



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(6)

Научная статья

УДК 517.929

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-869-891

Влияние связи на динамику трех осцилляторов с запаздыванием

А. А. Кащенко

Центр интегрируемых систем,
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, Россия
E-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 15.06.2021, принята к публикации 5.07.2021,
опубликована 30.11.2021

Аннотация. Цель настоящего исследования – построить асимптотику релаксационных режимов системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, описывающей три диффузионно связанных генератора с нелинейной финитной запаздывающей обратной связью в предположении, что множитель перед функцией обратной связи является достаточно большим. Также целью является изучение влияния связи между осцилляторами на нелокальную динамику рассматриваемой модели. **Методы.** Мы строим асимптотику решений рассматриваемой модели с начальными условиями из специального множества. По асимптотике решений получаем оператор сдвига по траекториям, переводящий множество начальных функций в множество того же типа. Главная часть этого оператора описывается конечномерным отображением. Изучение его динамики позволяет уточнить асимптотику решений исходной модели и сделать выводы о ее динамике. **Результаты.** Из вида построенного отображения следует, что при положительных параметрах связи у исходной модели, начиная с некоторого момента времени, все три генератора имеют одинаковую главную часть асимптотики – генераторы «синхронизируются». При отрицательных значениях параметра связи возможны как неоднородные релаксационные циклы, так и нерегулярные режимы. Описана связь этих режимов с режимами построенного конечномерного отображения. **Заключение.** Из результатов работы следует, что на динамику рассматриваемой модели принципиальным образом влияет значение параметра связи между генераторами.

Ключевые слова: запаздывание, нелокальная динамика, асимптотика, релаксационные колебания.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-1028.2020.1.

Для цитирования: Кащенко А. А. Влияние связи на динамику трех осцилляторов с запаздыванием // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 6. С. 869–891. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-869-891

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Influence of coupling on the dynamics of three delayed oscillators

A. A. Kashchenko

Center of Integrable Systems, Demidov Yaroslavl State University, Russia

E-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Received 15.06.2021, accepted 5.07.2021, published 30.11.2021

Abstract. The purpose of this study is to construct the asymptotics of the relaxation regimes of a system of differential equations with delay, which simulates three diffusion-coupled oscillators with nonlinear compactly supported delayed feedback under the assumption that the factor in front of the feedback function is large enough. Also, the purpose is to study the influence of the coupling between the oscillators on the nonlocal dynamics of the model. *Methods.* We construct the asymptotics of solutions of the considered model with initial conditions from a special set. From the asymptotics of the solutions, we obtain an operator of the translation along the trajectories that transforms the set of initial functions into a set of the same type. The main part of this operator is described by a finite-dimensional mapping. The study of its dynamics makes it possible to refine the asymptotics of the solutions of the original model and draw conclusions about its dynamics. *Results.* It follows from the form of the constructed mapping that for positive coupling parameters of the original model, starting from a certain moment of time, all three generators have the same main part of the asymptotics — the generators are “synchronized”. At negative values of the coupling parameter, both inhomogeneous relaxation cycles and irregular regimes are possible. The connection of these modes with the modes of the constructed finite-dimensional mapping is described. *Conclusion.* From the results of the work it follows that the dynamics of the model under consideration is fundamentally influenced by the value of the coupling parameter between the generators.

Keywords: delay, nonlocal dynamics, asymptotics, relaxation oscillations.

Acknowledgements. Research funded by the Council on grants of the President of the Russian Federation (MK-1028.2020.1).

For citation: Kashchenko AA. Influence of coupling on the dynamics of three delayed oscillators. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(6):869–891. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-869-891

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Системы дифференциальных уравнений с запаздыванием играют важную роль во многих областях науки: в медицине и физиологии [1–4], биологии [5, 6], физике [7–10]. Например, они моделируют барорефлекс [1, 3, 4], генные сети [2], системы передачи информации [10]. Отдельным классом систем дифференциальных уравнений с запаздыванием являются системы дифференциальных уравнений с финитной нелинейностью.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздыванием и финитной нелинейностью

$$\dot{u} = -\nu u + \lambda F(u(t - T)). \quad (1)$$

Здесь функция u является скалярной, параметры ν , λ , T – положительные, нелинейная функция F является финитной. Это уравнение является математической моделью генератора с нелинейной запаздывающей обратной связью с RC-фильтром нижних частот первого порядка [7, 8]. Генераторы, описываемые моделью (1), применяются при изготовлении гидролокаторов и усилителей класса D [8]. Также модель (1) описывает многие биологические процессы, в которых переменная состояния u распадается со скоростью, пропорциональной u в настоящее время, и создается со скоростью, зависящей от значения u некоторое время в прошлом (см. таблицу 1 в работе [5] и литературные ссылки в ней). Кроме того, динамика моделей с финитной нелинейностью представляет общенаучный интерес [6, 11, 12].

В работах [13–18] аналитически изучалась динамика модели (1). Были найдены сложные периодические режимы [16, 17], глобальный аттрактор [15], показано явление мультистабильности [14], и изучены свойства решений при достаточно больших значениях параметра T [13, 18].

В работах [19–22] изучалась динамика двух связанных генераторов вида (1)

$$\begin{cases} \dot{u}_1 + u_1 = \lambda F(u_1(t - T)) + \gamma(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 + u_2 = \lambda F(u_2(t - T)) + \gamma(u_1 - u_2) \end{cases}$$

при достаточно больших значениях параметра λ и разной величине связи между осцилляторами γ (параметр γ был взят равным единице, поскольку это значение мы можем получить в исходной модели с помощью подходящих нормировок). Было показано, что при положительных значениях связи ($\gamma > 0$) порядка единицы с некоторого момента времени оба уравнения имеют одинаковую главную часть асимптотики решения, при уменьшении положительной связи происходят бифуркации, в результате которых рождаются устойчивые неоднородные релаксационные циклы, возникает мультистабильность, а при отрицательной связи порядка единицы $-1/2 < \gamma < 0$ были найдены синхронные неоднородные режимы.

В настоящей работе мы рассмотрим динамическую систему, описывающую три диффузионно связанных осциллятора вида (1)

$$\begin{cases} \dot{u}_j + u_j = \lambda F(u_j(t - T)) + \gamma(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}), & (j = 1, 2, 3), \\ u_0 \equiv u_3, & u_4 \equiv u_1. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь u_j ($j = 1, 2, 3$) – скалярные переменные, параметры λ и T положительные, γ отлична от нуля, а знакопеременная ограниченная нелинейная кусочно-гладкая функция F является финитной, то есть вне отрезка $[-p, p]$ (где p – некоторая положительная константа) данная функция тождественно равна нулю. Кроме того, от функции $F(u)$ на отрезке $u \in [-p, p]$ мы требуем выполнения условий

$$\begin{aligned} F(p) = F(-p) &= 0, \\ F(u) &\neq 0 \text{ за исключением конечного числа точек,} \\ \text{если } F(u_*) &= 0, \text{ то существует } n \in \mathbb{N} \text{ такое, что } F^{(n)}(u_*) \neq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ключевое предположение состоит в том, что параметр λ является достаточно большим

$$\lambda \gg 1.$$

В работе мы будем строить асимптотику решений модели (2) при условиях (3), при достаточно больших значениях параметра λ , при различных ненулевых и независимых от λ значениях параметра связи между осцилляторами γ для всех начальных условий из некоторого множества S . Кроме того, мы будем изучать, как зависит динамика модели (2) от значений параметра γ .

Как и в работах [20–22], изучение нелокальной динамики модели (2) при условии $\lambda \gg 1$ будет проводиться с помощью специального метода большого параметра [9]. Вначале будет выбрано множество начальных условий S . Для всех начальных условий из этого множества будет построена асимптотика решений при $\lambda \rightarrow +\infty$ (см. раздел 1). Далее будет построен оператор сдвига по траекториям, переводящий множество начальных условий в множество такого же типа, и найдены главные части этого оператора при положительных и отрицательных значениях параметра γ (см. разделы 2 и 3). Эти главные части будут иметь вид конечномерных отображений. Будет исследована их динамика и установлена связь динамики построенных отображений с динамикой исходной системы при положительных значениях параметра γ (см. раздел 2) и при отрицательных значениях параметра γ (см. раздел 4).

1. Построение асимптотики решений

Запишем систему (2) в более удобном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} F(u_1(t-T)) \\ F(u_2(t-T)) \\ F(u_3(t-T)) \end{pmatrix} + \mathbb{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2\gamma - 1 & \gamma & \gamma \\ \gamma & -2\gamma - 1 & \gamma \\ \gamma & \gamma & -2\gamma - 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Рассмотрим линейную часть системы (4) – систему

$$\dot{u} = \mathbb{A}u, \quad (6)$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)^T$.

Выпишем решение системы (6) для произвольных начального момента времени τ и начальных условий $u(\tau) = (u_1(\tau), u_2(\tau), u_3(\tau))^T$:

$$u(t) = e^{\mathbb{A}(t-\tau)}u(\tau), \quad (7)$$

здесь

$$e^{\mathbb{A}t} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-t} + 2e^{-(1+3\gamma)t} & e^{-t} - e^{-(1+3\gamma)t} & e^{-t} - e^{-(1+3\gamma)t} \\ e^{-t} - e^{-(1+3\gamma)t} & e^{-t} + 2e^{-(1+3\gamma)t} & e^{-t} - e^{-(1+3\gamma)t} \\ e^{-t} - e^{-(1+3\gamma)t} & e^{-t} - e^{-(1+3\gamma)t} & e^{-t} + 2e^{-(1+3\gamma)t} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если все компоненты решения u системы (4) находятся вне полосы $|u_j(t)| < p$ ($j = 1, 2, 3$) на протяжении времени больше или равного величине запаздывания, то на следующем отрезке времени длины запаздывания система (4) будет иметь вид (6). Из этого факта и вида решения линейной системы (формула (7)) следует, что при $\gamma < -1/3$ у системы (4) существуют такие начальные условия, находящиеся вне полосы $|u_j(s)| < p$ ($j = 1, 2, 3$) при $s \in [-T, 0)$, что ни одна из компонент решения с этими начальными условиями никогда не попадет внутрь полосы $|u_j(s)| < p$. Более того, эти решения будут либо стремиться к константе (при $\gamma = -1/3$), либо стремиться к бесконечности (при $\gamma < -1/3$). Нас интересуют релаксационные решения, поэтому везде далее предполагаем, что выполняется неравенство $\gamma > -1/3$.

