивость. Параметрами, доступными для изменения при экспериментальной настройке устройства, являются длины резонаторов  $L_p$  и  $L_s$ , а также положение нелинейного кристалла  $L_x$  относительно зеркала  $M_{out}$  и величина первичной накачки  $\sigma$ . Однако для наглядного представления на графике два из этих параметров должны быть зафиксированы на некоторых значениях, и тогда область устойчивости можно изобразить внутри области изменения двух остальных параметров. Расчеты показывают, например, что при фиксированных значениях  $L_p = 200$  мм ( $\tau_p = 0.667$ ) и  $\sigma = 2.72\sigma_{OP0} = 30$  (где  $\sigma_{OP0}$  – величина первичной накачки на пороге возбуждения параметрического излучения), области устойчивости и неустойчивости чередуются при изменении длины резонатора сигнального излучения  $L_s$  и расстояния  $L_x$  от нелинейного кристалла до выходного зеркала  $M_{out}$  (рис. 3). При расчетах мы полагали, что  $L_x$  не может превышать текущего значения величины  $L_{sr}$ . Приведенный график косвенно подтверждает вывод экспериментаторов [12, 17] о склонности ВРОПО к возбуждению паразитных колебаний по сравнению с ОПО, размещенным вне лазерного резонатора. То есть преимущество ВРОПО, выражающееся в снижении мощности первичной накачки, может приводить к появлению неустойчивости режима стационарной генерации в некоторой области параметров и сопутствующих этому трудностях в настройке. Из рис. 3 следует, в частности, что устойчивый режим анализируемого ВРОПО наблюдается при  $62 \leq L_s \leq 71$  мм, ( $0.206 \leq \tau_s \leq 0.237$ ), а неустойчивый – при  $74 \leq L_s \leq 82$  мм ( $0.247 \leq \tau_s \leq 0.273$ ) и любом значении  $L_x$  из доступного интервала. Кроме того, для  $L_s$ , находящейся в интервале  $82 \leq L_s \leq 105$  мм ( $0.273 \leq \tau_s \leq 0.35$ ), устойчивость реализуется при размещении нелинейного кристалла вблизи середины резонатора сигнального излучения. Исключением является точка  $L_s = 100$  мм, для которой длины резонатора накачки и сигнала находятся в кратном соотношении (напомним, что график построен для

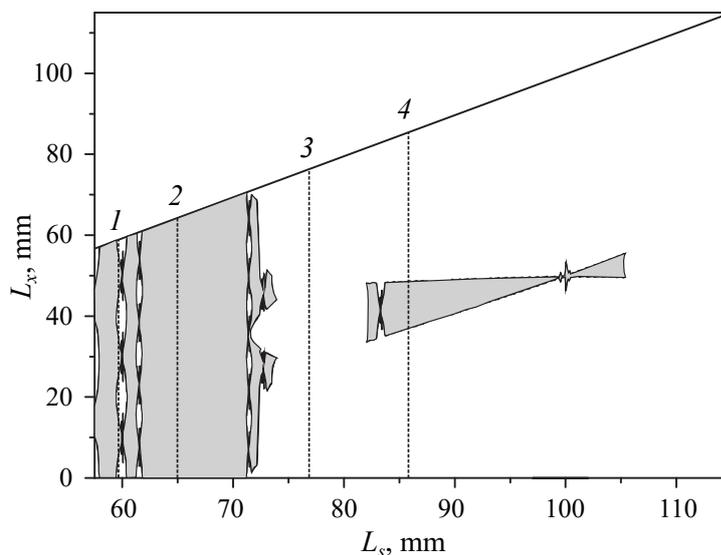


Рис. 3. Области устойчивости (заштрихованы) в выбранной части плоскости параметров ( $L_s, L_x$ )

Fig. 3. Areas of stability (shaded) in the chosen part of the plane ( $L_s, L_x$ )

$L_p = 200$  мм). Вывод о неустойчивости ВРОПО при кратном соотношении длин резонаторов  $L_p$  и  $L_s$  также известен из экспериментальных исследований.

