Бифуркации в динамических системах. Детерминированный хаос. Квантовый хаос

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(6)

Научная статья
УДК 517.938.5
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-835-850

Классификация с точностью до топологической сопряженности потоков Морса – Смейла с конечным числом модулей устойчивости на поверхностях

В. Е. Круглов✉, *О. В. Починка*

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
E-mail: ✉kruglovslava21@mail.ru, olga-pochinka@yandex.ru
Поступила в редакцию 20.05.2021, принята к публикации 24.08.2021, опубликована 30.11.2021

Аннотация. *Цель* настоящего исследования – рассмотреть класс потоков Морса – Смейла на поверхностях, охарактеризовать его подкласс, состоящий из потоков, обладающих конечным числом модулей устойчивости, и получить топологическую классификацию таких потоков с точностью до топологической сопряжённости, то есть найти такой инвариант, который показывает, существует ли гомеоморфизм, переводящий траектории одного потока в траектории другого с сохранением направления движения и времени движения по траекториям; для полученного инварианта построить полиномиальный алгоритм распознавания изоморфизма и выполнить реализацию инварианта стандартным потоком на поверхности. *Методы.* Методы нахождения модулей топологической сопряженности восходят к классическим работам Ж. Палиса, В. ди Мелу и используют гладкую линеаризацию потока в окрестности состояний равновесия и предельных циклов. Для классификации потоков используются традиционные методы разбиения фазовой поверхности на области с одинаковым поведением траекторий, являющиеся модификацией методов А. А. Андронова, Е. А. Леонтович, А. Г. Майера. *Результаты.* Показано, что поток Морса – Смейла на поверхности имеет конечное число модулей тогда и только тогда, когда у него нет траектории, идущей из одного предельного цикла в другой. Для подкласса потоков Морса – Смейла с конечным числом модулей построена классификация с точностью до топологической сопряжённости посредством оснащённого графа. *Заключение.* Установлен критерий конечности числа модулей потоков Морса – Смейла на поверхностях. Построен топологический инвариант, описывающий класс топологической сопряжённости потока Морса – Смейла на поверхности с конечным числом модулей, то есть без траекторий, идущих из одного предельного цикла в другой.

Ключевые слова: поток Морса – Смейла, модули устойчивости, оснащённый граф, топологическая классификация.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 17-11-01041) кроме раздела 3, который выполнен при поддержке РФФИ, проект № 20-31-90067, и подраздела 4.4, который выполнен при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931.

Для цитирования: *Круглов В. Е., Починка О. В.* Классификация с точностью до топологической сопряженности потоков Морса – Смейла с конечным числом модулей устойчивости на поверхностях // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 6. С. 835–850. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-835-850

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

© *Круглов В. Е., Починка О. В., 2021*

Article
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-835-850

Classification of the Morse – Smale flows on surfaces with a finite moduli of stability number in sense of topological conjugacy

V. E. Kruglov✉, *O. V. Pochinka*

National Research University
Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: ✉kruglovslava21@mail.ru, olga-pochinka@yandex.ru
Received 20.05.2021, accepted 24.08.2021, published 30.11.2021

Abstract. *Purpose.* The purpose of this study is to consider the class of Morse – Smale flows on surfaces, to characterize its subclass consisting of flows with a finite number of moduli of stability, and to obtain a topological classification of such flows up to topological conjugacy, that is, to find an invariant that shows that there exists a homeomorphism that transfers the trajectories of one flow to the trajectories of another while preserving the direction of movement and the time of movement along the trajectories; for the obtained invariant, to construct a polynomial algorithm for recognizing its isomorphism and to construct the realisation of the invariant by a standard flow on the surface. *Methods.* Methods for finding moduli of topological conjugacy go back to the classical works of J. Palis, W. di Melo and use smooth flow lianerization in a neighborhood of equilibrium states and limit cycles. For the classification of flows, the traditional methods of dividing the phase surface into regions with the same behavior of trajectories are used, which are a modification of the methods of A. A. Andronov, E. A. Leontovich, and A. G. Mayer. *Results.* It is shown that a Morse – Smale flow on a surface has a finite number of moduli if and only if it does not have a trajectory going from one limit cycle to another. For a subclass of Morse – Smale flows with a finite number of moduli, a classification is done up to topological conjugacy by means of an equipped graph. *Conclusion.* The criterion for the finiteness of the number of moduli of Morse – Smale flows on surfaces is obtained. A topological invariant is constructed that describes the topological conjugacy class of a Morse – Smale flow on a surface with a finite number of modules, that is, without trajectories going from one limit cycle to another.