Рассмотрим произвольные начальные условия системы (4) из фазового пространства $C_{[-T,0]}(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющие условиям $|u_j(s)| \geq p$, $u_j(0) = b_j p$, где $s \in [-T, 0)$, $|b_j| \geq 1$ для всех $j = 1, 2, 3$. При $\gamma > -1/3$ существует такой момент времени $t_1 \geq 0$, что все компоненты решения на полуинтервале $t \in [t_1 - T, t_1)$ находятся вне полосы $|u_j| < p$, а на некотором интервале ненулевой длины, начинающемся с $t = t_1$, хотя бы одна из компонент решения $u_i(t)$ находится внутри полосы $|u_i(t)| < p$ (это следует из того, что при $\gamma > -1/3$ решение линейной системы (6) при $t \rightarrow +\infty$ стремится к нулю, поэтому не могут все три его компоненты быть вне полосы $|u_j(t)| < p$ на бесконечном промежутке времени).

Рассмотрим отрезок $[t_1 - T, t_1]$ и введем на нем множество начальных условий для системы (4). Обозначим это множество через $S(x_1, x_2, x_3)$. В $S(x_1, x_2, x_3)$ содержатся тройки $(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$ непрерывных на отрезке $s \in [t_1 - T, t_1]$ функций. Эти функции по модулю не меньше чем p на полуинтервале $s \in [t_1 - T, t_1)$:

$$|u_j(s)| \geq p \quad \text{при} \quad s \in [t_1 - T, t_1), \quad j = 1, 2, 3, \quad (8)$$

а в точке $s = t_1$ модуль хотя бы одной из функций равен p , а модули остальных функций больше или равны p :

$$u_j(t_1) = x_j p, \quad |x_j| \geq 1 \quad (j = 1, 2, 3), \quad \exists i \in \{1, 2, 3\} : |x_i| = 1. \quad (9)$$

При этом существует такая положительная константа δ , что при $t \in (t_1, t_1 + \delta)$ выполняется неравенство $|u_i(t)| < p$ (это требование означает, что хотя бы одна из компонент решения при $t = t_1$ попадает внутрь полосы $|u_i(t)| < p$).

Из вида решений линейной системы (7) нетрудно найти, что в случае $|x_1| = 1$ параметры x_1, x_2, x_3 , фигурирующие в описании множества $S(x_1, x_2, x_3)$, при $\gamma > 0$ будут принадлежать множеству

$$\left[\begin{cases} x_1 = 1, & |x_2| \geq 1, & |x_3| \geq 1, \\ x_3 < 2 + 1/\gamma - x_2, \\ x_1 = -1, & |x_2| \geq 1, & |x_3| \geq 1, \\ x_3 > -2 - 1/\gamma - x_2, \end{cases} \right. \quad (10)$$

а при $-1/3 < \gamma < 0$ – множеству

$$\left[\begin{cases} x_1 = 1, & |x_2| \geq 1, & |x_3| \geq 1, \\ x_3 > 2 + 1/\gamma - x_2, \\ x_1 = -1, & |x_2| \geq 1, & |x_3| \geq 1, \\ x_3 < -2 - 1/\gamma - x_2. \end{cases} \right. \quad (11)$$

Если же минимальным из модулей x_i будет $|x_2|$ (или $|x_3|$), то мы получим соответствующее множество, поменяв местами x_1 и x_2 (или x_1 и x_3 , соответственно) в формулах (10) и (11). На рис. 1 изображены множества (10) и (11).

Построим асимптотику всех решений системы (4) с начальными условиями из множества $S(x_1, x_2, x_3)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Будем интегрировать систему (4) методом шагов.

Пусть $t \in [t_1, t_1 + T]$. На рассматриваемом отрезке выполняются условия $F(u_j(t - T)) \equiv 0$ ($j = 1, 2, 3$), поэтому система (4) при $t \in [t_1, t_1 + T]$ принимает вид (6), и ее решение имеет вид (7), где $\tau = t_1$, $u(t_1) = (u_1(t_1), u_2(t_1), u_3(t_1))^T = (x_1 p, x_2 p, x_3 p)^T$.

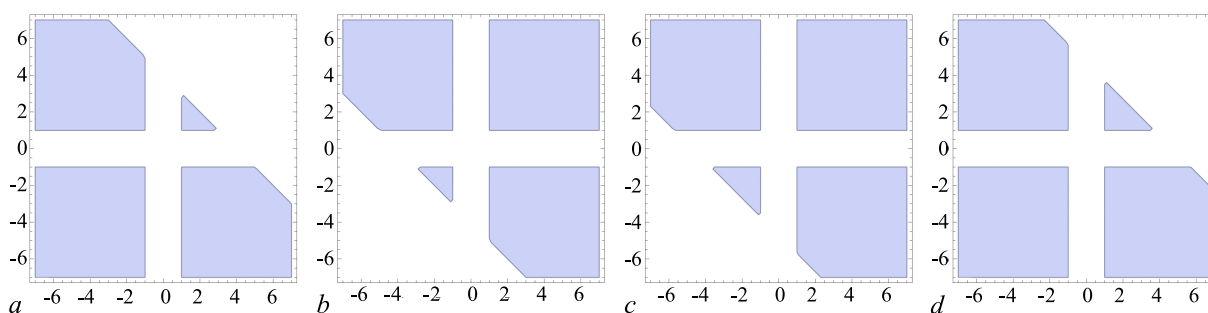


Рис. 1. a – Часть множества (10) при $x_1 = 1$, $\gamma = 0.5$; b – часть множества (10) при $x_1 = -1$, $\gamma = 0.5$; c – часть множества (11) при $x_1 = 1$, $\gamma = -0.15$; d – часть множества (11) при $x_1 = -1$, $\gamma = -0.15$. Легенда: горизонтальная ось – x_2 , вертикальная ось – x_3

Fig. 1. a – Part of the set (10) at $x_1 = 1$, $\gamma = 0.5$; b – part of the set (10) at $x_1 = -1$, $\gamma = 0.5$; c – part of the set (11) at $x_1 = 1$, $\gamma = -0.15$; d – part of the set (11) at $x_1 = -1$, $\gamma = -0.15$. Legend: horizontal axis – x_2 , vertical axis – x_3

Хотя бы одна из компонент u_j на промежутке $t \in (t_1, t_1 + \delta) \cap (t_1, t_1 + T)$ находится в полосе $(-p, p)$, поэтому на следующем шаге длины запаздывания нелинейность в системе (4) не будет тождественно нулевой, более того, она будет отлична от нуля на интервале $t \in (t_1 + T, t_1 + \delta + T) \cap (t_1 + T, t_1 + 2T)$.

Пусть $t \in [t_1 + T, t_1 + 2T]$. Функции $F(u_j(t - T))$ ($j = 1, 2, 3$) известны с прошлого шага, поэтому на текущем промежутке времени систему (4) можно рассматривать как линейную неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Отсюда получаем, что решение системы (4) на отрезке $t \in [t_1 + T, t_1 + 2T]$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = e^{\mathbb{A}(t-t_1)} \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ x_{3p} \end{pmatrix} + \lambda \mathbb{G}(t), \quad (12)$$

где

$$\mathbb{G}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ g_2(t, x_1, x_2, x_3) \\ g_3(t, x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \int_{t_1+T}^t e^{\mathbb{A}(t-s)} \begin{pmatrix} F(u_1(s-T)) \\ F(u_2(s-T)) \\ F(u_3(s-T)) \end{pmatrix} ds.$$

Пусть выполняются следующие два предположения.

Предположение 1. Для каждого i ($i = 1, 2, 3$) количество точек $t^* \in [t_1 + T, t_1 + 2T]$, при которых $g_i(t^*, x_1, x_2, x_3) = 0$, конечно. Для каждой точки t^* такой, что $g_i(t^*, x_1, x_2, x_3) = 0$, существует $j \in \mathbb{N}$ такой, что $\left. \frac{\partial^j g_i(t, x_1, x_2, x_3)}{\partial t^j} \right|_{t=t^*} \neq 0$.

Предположение 2. Для всех i ($i = 1, 2, 3$) верно $g_i(t_1 + 2T, x_1, x_2, x_3) \neq 0$.

Тогда в Предположении 2 при достаточно больших $\lambda > 0$ в точке $t = t_1 + 2T$ верно равенство

$$u(t_1 + 2T) = \lambda(\mathbb{G}(t_1 + 2T) + o(1)). \quad (13)$$

На следующем отрезке $t \in [t_1 + 2T, t_1 + 3T]$, как и ранее, будем рассматривать систему (4) как систему неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений. Верен следующий результат.

Лемма 1. При выполнении Предположений 1 и 2 на отрезке $t \in [t_1 + 2T, t_1 + 3T]$ асимптотика решения системы (4) при достаточно больших $\lambda > 0$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(t) &= \lambda(e^{\mathbb{A}(t-t_1-2T)} + o(1))\mathbb{G}(t_1 + 2T) = \\ &= \frac{\lambda}{3}(e^{t_1+2T-t} - e^{(1+3\gamma)(t_1+2T-t)})(g_1(t_1 + 2T) + g_2(t_1 + 2T) + g_3(t_1 + 2T)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \lambda e^{(1+3\gamma)(t_1+2T-t)} \begin{pmatrix} g_1(t_1 + 2T) \\ g_2(t_1 + 2T) \\ g_3(t_1 + 2T) \end{pmatrix} + o(\lambda). \end{aligned} \quad (14)$$

Формула (14) верна потому, что при условии выполнения Предположений 1 и 2 главную часть асимптотики решения модели (4) задает решение линейной задачи (6) с начальными условиями (13), а нелинейность дает вклад, имеющий порядок $o(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ (этот факт доказывается полностью аналогично Лемме 1 в работе [21]).

Изучим асимптотику решения модели (4) при $t > 3T$. Пока все три компоненты u_j находятся вне полосы $|u_j| \leq p$, система (4) имеет вид (6) и главная часть ее решения имеет вид (14). Если же какая-то из компонент решения попадает внутрь полосы $|u_j| < p$ в точке $t = t_0 > t_1 + 2T$, тогда на следующем шаге $t \in [t_0 + T, t_0 + 2T]$ нелинейность F станет ненулевой и может изменить главную часть асимптотики решения (а может и не изменить). Изменится ли главная часть асимптотики решения, зависит от значений выражений

$$G_i(t) = \sum_{j=1}^3 g_j(t_1 + 2T) + e^{-3\gamma(t-t_1-2T)} \left(3g_i(t_1 + 2T) - \sum_{j=1}^3 g_j(t_1 + 2T) \right), \quad (15)$$

($i = 1, 2, 3$) в окрестности точки t_0 .