Для более наглядного представления о поведении решений характеристического уравнения на рис. 4, *a, b, c, d* изображена зависимость действительной части корней этого уравнения от  $L_x$  при изменении вдоль прямых 1, 2, 3, 4, нанесенных на рис. 3. Показаны только корни, относящиеся к ветви  $s$  с номерами  $1 \leq m \leq 3$ , оказывающие влияние на устойчивость. Максимальные значения действительной части на рис. 4 выделены сплошными кривыми. Из рисунка видно, что для графиков характерны цикличность и симметрия относительно центрального значения  $L_x$ , причем, как показывает анализ свойств матрицы (6), частота изменения функции  $\text{Re}(\lambda)$  определяется номером корня, и для корня с номером  $m$  на всем интервале изменения  $L_x$  укладывается ровно  $m$  периодов этой функции. Из рис. 4 следует также, что при заданном значении  $L_{sr}$  и вариации  $L_x$  максимальное значение действительной части может наблюдаться для корней характеристического уравнения с различными номерами. Так, например, при  $L_{sr} = 59.7$  мм значения  $m$  изменяются как последовательность чисел (3,2,3,1,3,2,3) при изменении величины  $L_x$  (см. рис. 4, *a*). На графиках рис. 4, *b* и *c* видно, что стационарное состояние анализируемого ВРОПО является устойчивым/неустойчивым, соответственно, при любых доступных значениях

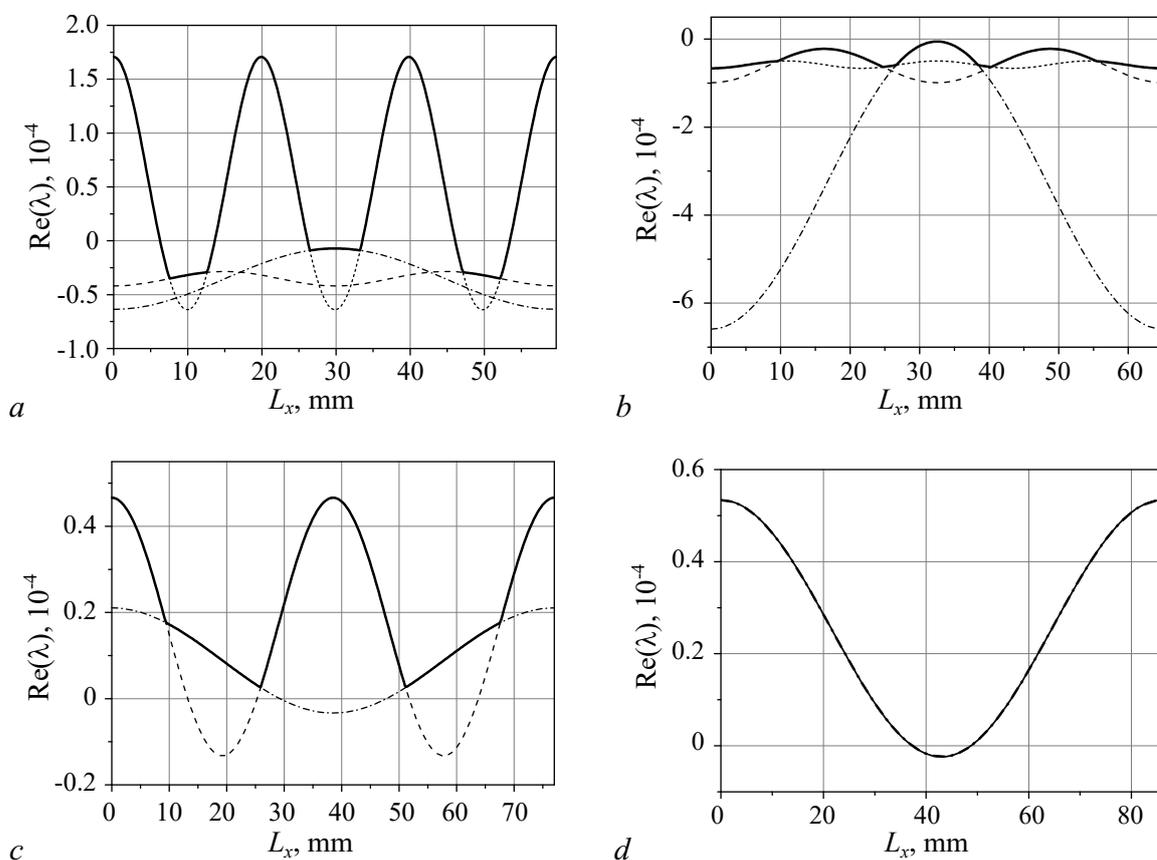


Рис. 4. Зависимость действительной части корней характеристического уравнения (5) от положения нелинейного кристалла  $L_x$ . Показаны только корни, для которых действительная часть принимает максимальное значение на некотором интервале внутри  $(0, L_{sr})$ . Графики *a, b, c, d* соответствуют изменению переменных вдоль прямых 1, 2, 3, 4 ( $L_{sr} = 59.7; 65; 77; 86$  мм) рис. 3