Keywords: Morse – Smale flow, moduli of stability, equipped graph, topological classification.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation (project 17-11-01041) except section 3 which was funded by RFBR according to the research project No. 20-31-90067. Subsection 4.4 was carried out with the support of the HSE Dynamic Systems and Applications Laboratory, a grant from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement № 075-15-2019-1931.

For citation: Kruglov VE, Pochinka OV. Classification of the Morse – Smale flows on surfaces with a finite moduli of stability number in sense of topological conjugacy. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(6):835–850.
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-835-850

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

1. Введение и формулировка результатов

Потоки f^t, $f'^t\colon M \to M$ на многообразии M называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M \to M$, отображающий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением направления движения по траекториям. Два потока называются *топологически сопряжёнными*, если выполняется условие $h \circ f^t = f'^t \circ h$, это означает, что h отображает траектории в траектории, сохраняя не только направление, но и время движения по траекториям. Найти инвариант, описывающий класс топологической эквивалентности или топологической сопряжённости потоков в некотором классе, означает получить *топологическую классификацию* класса потоков. Заметим, что для некоторых систем их классификации в смысле эквивалентности и сопряжённости совпадают; для других они имеют существенные различия. Второй случай как раз относится к классу, рассматриваемому в данной работе.

Грубые потоки на плоскости были введены в классической статье А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1]. Неблуждающее множество таких потоков состоит из конечного числа

гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов, кроме того, седловые сепаратрисы пересекаются только трансверсально (для потоков на поверхности это означает, что отсутствуют *связки* – сепаратрисы, соединяющие седловые точки). Этот важный класс потоков был обобщён на произвольные поверхности, назван классом *потоков Морса – Смейла* и классифицирован с точностью до топологической эквивалентности. Известными комбинаторными инвариантами для потоков Морса – Смейла на поверхностях являются *схема Леонтович – Майера* [2, 3] для потоков на плоскости, *ориентированный граф Пейшото* [4] и *молекула Ошемкова – Шарко* [5] для потоков Морса – Смейла на произвольных замкнутых поверхностях.

Ж. Палис в своей работе [6] заметил, что наличие седловой связки у потока на поверхности приводит к тому, что класс топологической эквивалентности такого потока может содержать континуум классов топологической сопряжённости, описываемых параметрами, которые называются *модулями*. Он доказал, что каждая сепаратриса-связка даёт модуль, равный отношению собственных значений непересекающихся инвариантных многообразий седловых точек, соединённых связкой. Ф. Такенс [7] показал, что наличие модулей связано с отсутствием физической меры у траекторий потока.

В работе [8] показано, что у градиентно-подобных потоков (то есть потоков Морса – Смейла без предельных циклов) на поверхностях классы топологической эквивалентности и топологической сопряжённости совпадают. Очевидно, что каждый предельный цикл порождает модуль, равный периоду цикла. Кроме того, в работе [9] доказано, что наличие ячейки, ограниченной предельными циклами, порождает счетное число модулей, связанных с единственностью инвариантного слоения в бассейне предельного цикла.

В настоящей работе установлен критерий конечности числа модулей для потоков Морса – Смейла на поверхностях и получена классификация таких потоков в смысле топологической сопряжённости.