Заметим, что при $t \in [t_1 + 2T, t_0]$ решение системы (4) в терминах функций G_i будет иметь вид

$$u_i(t) = \frac{\lambda}{3} (G_i(t) + o(1)) e^{-(t-t_1-2T)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Существуют две принципиально различные ситуации, когда одна (или несколько) функций u_i попадает внутрь полосы $|u_i| \leq p$ в точке $t = t_0 > t_1 + 2T$.

1. Второй множитель в формуле (16) при одном или нескольких i из множества $\{1, 2, 3\}$ в некоторой точке из асимптотически малой при $\lambda \rightarrow +\infty$ окрестности точки $t = t_0$ равен нулю.
2. При всех i из множества $\{1, 2, 3\}$ второй множитель в формуле (16) отличен от нуля в некоторой не зависящей от λ окрестности точки $t = t_0$, а третий множитель асимптотически мал при $\lambda \rightarrow +\infty$ в окрестности точки $t = t_0$.

Заметим, что, во-первых, оба случая не могут выполняться одновременно при достаточно больших значениях параметра λ (второй множитель зануляется при t не зависящих от λ , а третий множитель становится асимптотически малым при асимптотически больших по λ значениях t), а, во-вторых, существуют такие функции F и параметры γ , x_1 , x_2 и x_3 , что случай 1 не имеет места (например, это верно в случае $\gamma > 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ и функции $F(u)$, принимающей только положительные значения на интервале $u \in (-p, p)$). Пусть функция F и параметры γ , x_1 , x_2 и x_3 такие, что случай 1 реализуется. Тогда верен следующий результат.

Лемма 2. Пусть хотя бы одна из компонент решения системы (4) попадает внутрь полосы $|u_i| < p$ в точке $t = t_0 > t_1 + 2T$ и формула (14) верна на отрезке $t \in [t_1 + 2T, t_0]$. Если в асимптотически малой окрестности точки $t = t_0$ существует точка, в которой второй множитель в формуле (16) равен нулю, тогда главный член асимптотики решения задачи (4) на отрезке $t \in [t_0 + T, t_0 + 2T]$ будет иметь вид (14).

Доказательство. Для начала рассмотрим наименьшее значение $t_0 > t_1 + 2T$, при котором одна или несколько компонент решения попадают в полосу $|u_i| < p$.

Во-первых, заметим, что, если второй множитель в формуле для u_i (16) равен нулю, то при достаточно больших $\lambda > 0$ существует t_* такое, что $G_i(t_*) = 0$ и $|t_0 - t_*| = o(1)$, при этом $t_* = O(1)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Во-вторых, отметим, что каждое из уравнений $G_i(t) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) имеет не более одного корня $t_* > t_1 + 2T$ (более того, три уравнения $G_1(t) = 0$, $G_2(t) = 0$ и $G_3(t) = 0$ имеют в совокупности не более двух корней, удовлетворяющих неравенству $t > t_1 + 2T$).

В-третьих, отметим, что, если $G_i(t_*) = 0$, то $G'_i(t_*) \neq 0$.

Зафиксируем произвольное небольшое положительное значение δ так, чтобы при $t = t_0 - \delta$ все три компоненты решения были вне полосы $|u_i| < p$ (оно существует в силу Предположения 2 и условия $t_0 > t_1 + 2T$). Тогда на отрезке $t \in [t_0 - \delta, t_0 - \delta + T]$ решение задается формулой (14), и, следовательно, на этом отрезке для функций G_i выполняется Предположение 1 (с заменой временного отрезка $[t_1 + T, t_1 + 2T]$ на $[t_0 - \delta, t_0 - \delta + T]$). Если в точке $t = t_0 - \delta + T$ функции G_i будут отличны от нуля (то есть для них будет выполнено Предположение 2), то главную часть асимптотики решения системы (4) на отрезке $[t_0 - \delta + T, t_0 - \delta + 2T]$ задает решение линейной системы (6) с начальными условиями в точке $t = t_0 - \delta + T$ (доказательство этого факта полностью повторяет доказательство Леммы 1). Если же какая-то из функций G_i в этой точке равняется нулю, то отступим назад на малое, но фиксированное значение δ_1 , тогда в точке $t_0 - \delta - \delta_1 + 2T > t_0 - \delta + T$ выполняется Предположение 2, следовательно, на отрезке $[t_0 - \delta - \delta_1 + T, t_0 - \delta - \delta_1 + 2T]$ для решения системы (4) верна формула (14). Поскольку корней уравнений $G_i(t) = 0$ не более двух, то действуя так же, мы можем показать, что данная асимптотика верна при $t \in [t_0 - \delta - \delta_1 + 2T, t_0 - \delta - \delta_1 + 3T]$, поэтому она верна $t \in [t_0, t_0 + 2T]$. $\square$

Заметим, что в силу того, что суммарно корней уравнений $G_i(t) = 0$ не более двух, то возможно существование еще одного значения t_0 , для которого выполняется первый случай. Тем не менее и для него Лемма 2 верна (доказательство полностью аналогично приведенному выше).

Для дальнейших рассуждений нам понадобится ввести обозначение для времени выхода из полосы $|u_i| < p$ в случае 1 (если дважды наблюдался случай 1, тогда возьмем максимальное из этих времен, а если его не было, то возьмем в качестве него значение $t_1 + 2T$). Обозначим этот момент времени как t_L . Заметим, что при $\lambda \rightarrow +\infty$ величина t_L имеет оценку $O(1)$.

Из Леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. При всех $t > t_L$ все компоненты u_i решения системы (4) находятся вне полосы $|u_i| < p$ до тех пор, пока не произойдет случай 2.

Следствие 2. При всех $t > t_1 + 2T$, пока не произойдет случай 2, решение системы (4) имеет вид (14).

Пусть произошел случай 2. Перепишем формулу (14) в другом виде. Главная часть асимптотики решения системы (4) на промежутке $t \in [t_1 + 2T, t_0]$ – решение линейной системы (6), где у матрицы $\mathbb{A}$ собственные значения -1 кратности один (соответствующий собственный вектор $(1, 1, 1)^T$) и $-(1 + 3\gamma)$ кратности два (соответствующие собственные векторы $(-1/2, -1/2, 1)^T$ и $(1, -1/2, -1/2)^T$). Поэтому решение системы (4) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \lambda \left(z_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + o(1) \right) e^{(t_1 + 2T - t)(1 + 3\gamma)} + \lambda(z_3 + o(1)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(t_1 + 2T - t)}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2}{3} (g_3(t_1 + 2T) - g_2(t_1 + 2T)), \\ z_2 &= \frac{2}{3} (g_1(t_1 + 2T) - g_2(t_1 + 2T)), \\ z_3 &= \frac{1}{3} (g_1(t_1 + 2T) + g_2(t_1 + 2T) + g_3(t_1 + 2T)). \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим две ситуации: $\gamma > 0$ и $-1/3 < \gamma < 0$.

Пусть $\gamma > 0$. Предположим, что выполнено условие невырожденности

$$z_3 \neq 0 \quad (19)$$

и произошел случай 2. Тогда существуют положительные константы M_0 , m_1 и M_1 такие, что в некоторой не зависящей от λ окрестности точки $t = t_0$ при всех $i = 1, 2, 3$ выполняются неравенства

$$|u_i| = |G_i(t) + o(1)| |(\lambda/3)e^{(t_1+2T-t_0)}| \leq M_0, \quad 0 < m_1 < |G_i(t) + o(1)| < M_1.$$

Следовательно, для положительных γ выполняется неравенство $|\lambda e^{(t_1+2T-t_0)}| < M_2$, где M_2 – некоторая положительная константа. Отсюда мы получаем, что при достаточно больших λ

$$t_0 - t_1 = (1 + o(1)) \ln \lambda, \quad (20)$$

и что в окрестности точки $t = t_0$ решение системы (4) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \lambda(z_3 + o(1)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(t_1+2T-t)}. \quad (21)$$

Теперь рассмотрим случай отрицательных значений параметра связи: $-1/3 < \gamma < 0$. Предположим, что выполнено следующее условие невырожденности:

$$\left(-\frac{z_1}{2} + z_2\right) \cdot \left(-\frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{2}\right) \cdot \left(z_1 - \frac{z_2}{2}\right) \neq 0 \quad (22)$$

(при выполнении этого условия ни одна из компонент вектора – первого слагаемого в формуле (17) не будет нулевой) и произошел случай 2.

Тогда существуют такие константы M_0 , m_3 и M_3 , что в некоторой не зависящей от λ окрестности точки $t = t_0$ при всех $i = 1, 2, 3$ выполняются условия

$$|u_i| = |(G_i(t) + o(1))e^{3\gamma(t-t_1-2T)}| |(\lambda/3)e^{(1+3\gamma)(t_1+2T-t_0)}| \leq M_0, \\ 0 < m_3 < |(G_i(t) + o(1))e^{3\gamma(t-t_1-2T)}| < M_3.$$

Таким образом, в окрестности $t = t_0$ мы получаем $|\lambda e^{(1+3\gamma)(2T-t_1-t_0)}| < M_4$, где M_4 – некоторая положительная константа. Отсюда при достаточно больших λ вытекает оценка на t_0 :

$$t_0 - t_1 = ((1 + 3\gamma)^{-1} + o(1)) \ln \lambda. \quad (23)$$

Следовательно, в окрестности точки $t = t_0$ решение системы (4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{z_1}{2} + z_2 + o(1) \\ -\frac{z_1}{2} - \frac{z_2}{2} + o(1) \\ z_1 - \frac{z_2}{2} + o(1) \end{pmatrix} e^{(t_1+2T-t)(1+3\gamma)}. \quad (24)$$

Из формул (20) и (23) следует, что $t_0 - t_L > T$. Кроме того, из формул (21) и (24) видно, что, если для какого-то индекса i из множества $\{1, 2, 3\}$ верно $|u_i(t_0)| = p$, то существует положительная константа $\delta > 0$ такая, что $|u_i(t)| < p$ при всех $t \in (t_0, t_0 + \delta)$.