Fig. 4. Real part of characteristic equation roots vs position  $L_x$  of a nonlinear crystal. The roots with the maximal value of real part in some interval within  $(0, L_{sr})$  are only shown. Graphs *a, b, c, d* correspond to change of variables along the lines marked by 1, 2, 3, 4 ( $L_{sr} = 59.7; 65; 77; 86$  mm) on Fig. 3

$L_x$  (как и следовало ожидать, поскольку графики построены для линий 2 и 3 рис. 3). Рис. 4,  $d$  демонстрирует, что при изменении положения нелинейного кристалла внутри резонатора сигнала длиной  $L_{sr} = 86$  mm ( $\tau_s = 0.287$ ) устойчивость определяется поведением корня характеристического уравнения с мнимой частью, приблизительно равной  $\Omega_1^{(s)}$ , и достигается при расположении кристалла вблизи центра резонатора.

### Заключение

Построена математическая модель ОПО с внутррезонаторной накачкой полупроводниковым дисковым лазером (схема Стотарда [12]). Модель рассматривается как динамическая система с различными значениями запаздывания в резонаторах накачки и сигнального излучения. В модели предполагается, что нелинейно-оптическое (параметрическое) взаимодействие является сосредоточенным в одном сечении общей части резонаторов накачки и сигнала, расположенном на произвольном расстоянии от выходного зеркала устройства.

Выполнены расчеты стационарного режима ВРОПО и его линейной устойчивости при типичных значениях параметров. Показано, что множество решений характеристического уравнения состоит из комплексно-сопряженных пар с мнимыми частями, находящимися в приблизительно кратном отношении с частотами межмодовых колебаний в резонаторах накачки  $\Omega_1^{(p)}$  и сигнала  $\Omega_1^{(s)}$ .

На плоскости параметров  $(L_s, L_x)$  построена диаграмма устойчивости стационарного состояния ВРОПО. Показано, что устойчивость определяется корнями характеристического уравнения с невысокими номерами (значениями кратности)  $1 \leq m \leq 3$ , расположенными на ветви  $s$ . На диаграмме выделены области, где стационарное состояние является устойчивым или неустойчивым при произвольных значениях расстояния от нелинейного кристалла до выходного зеркала. Показано также, что существуют области параметров, внутри которых устойчивость сохраняется лишь при размещении нелинейного кристалла вблизи середины резонатора сигнального излучения. Показано, что зависимость действительной части корней характеристического уравнения от положения нелинейного кристалла  $L_x$  является симметричной относительно центрального сечения резонатора сигнала и периодически повторяющейся с частотой, определяемой номером корня.

### Список литературы

1. Faist J., Capasso F., Sivco D. L., Sirtori C., Hutchinson A. L., Cho A. Y. Quantum cascade laser // Science. 1994. Vol. 264, no. 5158. P. 553–556. DOI: 10.1126/science.264.5158.553.
2. Tittel F. K., Richter D., Fried A. Mid-Infrared Laser Applications in Spectroscopy // In: Sorokina I. T., Vodopyanov K. L. (eds) Solid-State Mid-Infrared Laser Sources. Vol. 89 of Topics in Applied Physics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. P. 458–529. DOI: 10.1007/3-540-36491-9\_11.
3. Дмитриев В. Г., Тарасов Л. В. Прикладная нелинейная оптика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 512 с.
4. Das S. Optical parametric oscillator: status of tunable radiation in mid-IR to IR spectral range based on ZnGeP<sub>2</sub> crystal pumped by solid state lasers // Optical and Quantum Electronics. 2019. Vol. 51, no. 3. P. 70. DOI: 10.1007/s11082-019-1782-3.
5. Wang K., Gao M., Yu S., Ning J., Xie Z., Lv X., Zhao G., Zhu S. A compact and high efficiency intracavity OPO based on periodically poled lithium niobate // Sci. Rep. 2021. Vol. 11, no. 1. P. 5079. DOI: 10.1038/s41598-021-84721-9.
6. Wu R. F., Phua P. B., Lai K. S., Lim Y. L., Lau E., Chng A., Bonnin C., Lupinski D. Compact 21-w