Теорема 1. *Поток Морса – Смейла на поверхности имеет конечное число модулей тогда и только тогда, когда у него нет траекторий, идущих из одного предельного цикла в другой.*

Топологическая классификация потоков Морса – Смейла с конечным числом модулей устойчивости относительно топологической сопряженности на поверхностях базируется на комбинаторных инвариантах топологической эквивалентности произвольных потоков Морса – Смейла, полученных в работах [5, 10]. Именно, классу топологической сопряженности потока Морса – Смейла ϕ^t на замкнутой поверхности мы ставим во взаимно однозначное соответствие класс изоморфности *оснащённого графа* $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$, содержащего информацию о разбиении несущего многообразия на ячейки со сходным поведением траекторий, о типах предельных циклов и их периодах.

Теорема 2. *Потоки Морса – Смейла ϕ^t, ϕ'^t без траекторий, идущих из одного предельного цикла в другой, топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их оснащённые графы $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$ и $\Upsilon^{**}_{\phi'^t}$ изоморфны.*

2. Динамика потоков Морса – Смейла на поверхностях

Пусть ϕ^t – поток Морса – Смейла на замкнутой поверхности S. Тогда его неблуждающее множество состоит из конечного числа компонент связности (*базисных множеств*) $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, каждое из которых является либо неподвижной точкой, либо периодической траекторией потока ϕ^t. Ниже мы приводим классификацию потоков ϕ^t в окрестности базисного множества Ω_i с точностью до топологической сопряжённости, кроме того, мы описываем асимптотическое поведение инвариантных многообразий базисных множеств.

2.1. Линеаризация потока в окрестности базисных множеств.

2.1.1. Неподвижные точки. Для $\lambda \in \{0, 1, 2\}$ определим поток $a^t_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ формулами:

$$a^t_0(x, y) = \left(2^{-t}x, 2^{-t}y\right),$$
$$a^t_1(x, y) = \left(2^{t}x, 2^{-t}y\right),$$
$$a^t_2(x, y) = \left(2^{t}x, 2^{t}y\right).$$

Утверждение 1 ([11, гл. 2, теорема 4.10]; [8, лемма 1]; [12, гл. 4, теорема 7.1]). *Для каждой гиперболической неподвижной точки Ω_i потока $\phi^t\colon S \to S$ существует число $\lambda_i \in \{0, 1, 2\}$ и окрестность U_i такие, что поток $\phi^t|_{U_i}$ топологически сопряжён с потоком $a^t_{\lambda_i}$.*

Точка Ω_i называется *стоком, седлом, источником* для $\lambda_i = 0, 1, 2$, соответственно (рис. 1).

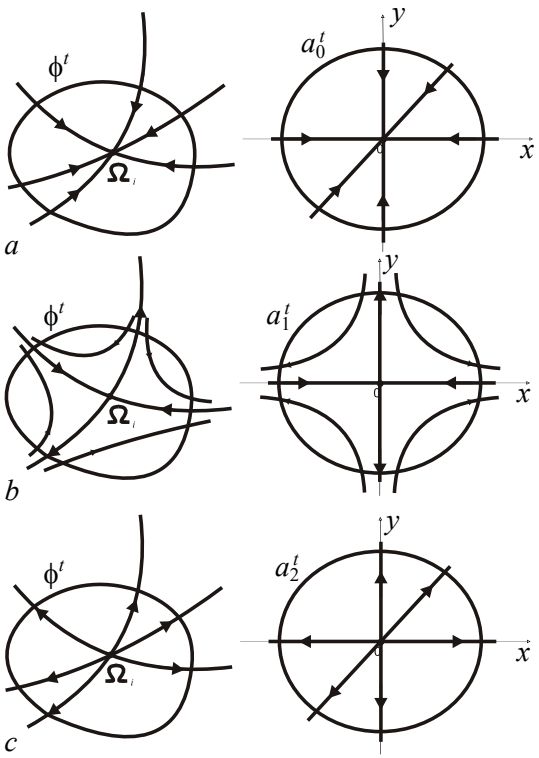

Рис. 1. Локальное сопряжение в окрестностях гиперболических неподвижных точек: сток (*a*), седло (*b*), источник (*c*)

Fig. 1. Local conjugation in neighborhood of hyperbolic fixed points: a sink (*a*), a saddle (*b*), a source (*c*)