Таким образом, существует t_2 (оно равно значению t_0 из случая 2), для которого выполняются следующие соотношения

$$t_2 - t_1 = \begin{cases} (1 + o(1)) \ln \lambda, & \gamma > 0, \\ ((1 + 3\gamma)^{-1} + o(1)) \ln \lambda, & -1/3 < \gamma < 0, \end{cases} \quad (25)$$

$$|u_j(s + t_2)| > p, \quad (j = 1, 2, 3), \quad s \in [-T, 0), \quad (26)$$

$$|u_j(t_2)| = \bar{x}_j p, \quad |\bar{x}_j| \geq 1 \quad (j = 1, 2, 3), \quad \exists i : |\bar{x}_i| = 1. \quad (27)$$

Из приведенных выше рассуждений вытекает следующий результат.

Лемма 3. При t из промежутка $[t_1 + 2T, t_2]$ решение системы (4) имеет вид (14).

Сопоставляя формулы (8), (9) и (26), (27), легко видеть, что в точке t_2 мы вернулись к исходной ситуации – множество $S(x_1, x_2, x_3)$ преобразовалось в множество такого же типа – $S(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Поэтому существует оператор последования, который переводит исходное множество начальных условий $S(x_1, x_2, x_3)$ в множество $S(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Если, начиная с точки $t = t_2$, проделать все построения, описанные выше, и при этом выполняются условия Предположений 1 и 2 с заменой t_1 на t_2 и для новых значений параметров x_i , то мы получим асимптотику решения системы (4) на отрезке $[t_2, t_3]$, потом на отрезке $[t_3, t_4]$ и так далее. Таким образом с помощью оператора последования можно получить отображение на параметры x_1^n, x_2^n, x_3^n , где $n = 2, 3, \dots$. По динамике этого отображения мы можем судить о динамике исходной задачи, поскольку параметры x_i^n ($i = 1, 2, 3$) определяют решение системы (4).

Перейдем к нахождению вида операторов последования и построению отображений на параметры x_i^n ($i = 1, 2, 3, n = 2, 3, \dots$) в случаях $\gamma > 0$ и $-1/3 < \gamma < 0$.

2. Построение отображения и динамика исходной системы в случае положительной связи

В этом разделе мы построим отображение на параметры (x_1^n, x_2^n, x_3^n) в случае положительной связи ($\gamma > 0$) и на основе его динамики сделаем вывод о динамике исходной системы.

Введем обозначения. Пусть на n -й ($n \geq 2$) итерации построений, описанных в предыдущем разделе, мы получили значения $g_i(t_n + 2T)$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда введем значения z_1^n, z_2^n, z_3^n по правилу

$$\begin{aligned} z_1^n &= \frac{2}{3} \left(g_3(t_n + 2T, x_1^n, x_2^n, x_3^n) - g_2(t_n + 2T, x_1^n, x_2^n, x_3^n) \right), \\ z_2^n &= \frac{2}{3} \left(g_1(t_n + 2T, x_1^n, x_2^n, x_3^n) - g_2(t_n + 2T, x_1^n, x_2^n, x_3^n) \right), \\ z_3^n &= \frac{1}{3} \left(g_1(t_n + 2T, x_1^n, x_2^n, x_3^n) + g_2(t_n + 2T, x_1^n, x_2^n, x_3^n) + g_3(t_n + 2T, x_1^n, x_2^n, x_3^n) \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Формула (28) получается из (18) заменой t_1 на t_n и x_1, x_2, x_3 на x_1^n, x_2^n, x_3^n . Ниже мы уточним возможные значения x_1^n, x_2^n, x_3^n при $n \geq 2$ в случаях $\gamma > 0$ (см. раздел 2) и $-1/3 < \gamma < 0$ (см. раздел 3) и в результате получим более информативные представления для величин z_1^n, z_2^n и z_3^n при $n \geq 2$.

Пусть

$$z_3^n \neq 0, \quad (29)$$

и Предположения 1 и 2 выполняются для значений x_1^n, x_2^n, x_3^n и t_n для всех натуральных $n \geq 2$. Тогда, действуя, как описано в предыдущем разделе, мы получим, что при положительной связи между генераторами для значений $u_i(t_{n+1})$ выполняются соотношения

$$u_i(t_{n+1}) = \lambda(z_3^n + o(1))e^{(t_n + 2T - t_{n+1})}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Поэтому в случае $\gamma > 0$ значения t_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) удовлетворяют соотношению

$$t_{n+1} - t_n = (1 + o(1)) \ln \lambda \quad (30)$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$. Тогда по асимптотике решения мы получаем главную часть значений параметров x_i^{n+1} :

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= k_n + o(1), \\ x_2^{n+1} &= k_n + o(1), \\ x_3^{n+1} &= k_n + o(1), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$k_n = \text{sign}(z_3^n) = \text{sign} \left(g_1(t_n + 2T, x_1^n, x_2^n, x_3^n) + g_2(t_n + 2T, x_1^n, x_2^n, x_3^n) + g_3(t_n + 2T, x_1^n, x_2^n, x_3^n) \right).$$

Заметим, что согласно определению множества начальных условий модуль хотя бы одной из величин x_i^{n+1} в точности равен единице, а остальные модули больше или равны единице. Кроме того, из формулы (31) следует, что при всех $n \geq 2$ верно $x_2^n = x_1^n + o(1)$, $x_3^n = x_1^n + o(1)$.

Напомним, что все эти соотношения будут выполняться, только если на всех предыдущих и на текущей итерации для полученных значений параметров x_i^n и t_n будут выполняться Предположения 1 и 2. Сформулируем их для этих значений параметров. Сначала заметим, что при $n \geq 2$

$$g_i^n(t, k_{n-1}, k_{n-1}, k_{n-1}) = \int_{t_n+T}^t e^{s-t} F(k_{n-1} p e^{T+t_n-s}) ds + o(1),$$

и что

$$\int_{t_n+T}^t e^{s-t} F(k_{n-1} p e^{T+t_n-s}) ds = \int_T^{\tilde{t}} e^{s-\tilde{t}} F(k_{n-1} p e^{T-s}) ds,$$

где $\tilde{t} = t - t_n$.

Поскольку в Предположении 1 время t изменяется на промежутке $[t_n + T, t_n + 2T]$, то при любом n переменная $\tilde{t}$ изменяется на отрезке $[T, 2T]$, а переменная k_{n-1} может принимать всего два значения: 1 и -1 . Отсюда следует, что Предположение 1 для всех $n = 2, 3, \dots$ выглядит одинаково (может меняться лишь k_n , но оно принимает не более двух значений).

Таким образом, из выполнения следующего утверждения следует выполнение Предположения 1 при всех $n = 2, 3, \dots$

Предположение 3. Количество точек $t^* \in [T, 2T]$ таких, что $h(k, t^*) = 0$, конечно. Если $h(k, t^*) = 0$, то существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что выражение $\frac{\partial^j h(k, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}^j} \Big|_{\tilde{t}=t^*}$ отлично от нуля. Здесь $k = 1$ или $k = -1$, а функция $h(k, \tilde{t})$ имеет вид

$$h(k, \tilde{t}) = \int_T^{\tilde{t}} e^{s-\tilde{t}} F(kpe^{T-s}) ds.$$

При выполнении Предположения 3 и условия невырожденности

$$h(1, 2T)h(-1, 2T) \neq 0 \quad (32)$$

(это условие гарантирует нам выполнение Предположения 2 при $n = 2, 3, \dots$) мы получаем, что решение с начальными условиями из множества S имеет следующую асимптотику на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$.

Пусть $t \in [t_n, t_n + T]$, тогда

$$u_i(t) = pk_{n-1}e^{t_n-t} + o(1), \quad i = 1, 2, 3. \quad (33)$$

При $t \in [t_n + T, t_n + 2T]$ имеем

$$u_i(t) = \lambda(h(k_{n-1}, t - t_n) + o(1)), \quad (34)$$

а при $t \in [t_n + 2T, t_{n+1}]$

$$u_i(t) = \lambda(h(k_{n-1}, 2T) + o(1))e^{t_n+2T-t}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (35)$$

Отметим, что формулы (33), (34), (35) получаются соответственно из формул (7), (12), (14) при подставлении в них значений $x_i^n = k_{n-1} + o(1)$ и замены t_1 на t_n .

Заметим, что при выполнении Предположения 3 и условия (32), начиная с $n = 2$,

$$k_n = \text{sign}(z_3^n) = \text{sign}(h(k_{n-1}, 2T)).$$

Из построений, приведенных выше, вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\gamma > 0$ и для начальных значений x_1^1, x_2^1, x_3^1 выполнены Предположения 1, 2 и неравенство (19). Пусть выполняются Предположение 3 и неравенство (32). Тогда для каждого достаточно большого λ существует такое положительное значение t_2 , зависящее от $(x_1^1, x_2^1, x_3^1)^T$, что при $t > t_2$ решение уравнения (4) будет иметь асимптотику (33), (34), (35).

Заметим, что из формул (33), (34), (35) следует, что главные части асимптотики всех трех компонент решения совпадают для любого значения $t > t_2$, поэтому Теорему 1 можно трактовать следующим образом: все три осциллятора «синхронизируются» при $t > t_2$.

3. Построение отображения и асимптотика решений исходной системы в случае отрицательной связи

В этом разделе мы построим отображение на параметры (x_1^n, x_2^n, x_3^n) в случае отрицательной связи ($-1/3 < \gamma < 0$) и уточним асимптотику решений исходной системы. Вначале приведем основной результат. Для его формулировки нам потребуется несколько обозначений.