- 2- $\mu\text{m}$  intracavity optical parametric oscillator // *Opt. Lett.* 2000. Vol. 25, no. 19. P. 1460–1462. DOI: 10.1364/OL.25.001460.
7. Liu Y., Xie X., Ning J., Lv X., Zhao G., Xie Z., Zhu S. A high-power continuous-wave mid-infrared optical parametric oscillator module // *Appl. Sci.* 2018. Vol. 8, no. 1. P. 1–5. DOI: 10.3390/app8010001.
  8. Morozov Y.A., Morozov M.Y., Kozlovsky V.I., Okhotnikov O.G. Compact intracavity singly-resonant optical parametric oscillator pumped by GaSb-based vertical external cavity surface-emitting laser: Concept and the main operational characteristics // *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* 2015. Vol. 21, no. 1. P. 1603105. DOI: 10.1109/JSTQE.2014.2385310.
  9. Henderson A.J., Padgett M.J., Colville F.G., Zhang J., Dunn M.H. Doubly-resonant optical parametric oscillators: tuning behaviour and stability requirements // *Opt. Commun.* 1995. Vol. 119, no. 1–2. P. 256–264. DOI: 10.1016/0030-4018(95)00278-G.
  10. Colville F.G., Dunn M.H., Ebrahimzadeh M. Continuous-wave, singly resonant, intracavity parametric oscillator // *Opt. Lett.* 1997. Vol. 22, no. 2. P. 75–77. DOI: 10.1364/ol.22.000075.
  11. Stothard D.J.M., Ebrahimzadeh M., Dunn M.H. Low-pump-threshold continuous-wave singly resonant optical parametric oscillator // *Opt. Lett.* 1998. Vol. 23, no. 24. P. 1895–1897. DOI: 10.1364/OL.23.001895.
  12. Stothard D.J.M., Hopkins J.-M., Burns D., Dunn M.H. Stable, continuous-wave, intracavity, optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser (VECSEL) // *Opt. Express.* 2009. Vol. 17, no. 13. P. 10648–10658. DOI: 10.1364/OE.17.010648.
  13. Turnbull G.A., Dunn M.H., Ebrahimzadeh M. Continuous-wave, intracavity optical parametric oscillators: an analysis of power characteristics // *Appl. Phys. B.* 1998. Vol. 66, no. 6. P. 701–710. DOI: 10.1007/s003400050456.
  14. Debuisschert T., Raffy J., Pocholle J.-P., Papuchon M. Intracavity optical parametric oscillator: study of the dynamics in pulsed regime // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1996. Vol. 13, no. 7. P. 1569–1587. DOI: 10.1364/JOSAB.13.001569.
  15. Morozov Y.A. Transient power characteristics of a compact singly resonant intracavity optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2016. Vol. 33, no. 7. P. 1470–1475. DOI: 10.1364/JOSAB.33.001470.
  16. Morozov Y.A. Multi-mode dynamics of optical oscillators based on intracavity nonlinear frequency down-conversion // *Appl. Phys. B.* 2018. Vol. 124, no. 1. P. 12. DOI: 10.1007/s00340-017-6881-x.
  17. Hempler N., Robertson G., Hamilton C., Maker G.T., Malcolm G.P.A. Advances in narrow-linewidth continuous wave semiconductor disk laser pumped optical parametric oscillators // *Proc. SPIE.* 2012. Vol. 8242. P. 82420J. DOI: 10.1117/12.905889.
  18. Morozov Y.A., Morozov M.Y., Balakin M.I., Kochkurov L.A., Konyukhov A.I. Time-delay model of nonlinear frequency down-conversion in the cavity of a semiconductor disk laser // *Physical Review Applied.* 2019. Vol. 11, no. 4. P. 044027. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.11.044027.
  19. Морозов Ю.А. Анализ устойчивости состояния равновесия внутриврезонаторного оптического параметрического генератора: Метод разложения по малому параметру // *Известия вузов. ПНД.* 2020. Т. 28, № 4. С. 348–360. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-348-360.
  20. Engelborghs K., Luzyanina T., Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL // *ACM Transactions on Mathematical Software.* 2002. Vol. 28, no. 1. P. 1–21. DOI: 10.1145/513001.513002.

## References

1. Faist J, Capasso F, Sivco DL, Sirtori C, Hutchinson AL, Cho AY. Quantum cascade laser. *Science.* 1994;264(5158):553–556. DOI: 10.1126/science.264.5158.553.