2.1.2. Предельные циклы. Определим поток $A^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ формулой

$$A^t(x, y) = (x, y + t).$$

Для $\mu \in \{-1, 1\}$, $\lambda \in \{0, 1\}$ и $T > 0$ рассмотрим гомеоморфизм $g_{\mu,\lambda,T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданный формулой

$$g_{\mu,\lambda,T}(x, y) = (\mu \cdot 2^{(-1)^{\lambda+1}}x, y - T),$$

и группу $G_{\mu,\lambda,T} = \{g^n_{\mu,\lambda,T}, n \in \mathbb{Z}\}$. Обозначим через $\Pi_{\mu,\lambda,T}$ пространство орбит действия группы $G_{\mu,\lambda,T}$ на $\mathbb{R}^2$ и через $q_{\mu,\lambda,T}\colon \mathbb{R}^2 \to \Pi_{\mu,\lambda,T}$ естественную проекцию. Тогда $\Pi_{\mu,\lambda,T}$ это цилиндр при

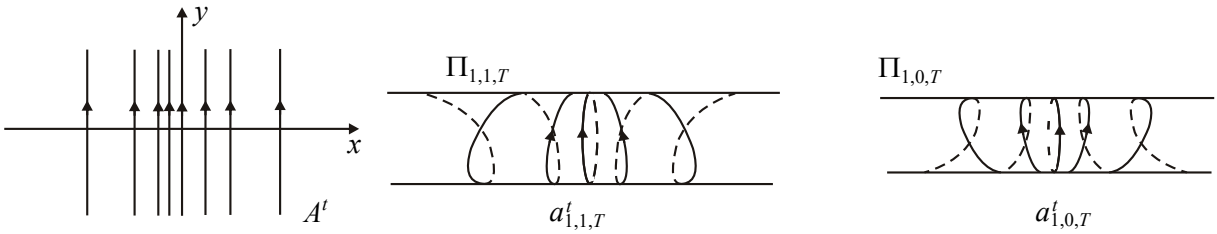

Рис. 2. Поток A^t на плоскости $\mathbb{R}^2$, поток $a^t_{1,0,T}$ на цилиндре $\Pi_{1,0,T}$ и поток $a^t_{1,1,T}$ на цилиндре $\Pi_{1,1,T}$

Fig. 2. $\mathbb{R}^2$ with the flow A^t, $\Pi_{1,0,T}$ with the flow $a^t_{1,0,T}$ and $\Pi_{1,1,T}$ with the flow $a^t_{1,1,T}$

$\mu = 1$ и плёнка Мёбиуса при $\mu = -1$; поток A^t индуцирует посредством $q_{\mu,\lambda,T}$ поток $a^t_{\mu,\lambda,T}$ на $\Pi_{\mu,\lambda,T}$ с единственным устойчивым предельным циклом $c_{\mu,\lambda,T} = q_{\mu,\lambda,T}(Oy)$ периода T при $\lambda = 0$ и поток $a^t_{\mu,\lambda,T}$ на $\Pi_{\mu,\lambda,T}$ с единственным неустойчивым предельным циклом $c_{\mu,\lambda,T} = q_{\mu,\lambda,T}(Oy)$ периода T при $\lambda = 1$ (рис. 2).

Утверждение 2 [13]. *Для каждого гиперболического предельного цикла Ω_i потока $\phi^t\colon S{\to}S$ существует набор чисел $\mu_i \in \{-1, 1\}$, $\lambda_i \in \{0, 1\}$, $T_i > 0$ и окрестность U_i такие, что $\phi^t|_{U_i}$ топологически сопряжён потоку $a^t_{\mu_i,\lambda_i,T_i}$.*

Предельный цикл Ω_i называется *устойчивым, неустойчивым* при $\lambda_i{=}0, 1$, соответственно.

2.2. Инвариантные многообразия базисных множеств.