Обозначим через Z^n вектор

$$Z^n = \begin{pmatrix} -\frac{z_1^n}{2} + z_2^n + o(1) \\ -\frac{z_1^n}{2} - \frac{z_2^n}{2} + o(1) \\ z_1^n - \frac{z_2^n}{2} + o(1) \end{pmatrix},$$

а через Z_i^n – его i -ю координату ($i = 1, 2, 3$). Кроме того, обозначим через w_n величину

$$w_n = \min_{i \in \{1, 2, 3\}} |Z_i^n|. \quad (36)$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. Пусть $-1/3 < \gamma < 0$ и для значений x_1^n, x_2^n, x_3^n при $n = 1, 2, \dots, q$ выполнены Предположения 1 и 2. Пусть для $n = 1, 2, \dots, q$ выполняется неравенство

$$\left(-\frac{z_1^n}{2} + z_2^n\right) \left(-\frac{z_1^n}{2} - \frac{z_2^n}{2}\right) \left(z_1^n - \frac{z_2^n}{2}\right) \neq 0. \quad (37)$$

Тогда для каждого достаточно большого λ при $n = 2, 3, \dots, q$ решение уравнения (4) будет иметь следующую асимптотику: при $t \in [t_n, t_n + T]$

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \frac{p}{w_n} \begin{pmatrix} -\frac{z_1^{n-1}}{2} + z_2^{n-1} + o(1) \\ -\frac{z_1^{n-1}}{2} - \frac{z_2^{n-1}}{2} + o(1) \\ z_1^{n-1} - \frac{z_2^{n-1}}{2} + o(1) \end{pmatrix} e^{(t_n-t)(1+3\gamma)}, \quad (38)$$

при $t \in [t_n + T, t_n + 2T]$

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \lambda \int_{t_n+T}^t e^{\mathbb{A}(t-s)} \begin{pmatrix} F \left(\frac{p}{w_n} \left(-\frac{z_1^{n-1}}{2} + z_2^{n-1} \right) e^{(t_n+T-s)(1+3\gamma)} \right) \\ F \left(\frac{p}{w_n} \left(-\frac{z_1^{n-1}}{2} - \frac{z_2^{n-1}}{2} \right) e^{(t_n+T-s)(1+3\gamma)} \right) \\ F \left(\frac{p}{w_n} \left(z_1^{n-1} - \frac{z_2^{n-1}}{2} \right) e^{(t_n+T-s)(1+3\gamma)} \right) \end{pmatrix} ds + o(\lambda), \quad (39)$$

при $t \in [t_n + 2T, t_{n+1}]$

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \lambda \left(z_1^n \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + z_2^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + o(1) \right) e^{(t_n+2T-t)(1+3\gamma)} + \\ + \lambda (z_3^n + o(1)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(t_n+2T-t)}. \quad (40)$$

Здесь значения параметров z_1^1 и z_2^1 определяются по формуле (28), а значения z_1^n , z_2^n и z_3^n при $n = 2, 3, \dots, q$ принимают вид

$$z_1^n = \frac{2}{3} \int_T^{2T} e^{(1+3\gamma)(s-2T)} \left[F\left(\frac{p}{w_n} \left(z_1^{n-1} - \frac{z_2^{n-1}}{2} \right) e^{(1+3\gamma)(T-s)} \right) - \right. \\ \left. - F\left(\frac{p}{w_n} \left(-\frac{z_1^{n-1}}{2} - \frac{z_2^{n-1}}{2} \right) e^{(1+3\gamma)(T-s)} \right) \right] ds + o(1), \quad (41)$$

$$z_2^n = \frac{2}{3} \int_T^{2T} e^{(1+3\gamma)(s-2T)} \left[F\left(\frac{p}{w_n} \left(-\frac{z_1^{n-1}}{2} + z_2^{n-1} \right) e^{(1+3\gamma)(T-s)} \right) - \right. \\ \left. - F\left(\frac{p}{w_n} \left(-\frac{z_1^{n-1}}{2} - \frac{z_2^{n-1}}{2} \right) e^{(1+3\gamma)(T-s)} \right) \right] ds + o(1), \quad (42)$$

$$z_3^n = \frac{1}{3} \int_T^{2T} \left[F\left(\frac{p}{w_n} \left(z_1^{n-1} - \frac{z_2^{n-1}}{2} \right) e^{(1+3\gamma)(T-s)} \right) + F\left(\frac{p}{w_n} \left(-\frac{z_1^{n-1}}{2} + z_2^{n-1} \right) e^{(1+3\gamma)(T-s)} \right) + \right. \\ \left. + F\left(\frac{p}{w_n} \left(-\frac{z_1^{n-1}}{2} - \frac{z_2^{n-1}}{2} \right) e^{(1+3\gamma)(T-s)} \right) \right] e^{(1+3\gamma)(s-2T)} ds + o(1). \quad (43)$$

Доказательство. Предположим, что выполняются условия невырожденности (37) (общий вид z_i^n приведен в формуле (28)) и Предположения 1 и 2 для параметров x_1^n , x_2^n , x_3^n и t_n при всех $n = 1, 2, \dots, q$, где q – некоторое натуральное число. Тогда, действуя, как описано в разделе 1, мы получим, что при отрицательной связи между генераторами для значений $u(t_{n+1})$ (где $n < q$) выполняются равенства

$$\begin{pmatrix} u_1(t_{n+1}) \\ u_2(t_{n+1}) \\ u_3(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{z_1^n}{2} + z_2^n + o(1) \\ -\frac{z_1^n}{2} - \frac{z_2^n}{2} + o(1) \\ z_1^n - \frac{z_2^n}{2} + o(1) \end{pmatrix} e^{(t_n+2T-t_{n+1})(1+3\gamma)}. \quad (44)$$

Отсюда вытекает, что

$$t_{n+1} - t_n = ((1 + 3\gamma)^{-1} + o(1)) \ln \lambda$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$. Поскольку в точке t_{n+1} минимальный из модулей x_i^{n+1} равен единице, то из формулы (44) следует, что отображение на параметры x_i^{n+1} имеет вид

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= \frac{1}{w_n} \left(-\frac{z_1^n}{2} + z_2^n + o(1) \right), \\ x_2^{n+1} &= \frac{1}{w_n} \left(-\frac{z_1^n}{2} - \frac{z_2^n}{2} + o(1) \right), \\ x_3^{n+1} &= \frac{1}{w_n} \left(z_1^n - \frac{z_2^n}{2} + o(1) \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Заметим, что «в главном» величины x_i^{n+1} зависят только от двух параметров: z_1^n и z_2^n (а зависимость от z_3^n дает вклад $o(1)$). Таким образом, при условии, что Предположения 1, 2 и условие (37) будут выполняться при всех $n = 1, 2, 3, \dots, q$, мы получаем представление величин x_i^{n+1} через величины z_1^n и z_2^n при $n \leq q$. Подставив это представление в формулы (7), (12), (14), получим

формулы (38), (39), (40), соответственно, для асимптотики решения на отрезке $t \in [t_n, t_{n+1}]$ при $n = 2, 3, \dots, q$. А формулы (41), (42), (43) получаются из формулы (28) при подстановке в нее значений x_i^n , выраженных через z_1^{n-1} и z_2^{n-1} . Теорема доказана. $\square$

Введем обозначение y_i^n ($i = 1, 2$) для нормированных значений величин z_i^n :

$$y_i^n = \frac{1}{w_n} z_i^n. \quad (46)$$

Тогда в новых обозначениях величины x_i^{n+1} примут вид

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= -\frac{y_1^n}{2} + y_2^n + o(1), \\ x_2^{n+1} &= -\frac{y_1^n}{2} - \frac{y_2^n}{2} + o(1), \\ x_3^{n+1} &= y_1^n - \frac{y_2^n}{2} + o(1), \end{aligned} \quad (47)$$

Поскольку x_i^{n+1} выражаются через величины y_1^n и y_2^n с точностью до $o(1)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, то, начиная с $n = 2$, значения x_1^n, x_2^n, x_3^n будут находиться на расстоянии $o(1)$ от плоскости $y_1 O y_2$ (плоскости, натянутой на векторы $(-1/2, -1/2, 1)^T$ и $(1, -1/2, -1/2)^T$ – см. формулы (40) и (46)). Более того, из формул (36) и (46) следует, что не все значения в плоскости $y_1 O y_2$ будут приниматься (из-за нормирующего множителя).

Выясним, какие значения могут принимать величины y_1^n и y_2^n . Из того, что вектор Z^n имеет три компоненты, следует, что возможны три случая: когда минимальным среди модулей компонент вектора Z^n является модуль первой, второй или третьей компоненты. Решая три системы неравенств, в результате получаем объединение 12 лучей:

$$\left[\begin{array}{l} y_2 = -2 - y_1, \text{ где } y_1 \leq -2 \text{ или } y_1 \geq 0, \\ y_2 = 2 - y_1, \text{ где } y_1 \leq 0 \text{ или } y_1 \geq 2, \\ y_2 = 2 + 2y_1, \text{ где } y_1 \leq -2 \text{ или } y_1 \geq 0, \\ y_2 = -2 + 2y_1, \text{ где } y_1 \leq 0 \text{ или } y_1 \geq 2, \\ y_2 = -1 + y_1/2, \text{ где } y_1 \leq -2 \text{ или } y_1 \geq 2, \\ y_2 = 1 + y_1/2, \text{ где } y_1 \leq -2 \text{ или } y_1 \geq 2. \end{array} \right. \quad (48)$$

Из приведенных выше рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. При $n = 2, 3, \dots, q$ величины x_1^n, x_2^n, x_3^n могут принимать только те значения, для которых значения y_1^n и y_2^n находятся вблизи множества (48).

Часть множества (48) (все лучи продолжаются до бесконечности) изображена на рис. 2.

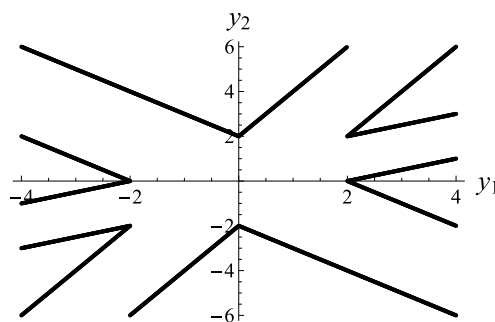


Рис. 2. Часть множества (48)

Fig. 2. Part of the set (48)

4. Связь динамики «главной части» отображения (41), (42), (46) с динамикой исходной системы при $-1/3 < \gamma < 0$

Заметим, что в силу геометрии множества (48) (оно не является выпуклым) применение принципа Шаудера [23] для доказательства теоремы о соответствии между периодическими режимами отображения (41), (42), (46) и релаксационными циклами исходной системы (4) невозможно. Однако возможно провести численный эксперимент и сформулировать гипотезы о взаимосвязи динамики отображения (41), (42), (46) и системы (4). В данном разделе мы опишем результаты численного анализа «главной части» отображения (41), (42), (46) («главной частью» мы называем отображение, которое получится после отбрасывания o -малых в формулах (41), (42)) и сопоставим их с результатами численного счета системы (4).