2. Tittel FK, Richter D, Fried A. Mid-Infrared Laser Applications in Spectroscopy. In: Sorokina IT, Vodopyanov KL, editors. Solid-State Mid-Infrared Laser Sources. Vol. 89 of Topics in Applied Physics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2003. P. 458–529.  
DOI: 10.1007/3-540-36491-9\_11.
3. Dmitriev VG, Tarasov LV. Applied Nonlinear Optics. Moscow: FIZMATLIT; 2004. 512 p. (in Russian).
4. Das S. Optical parametric oscillator: status of tunable radiation in mid-IR to IR spectral range based on ZnGeP<sub>2</sub> crystal pumped by solid state lasers. Optical and Quantum Electronics. 2019; 51(3):70. DOI: 10.1007/s11082-019-1782-3.
5. Wang K, Gao M, Yu S, Ning J, Xie Z, Lv X, Zhao G, Zhu S. A compact and high efficiency intracavity OPO based on periodically poled lithium niobate. Sci. Rep. 2021;11(1):5079.  
DOI: 10.1038/s41598-021-84721-9.
6. Wu RF, Phua PB, Lai KS, Lim YL, Lau E, Chng A, Bonnin C, Lupinski D. Compact 21-w 2- $\mu$ m intracavity optical parametric oscillator. Opt. Lett. 2000;25(19):1460–1462.  
DOI: 10.1364/OL.25.001460.
7. Liu Y, Xie X, Ning J, Lv X, Zhao G, Xie Z, Zhu S. A high-power continuous-wave mid-infrared optical parametric oscillator module. Appl. Sci. 2018;8(1):1–5. DOI: 10.3390/app8010001.
8. Morozov YA, Morozov MY, Kozlovsky VI, Okhotnikov OG. Compact intracavity singly-resonant optical parametric oscillator pumped by GaSb-based vertical external cavity surface-emitting laser: Concept and the main operational characteristics. IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. 2015;21(1):1603105. DOI: 10.1109/JSTQE.2014.2385310.
9. Henderson AJ, Padgett MJ, Colville FG, Zhang J, Dunn MH. Doubly-resonant optical parametric oscillators: tuning behaviour and stability requirements. Opt. Commun. 1995;119(1–2):256–264.  
DOI: 10.1016/0030-4018(95)00278-G.
10. Colville FG, Dunn MH, Ebrahimzadeh M. Continuous-wave, singly resonant, intracavity parametric oscillator. Opt. Lett. 1997;22(2):75–77. DOI: 10.1364/ol.22.000075.
11. Stothard DJM, Ebrahimzadeh M, Dunn MH. Low-pump-threshold continuous-wave singly resonant optical parametric oscillator. Opt. Lett. 1998;23(24):1895–1897.  
DOI: 10.1364/OL.23.001895.
12. Stothard DJM, Hopkins JM, Burns D, Dunn MH. Stable, continuous-wave, intracavity, optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser (VECSEL). Opt. Express. 2009;17(13):10648–10658. DOI: 10.1364/OE.17.010648.
13. Turnbull GA, Dunn MH, Ebrahimzadeh M. Continuous-wave, intracavity optical parametric oscillators: an analysis of power characteristics. Appl. Phys. B. 1998;66(6):701–710.  
DOI: 10.1007/s003400050456.
14. Debuisschert T, Raffy J, Pocholle JP, Papuchon M. Intracavity optical parametric oscillator: study of the dynamics in pulsed regime. J. Opt. Soc. Am. B. 1996;13(7):1569–1587.  
DOI: 10.1364/JOSAB.13.001569.
15. Morozov YA. Transient power characteristics of a compact singly resonant intracavity optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser. J. Opt. Soc. Am. B. 2016;33(7):1470–1475. DOI: 10.1364/JOSAB.33.001470.
16. Morozov YA. Multi-mode dynamics of optical oscillators based on intracavity nonlinear frequency down-conversion. Appl. Phys. B. 2018;124(1):12. DOI: 10.1007/s00340-017-6881-x.
17. Hempler N, Robertson G, Hamilton C, Maker GT, Malcolm GPA. Advances in narrow-linewidth continuous wave semiconductor disk laser pumped optical parametric oscillators. Proc. SPIE. 2012;8242:82420J. DOI: 10.1117/12.905889.
18. Morozov YA, Morozov MY, Balakin MI, Kochkurov LA, Konyukhov AI. Time-delay model

- of nonlinear frequency down-conversion in the cavity of a semiconductor disk laser. *Physical Review Applied*. 2019;11(4):044027. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.11.044027.
19. Morozov YA. Analysis of steady-state stability for intracavity optical parametric oscillator: Method of small-parameter expansion. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(4): 348–360 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-348-360.
  20. Engelborghs K, Luzyanina T, Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 2002;28(1): 1–21. DOI: 10.1145/513001.513002.



*Морозов Юрий Александрович* – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

E-mail: [yuri.mor@rambler.ru](mailto:yuri.mor@rambler.ru)

ORCID: 0000-0001-7365-4425

AuthorID: 18689