Остановимся на динамике «главной части» отображения (41), (42), (46). Отметим, что, если после отбрасывания $o(1)$ в формулах (41), (42) мы выразим z_1^{n-1} и z_2^{n-1} через y_1^{n-1} и y_2^{n-1} , то получим представление для «главной части» отображения (41), (42), (46) в виде отображения на переменные y_1^n и y_2^n . Это отображение будет иметь вид (46),

$$z_1^n = \frac{2}{3} \int_T^{2T} e^{(1+3\gamma)(s-2T)} \left[F \left(p \left(y_1^{n-1} - \frac{y_2^{n-1}}{2} \right) e^{(1+3\gamma)(T-s)} \right) - F \left(p \left(-\frac{y_1^{n-1}}{2} - \frac{y_2^{n-1}}{2} \right) e^{(1+3\gamma)(T-s)} \right) \right] ds, \quad (49)$$

$$z_2^n = \frac{2}{3} \int_T^{2T} e^{(1+3\gamma)(s-2T)} \left[F \left(p \left(-\frac{y_1^{n-1}}{2} + y_2^{n-1} \right) e^{(1+3\gamma)(T-s)} \right) - F \left(p \left(-\frac{y_1^{n-1}}{2} - \frac{y_2^{n-1}}{2} \right) e^{(1+3\gamma)(T-s)} \right) \right] ds. \quad (50)$$

Везде далее мы будем рассматривать «главную часть» отображения (41), (42), (46) как отображение на переменные y_1^n и y_2^n вида (46), (49), (50).

Перечислим основные особенности динамики этого отображения.

1. Для любой функции F , удовлетворяющей условиям, поставленным в начале статьи, и набора исходных параметров реализуется одна из возможных ситуаций:

1) у отображения есть три цикла (y_1, y_2) :

$$(2, 0) \rightarrow (-2, 0), \quad (0, 2) \rightarrow (0, -2), \quad (-2, -2) \rightarrow (2, 2); \quad (51)$$

2) у отображения есть шесть неподвижных точек (y_1, y_2) :

$$(2, 0), \quad (0, 2), \quad (-2, -2) \quad (52)$$

и

$$(-2, 0), \quad (0, -2), \quad (2, 2); \quad (53)$$

3) у отображения есть три неподвижные точки (y_1, y_2) : тройка (52) или тройка (53).

Это утверждение несложно проверить, подставив приведенные выше значения (y_1, y_2) в формулы (46), (49), (50).

Других циклов и неподвижных точек ни аналитический, ни численный анализ отображения не выявили.

2. Если мы возьмем значения y_1^n и y_2^n такие, что два из трех аргументов функции F в формулах (41), (42) на отрезке $s \in [T, 2T]$ будут находиться вне полосы $[-p, p]$, то на следующем шаге переменные y_1^{n+1} и y_2^{n+1} попадут (в зависимости от функции F и значений параметров) в одно из состояний равновесия (52) или (53) или в один из циклов (51). Это следует из того, что $F = 0$, когда аргумент функции F находится вне отрезка $[-p, p]$.

3. Стоит заметить, что при подстановке в формулу (47) первых трех (см. формулу (52)) (или вторых трех (53)) неподвижных точек получаются циклические перестановки одного и того же набора x_i^{n+1} . Поэтому, в силу симметричности исходной системы (4), мы получаем, что эти тройки неподвижных точек соответствуют одному и тому же режиму в исходной модели (с точностью до переобозначения номеров осцилляторов). Следовательно, эти режимы будут иметь одинаковые динамические свойства. То же самое верно и для циклов (51).

4. При численном анализе были найдены три принципиально разные ситуации:

- 1) у «главной части» отображения (41), (42), (46) все сосуществующие состояния равновесия (52), (53) или циклы (51) «устойчивы на множестве (48)». Мы называем режим «устойчивым на множестве (48)», если все точки из малой окрестности этого режима на лучах (48) под действием итераций отображения не выходят из этой малой окрестности;
- 2) у «главной части» отображения (41), (42), (46) сосуществуют «устойчивые на множестве (48)» состояния равновесия (52) (или (53)) и неустойчивые (во всех просчитанных малых окрестностях этих состояний равновесия есть точки, убегающие из окрестности) состояния равновесия (53) (или соответственно (52));
- 3) у «главной части» отображения (41), (42), (46) все сосуществующие состояния равновесия (52), (53) или циклы (51) неустойчивы.

Был выполнен численный анализ системы (4). Ниже представлены основные результаты численного счета.

I. Как и говорит Теорема 3, значения x_i^{n+1} (полученные на основе численного интегрирования разностного аналога системы (4)) оказались близки к плоскости $y_1 O y_2$, а соответствующие значения y_1^n, y_2^n оказались близки к множеству (48) (рис. 3).

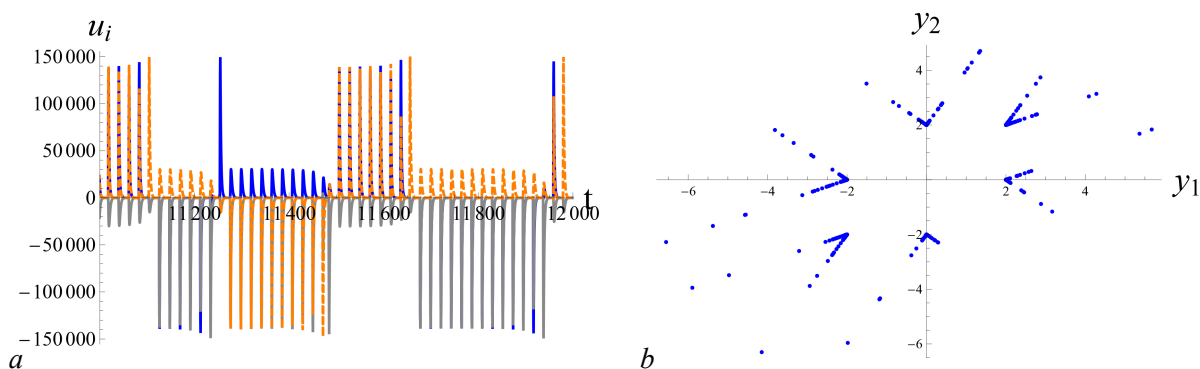


Рис. 3. а – Пример решения системы (4) при $t \in [11000, 12000]$; б – итерации соответствующих значений (y_1^n, y_2^n) на плоскости $y_1 O y_2$ при $t \in [0, 12000]$. Легенда: а – u_1 – синий цвет, u_2 – серый цвет, u_3 – оранжевый пунктир. Значения параметров: $\lambda = 10000$, $\gamma = -0.15$, $T = 1$, $p = 1$

Fig. 3. а – Example of solution of system (4) at $t \in [11000, 12000]$; б – iterations of the corresponding values (y_1^n, y_2^n) on the plane $y_1 O y_2$ at $t \in [0, 12000]$. Legend: а – u_1 – blue line, u_2 – gray line, u_3 – orange dashed line. Values of parameters: $\lambda = 10000$, $\gamma = -0.15$, $T = 1$, $p = 1$

II. Мы будем говорить, что режим системы (4) соответствует какому-то состоянию равновесия (или циклу) «главной части» отображения (41), (42), (46), если при численном счете разностного аналога системы (4) мы получаем режим, у которого значения y_1^n и y_2^n при всех n близки к этому состоянию равновесия (или циклу) «главной части» отображения (41), (42), (46).

В случае выбора параметров системы (4), соответствующих пункту 4.1), у исходной системы (4) при численном счете наблюдались релаксационные циклы, соответствующие устойчивым на множестве (48) режимам «главной части» отображения (41), (42), (46). Кроме этого, для некоторых функций в случае, когда сосуществовали три «устойчивые на множестве (48)» цикла периода два «главной части» отображения (41), (42), (46), у исходной системы наблюдались циклы, у которых параметры y_i^n , полученные на основании численного интегрирования разностного аналога системы (4), находятся близко к множеству (48), но соответствующего близкого цикла у «главной части» отображения (41), (42), (46) нет (рис. 4).

III. В случае выбора параметров системы, соответствующих пункту 4.2), у исходной системы (4) при численном счете наблюдались релаксационные циклы, соответствующие устойчивым на множестве (48) режимам «главной части» отображения (41), (42), (46) (рис. 5, а), и для любых начальных условий (при которых производился численный счет разностного аналога системы (4)), начиная с некоторого $n \in \mathbb{N}$, значения y_1^n и y_2^n , полученные численно, были близки к какому-то одному из устойчивых на множестве (48) состояний равновесия «главной части» отображения (41), (42), (46). То есть наблюдалась «сваливаемость» решений в окрестность режимов, соответствующих устойчивым на множестве (48) состояниям равновесия (41), (42), (46) (рис. 5, б). При этом термин «сваливаемость» нельзя заменить на устойчивость по Ляпунову, поскольку, если мы возьмем начальные условия для системы (4), близкие к начальным условиям, соответствующим какому-то устойчивому на множестве (48) состоянию равновесия, но не находящиеся в точности на множестве (48), то можем «свалиться» в окрестность цикла, соответствующего другому устойчивому на множестве (48) состоянию равновесия.

IV. В случае выбора параметров системы (4), соответствующих пункту 4.3), у исходной системы (4) наблюдались нерегулярные релаксационные режимы (полученные численно значения

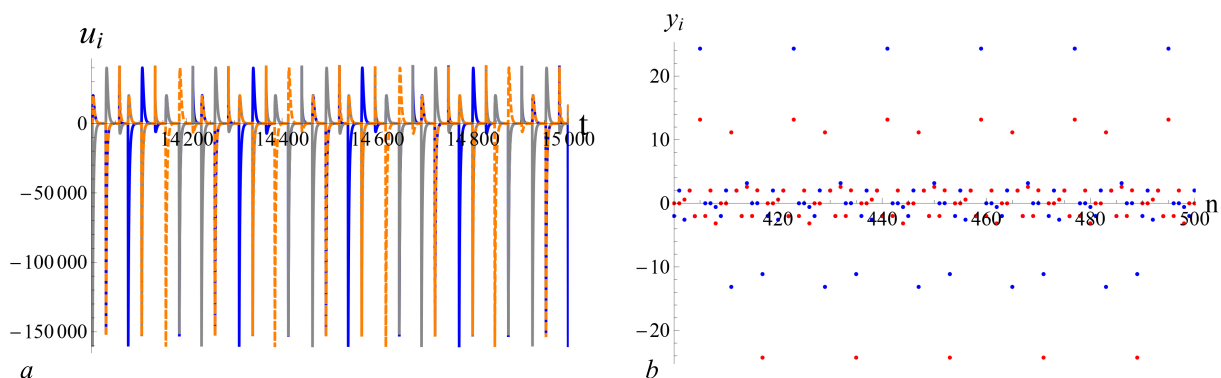


Рис. 4. а – Релаксационный цикл системы (4) при $t \in [14000, 15000]$; б – значения y_1^n и y_2^n при $n \in [400, 500]$. Легенда: а – u_1 – синий цвет, u_2 – серый цвет, u_3 – оранжевый пунктир; б – y_1^n – синий цвет, y_2^n – красный цвет. Значения параметров: $\lambda = 12000$, $\gamma = -0.2$, $T = 0.5$, $p = 1$

Fig. 4. а – Relaxation cycle of system (4) at $t \in [14000, 15000]$ б – values y_1^n and y_2^n at $n \in [400, 500]$. Legend: а – u_1 – blue line, u_2 – gray line, u_3 – orange dashed line; б – y_1^n – blue, y_2^n – red. Values of parameters: $\lambda = 12000$, $\gamma = -0.2$, $T = 0.5$, $p = 1$

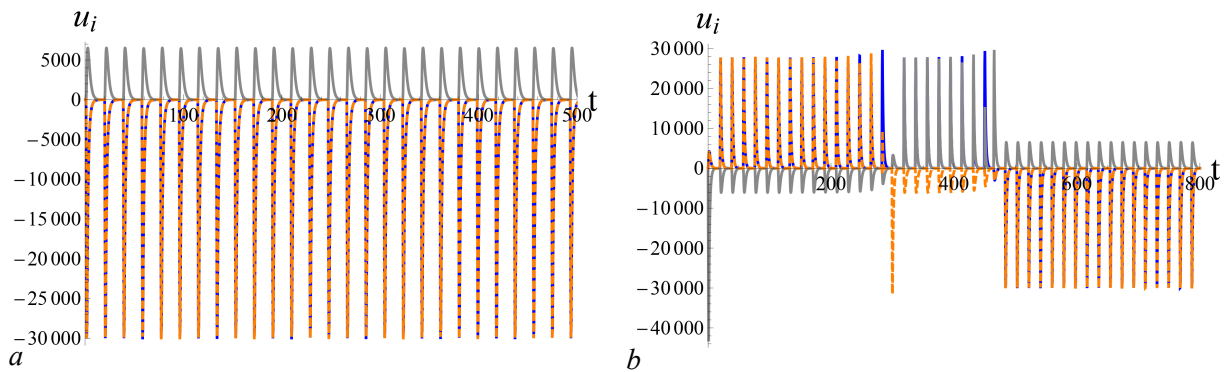


Рис. 5. *a* – Релаксационный цикл системы (4), соответствующий устойчивому на множестве (48) состоянию равновесия отображения (41), (42), (46). *b* – «Сваливаемость» к циклу системы (4), соответствующему устойчивому на множестве (48) состоянию равновесия отображения (41), (42), (46). Значения параметров: $\lambda = 10000$, $\gamma = -0.15$, $T = 1$, $p = 1$

Fig. 5. *a* – Relaxation cycle of system (4), corresponding to the equilibrium state of the map (41), (42), (46) that is stable on the set (48). *b* – Transition to the cycle of the system (4), corresponding to the equilibrium state of the map (41), (42), (46) that is stable on the set (48). Values of parameters: $\lambda = 10000$, $\gamma = -0.15$, $T = 1$, $p = 1$

y_1^n, y_2^n долгое время показывали нерегулярную динамику, рис. 6) или релаксационные циклы, у которых параметры y_i^n , полученные на основании численного интегрирования разностного аналога системы (4), находятся близко к множеству (48), но соответствующего близкого цикла у «главной части» отображения (41), (42), (46) нет.

V. Если брать начальные условия для системы (4) такими, что получившиеся значения y_1 и y_2 попадут в точности в одну из точек (52), (53) (но сам исходный вектор (x_1, x_2, x_3) не обязательно находился в плоскости параметров (y_1, y_2)), то при численном счете получим режим, соответствующий (в зависимости от значений параметров системы и функции F) одному из циклов (51) или одной из неподвижных точек (52) или (53). Это верно даже в случае, когда параметры системы (4) таковы, что выполняется случай пункта 4.3) (то есть даже для неустойчивого

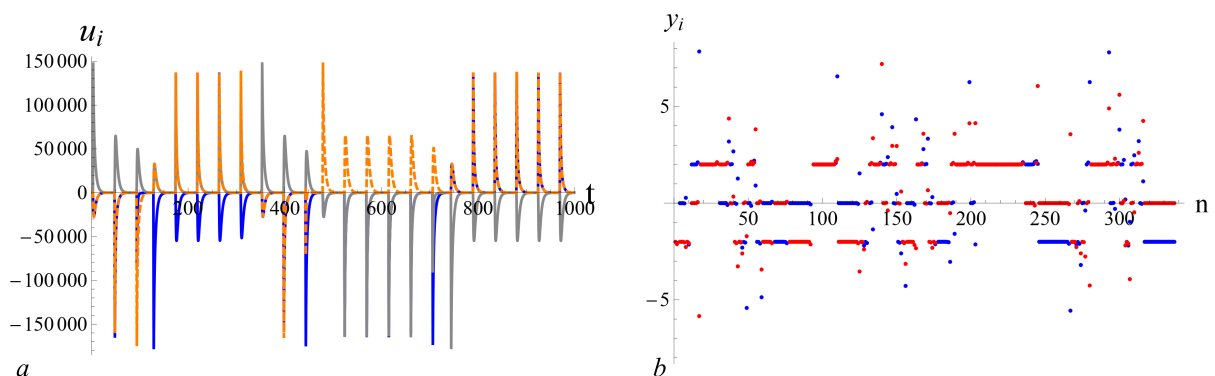


Рис. 6. *a* – Нерегулярный релаксационный режим (4) при $t \in [0, 1000]$; *b* – значения y_1^n и y_2^n при $t \in [0, 15000]$. Легенда: *a* – u_1 – синий цвет, u_2 – серый цвет, u_3 – оранжевый пунктир; *b* – y_1^n – синий цвет, y_2^n – красный цвет. Значения параметров: $\lambda = 10000$, $\gamma = -0.25$, $T = 0.7$, $p = 1$

Fig. 6. *a* – Irregular relaxation mode (4) at $t \in [0, 1000]$ *b* – values y_1^n and y_2^n at $t \in [0, 15000]$. Legend: *a* – u_1 – blue line, u_2 – gray line, u_3 – orange dashed line; *b* – y_1^n – blue, y_2^n – red. Values of parameters: $\lambda = 10000$, $\gamma = -0.25$, $T = 0.7$, $p = 1$

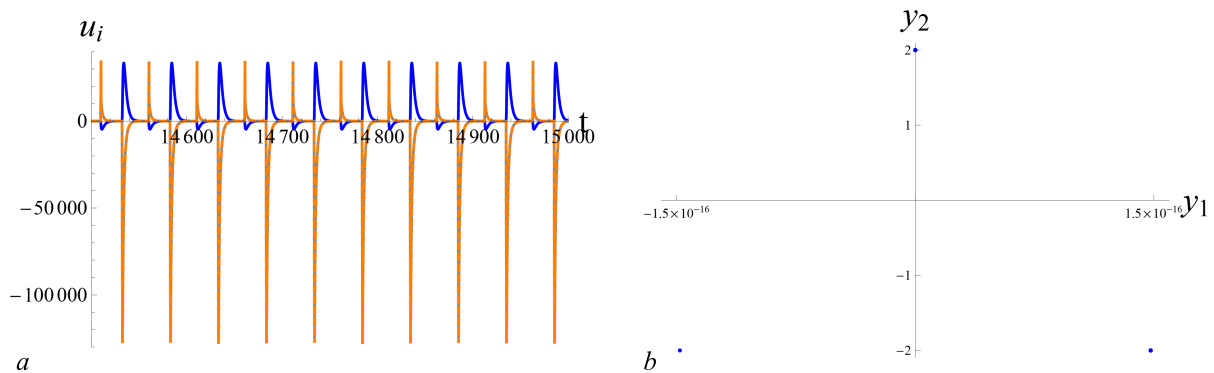


Рис. 7. *a* – Релаксационный цикл системы (4), соответствующий неустойчивому циклу $(0, 2) \rightarrow (0, -2)$ «главной части» отображения (41), (42), (46), при $t \in [14500, 15000]$; *b* – итерации значений y_1^n, y_2^n на плоскости $y_1 O y_2$ при $t \in [0, 15000]$. Легенда: *a* – u_1 – синий цвет, u_2 – серый цвет, u_3 – оранжевый пунктир. Значения параметров: $\lambda = 10000, \gamma = -0.2, T = 0.5, p = 1$

Fig. 7. *a* – Relaxation cycle of system (4), corresponding to the unstable cycle $(0, 2) \rightarrow (0, -2)$ of the “main” part of map (41), (42), (46); *b* – values (y_1^n, y_2^n) on the plane $y_1 O y_2$ at $t \in [0, 15000]$. Legend: *a* – u_1 – blue line, u_2 – gray line, u_3 – orange dashed line. Values of parameters: $\lambda = 10000, \gamma = -0.2, T = 0.5, p = 1$

состояния равновесия или цикла «главной части» отображения (41), (42), (46) есть множества начальных условий системы (4) такие, что решение системы с этими начальными условиями «свалится» к режиму, соответствующему рассматриваемому режиму «главной части» отображения (41), (42), (46)) (рис. 7).

Выводы

В работе исследована нелокальная динамика модели, описывающей три связанных осциллятора с нелинейной запаздывающей обратной связью. Была построена асимптотика решений с начальными условиями из множества S , и с помощью специального метода большого параметра было получено конечномерное отображение, которое помогает уточнить значения параметров, фигурирующих в формулах для асимптотики решения. Было показано, что при положительной связи между осцилляторами ($\gamma > 0$), начиная с некоторого момента времени, все три осциллятора имеют одинаковую главную часть асимптотики («синхронизируются»). В случае отрицательной связи между осцилляторами ($-1/3 < \gamma < 0$) было построено множество (48), которое помогает описать главную часть асимптотики решений системы (4), найдены различные релаксационные циклы исходной системы, описана их связь с циклами построенного конечномерного отображения (41), (42), (46), а также были найдены нерегулярные релаксационные режимы системы (4), показаны условия для их существования.

Список литературы

1. Ringwood J. V., Malpas S. C. Slow oscillations in blood pressure via a nonlinear feedback model // Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol. 2001. Vol. 280, no. 4. P. R1105–R1115. DOI: 10.1152/ajpregu.2001.280.4.R1105.
2. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в кольцевых генных сетях // Теоретическая и математическая физика. 2016. Т. 187, № 3. С. 560–579. DOI: 10.4213/tmf9052.

3. Karavaev A. S., Ishbulatov Y. M., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Gridnev V. I., Bezruchko B. P., Kiselev A. R. Model of human cardiovascular system with a loop of autonomic regulation of the mean arterial pressure // *J. Am. Soc. Hypertens.* 2016. Vol. 10, no. 3. P. 235–243. DOI: 10.1016/j.jash.2015.12.014.
4. Karavaev A. S., Ishbulatov Y. M., Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Kiselev A. R., Runnova A. E., Hramkov A. N., Semyachkina-Glushkovskaya O. V., Kurths J., Penzel T. Simulating dynamics of circulation in the awake state and different stages of sleep using non-autonomous mathematical model with time delay // *Front. Physiol.* 2021. Vol. 11. P. 612787. DOI: 10.3389/fphys.2020.612787.
5. van der Heiden U., Mackey M. C. The dynamics of production and destruction: Analytic insight into complex behavior // *J. Math. Biol.* 1982. Vol. 16, no. 1. P. 75–101. DOI: 10.1007/BF00275162.
6. Erneux T. *Applied Delay Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 2009. 204 p. DOI: 10.1007/978-0-387-74372-1.
7. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
8. Kiliyas T., Kelber K., Mogel A., Schwarz W. Electronic chaos generators – design and applications // *International Journal of Electronics*. 1995. Vol. 79, no. 6. P. 737–753. DOI: 10.1080/00207219508926308.
9. Кащенко С. А., Майоров В. В. Модели волновой памяти. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. 288 с.
10. Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Karavaev A. S., Kulminskiy D. D. An experimental digital communication scheme based on chaotic time-delay system // *Nonlinear Dyn.* 2013. Vol. 74, no. 4. P. 1013–1020. DOI: 10.1007/s11071-013-1019-0.
11. Lakshmanan M., Senthilkumar D. V. *Dynamics of Nonlinear Time-Delay Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 313 p. DOI: 10.1007/978-3-642-14938-2.
12. Преображенская М. М. Дискретные бегущие волны в релейной системе уравнений типа Мэки–Гласса с двумя запаздываниями // *Теоретическая и математическая физика*. 2021. Т. 207, № 3. С. 489–504. DOI: 10.4213/tmf10038.
13. Mallet-Paret J., Nussbaum R. D. Global continuation and asymptotic behaviour for periodic solutions of a differential-delay equation // *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1986. Vol. 145, no. 1. P. 33–128. DOI: 10.1007/BF01790539.
14. Losson J., Mackey M. C., Longtin A. Solution multistability in first-order nonlinear differential delay equations // *Chaos*. 1993. Vol. 3, no. 2. P. 167–176. DOI: 10.1063/1.165982.
15. Krisztin T., Walther H.-O. Unique periodic orbits for delayed positive feedback and the global attractor // *J. Dyn. Diff. Equat.* 2001. Vol. 13, no. 1. P. 1–57. DOI: 10.1023/A:1009091930589.
16. Stoffer D. Delay equations with rapidly oscillating stable periodic solutions // *J. Dyn. Diff. Equat.* 2008. Vol. 20, no. 1. P. 201–238. DOI: 10.1007/s10884-006-9068-4.
17. Krisztin T., Vas G. Large-amplitude periodic solutions for differential equations with delayed monotone positive feedback // *J. Dyn. Diff. Equat.* 2011. Vol. 23, no. 4. P. 727–790. DOI: 10.1007/s10884-011-9225-2.
18. Kashchenko I., Kaschenko S. Normal and quasilinear forms for systems of difference and differential-difference equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2016. Vol. 38. P. 243–256. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.02.041.
19. Kashchenko A. A. Non-rough relaxation solutions of a system with delay and sign-changing nonlinearity // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2019. Vol. 22, no. 2. P. 190–195.
20. Кащенко А. А. Релаксационные циклы в модели двух слабо связанных осцилляторов со знакопеременной запаздывающей обратной связью // *Теоретическая и математическая физика*. 2020. Т. 202, № 3. С. 437–446. DOI: 10.4213/tmf9806.

21. *Kashchenko A. A.* Dependence of dynamics of a system of two coupled generators with delayed feedback on the sign of coupling // *Mathematics*. 2020. Vol. 8, no. 10. P. 1790. DOI: 10.3390/math8101790.
22. *Kashchenko A. A.* Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021. Vol. 93. P. 105488. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105488.
23. *Schauder J.* Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen // *Studia Mathematica*. 1930. Bd. 2, Nr. 1. S. 171–180. DOI: 10.4064/sm-2-1-171-180.

References

1. Ringwood JV, Malpas SC. Slow oscillations in blood pressure via a nonlinear feedback model. *Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol.* 2001;280(4):R1105–R1115. DOI: 10.1152/ajpregu.2001.280.4.R1105.
2. Glyzin SD, Kolesov AY, Rozov NK. Buffering in cyclic gene networks. *Theor. Math. Phys.* 2016;187(3):935–951. DOI: 10.1134/S0040577916060106.
3. Karavaev AS, Ishbulatov YM, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Gridnev VI, Bezruchko BP, Kiselev AR. Model of human cardiovascular system with a loop of autonomic regulation of the mean arterial pressure. *J. Am. Soc. Hypertens.* 2016;10(3):235–243. DOI: 10.1016/j.jash.2015.12.014.
4. Karavaev AS, Ishbulatov YM, Prokhorov MD, Ponomarenko VI, Kiselev AR, Runnova AE, Hramkov AN, Semyachkina-Glushkovskaya OV, Kurths J, Penzel T. Simulating dynamics of circulation in the awake state and different stages of sleep using non-autonomous mathematical model with time delay. *Front. Physiol.* 2021;11:612787. DOI: 10.3389/fphys.2020.612787.
5. an der Heiden U, Mackey MC. The dynamics of production and destruction: Analytic insight into complex behavior. *J. Math. Biol.* 1982;16(1):75–101. DOI: 10.1007/BF00275162.
6. Erneux T. *Applied Delay Differential Equations*. New York: Springer-Verlag; 2009. 204 p. DOI: 10.1007/978-0-387-74372-1.
7. Dmitriev AS, Kislov VY. *Stochastic Oscillations in Radiophysics and Electronics*. Moscow: Nauka; 1989. 280 p. (in Russian).
8. Kilias T, Kelber K, Mogel A, Schwarz W. Electronic chaos generators – design and applications. *International Journal of Electronics*. 1995;79(6):737–753. DOI: 10.1080/00207219508926308.
9. Kashchenko SA, Maiorov VV. *Models of Wave Memory*. Moscow: Book House «Librokom»; 2009. 288 p. (in Russian).
10. Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Karavaev AS, Kulminskiy DD. An experimental digital communication scheme based on chaotic time-delay system. *Nonlinear Dyn.* 2013;74(4):1013–1020. DOI: 10.1007/s11071-013-1019-0.
11. Lakshmanan M, Senthilkumar DV. *Dynamics of Nonlinear Time-Delay Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2011. 313 p. DOI: 10.1007/978-3-642-14938-2.
12. Preobrazhenskaya MM. Discrete traveling waves in a relay system of Mackey–Glass equations with two delays. *Theor. Math. Phys.* 2021;207(3):827–840. DOI: 10.1134/S0040577921060106.
13. Mallet-Paret J, Nussbaum RD. Global continuation and asymptotic behaviour for periodic solutions of a differential-delay equation. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1986;145(1): 33–128. DOI: 10.1007/BF01790539.
14. Losson J, Mackey MC, Longtin A. Solution multistability in first-order nonlinear differential delay equations. *Chaos*. 1993;3(2):167–176. DOI: 10.1063/1.165982.

15. Krisztin T, Walther HO. Unique periodic orbits for delayed positive feedback and the global attractor. *J. Dyn. Diff. Equat.* 2001;13(1):1–57. DOI: 10.1023/A:1009091930589.
16. Stoffer D. Delay equations with rapidly oscillating stable periodic solutions. *J. Dyn. Diff. Equat.* 2008;20(1):201–238. DOI: 10.1007/s10884-006-9068-4.
17. Krisztin T, Vas G. Large-amplitude periodic solutions for differential equations with delayed monotone positive feedback. *J. Dyn. Diff. Equat.* 2011;23(4):727–790. DOI: 10.1007/s10884-011-9225-2.
18. Kashchenko I, Kaschenko S. Normal and quasinormal forms for systems of difference and differential-difference equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2016;38:243–256. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.02.041.
19. Kashchenko AA. Non-rough relaxation solutions of a system with delay and sign-changing nonlinearity. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* 2019;22(2):190–195.
20. Kashchenko AA. Relaxation cycles in a model of two weakly coupled oscillators with sign-changing delayed feedback. *Theor. Math. Phys.* 2020;202(3):381–389. DOI: 10.1134/S0040577920030101.
21. Kashchenko AA. Dependence of dynamics of a system of two coupled generators with delayed feedback on the sign of coupling. *Mathematics.* 2020;8(10):1790. DOI: 10.3390/math8101790.
22. Kashchenko AA. Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2021;93:105488. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105488.
23. Schauder J. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. *Studia Mathematica.* 1930;2(1):171–180 (in German). DOI: 10.4064/sm-2-1-171-180.



Кащенко Александра Андреевна – родилась в Ярославле (1990). Окончила с отличием математический факультет Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова (2012). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (2015, ЯрГУ). Работает на кафедре математического анализа Ярославского государственного университета в должности доцента. Научные интересы – динамика моделей, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием.

Россия, 150003 Ярославль, Советская, 14
 Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
 E-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru
 ORCID: 0000-0003-3823-9351
 AuthorID: 815088