Утверждение 3 [14, следствие 5.3]. *Каждое базисное множество Ω_i потока ϕ^t обладает устойчивым многообразием $W^s_{\Omega_i} = \{x \in S \mid \phi^t(x) \to \Omega_i$ для $t \to +\infty\}$ и неустойчивым многообразием $W^u_{\Omega_i} = \{x \in S \mid \phi^t(x) \to \Omega_i$ для $t \to -\infty\}$ со следующими свойствами.*

1. *Для каждой неподвижной точки Ω_i неустойчивое многообразие $W^u_{\Omega_i}$ (соотв. устойчивое $W^s_{\Omega_i}$) является гладким подмногообразием поверхности S, диффеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_i}$ (соотв. $\mathbb{R}^{2-\lambda_i}$).*
2. *Для каждой периодической траектории Ω_i неустойчивое многообразие $W^u_{\Omega_i}$ является гладким подмногообразием поверхности S, диффеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_i} \times \mathbb{S}^1$ при $\mu_i = 1$ и диффеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_i} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ при $\mu_i = -1$; устойчивое многообразие $W^s_{\Omega_i}$ является гладким подмногообразием поверхности S, диффеоморфным $\mathbb{R}^{1-\lambda_i} \times \mathbb{S}^1$ при $\mu_i = 1$ и диффеоморфным $\mathbb{R}^{1-\lambda_i} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ при $\mu_i = -1$.*
3. $S = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^s_{\Omega_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^u_{\Omega_i}$.

Введём на системе базисных множеств потока ϕ^t отношение Смейла, являющееся отношением частичного порядка: для базисных множеств Ω_i и Ω_j положим $\Omega_i \prec \Omega_j$, если $W^s_{\Omega_i} \cap W^u_{\Omega_j} \neq \varnothing$. Из классического утверждения дискретной математики следует, что отношение Смейла продолжается до отношения линейного порядка. Положим, что базисные множества упорядочены в соответствии с этим отношением: $\Omega_1 \prec \cdots \prec \Omega_k$.

Утверждение 4 [14, теорема 2.3]. *Пусть ϕ^t – поток Морса – Смейла на поверхности S и Ω_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$ – его упорядоченные базисные множества. Тогда*

$$\mathrm{cl}(W^u_{\Omega_i}) \backslash W^u_{\Omega_i} = \bigcup_{j:\Omega_j \prec \Omega_i} W^u_{\Omega_j}, \quad \mathrm{cl}(W^s_{\Omega_i}) \backslash W^s_{\Omega_i} = \bigcup_{j:\Omega_i \prec \Omega_j} W^s_{\Omega_j}.$$

Пусть $K_i = W^u_{\Omega_i}$ для неустойчивого цикла Ω_i и $K_i = W^s_{\Omega_i}$ для устойчивого цикла Ω_i, соответственно.

Утверждение 5 [9, лемма 4.1]. *Существует единственное ϕ^t-инвариантное одномерное слоение*[1] Ξ_i *на* K_i*, чьи слои* ξ_i *являются секущими для траекторий потока* $\phi^t|_{K_i}$*, и*

$$\phi^{T_i}(z) \in \xi_i,\ \phi^t(z) \notin \xi_i \text{ для } 0 < t < T_i, \text{ если } z \in \xi_i.$$

3. Необходимые условия конечности числа модулей для потока Морса – Смейла на поверхности

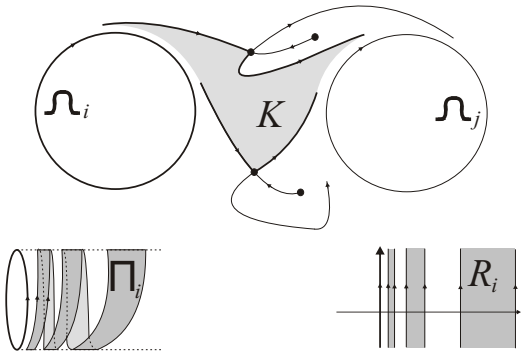

Рис. 3. Области K, Π_i и R_i
Fig. 3. Regions K, Π_i and R_i

Настоящий раздел посвящен доказательству следующей леммы.

Лемма 1. *Если у потока Морса – Смейла существует траектория, идущая из одного предельного цикла в другой, тогда поток имеет бесконечное число модулей.*

Доказательство 1. Предположим, что поток Морса – Смейла $\phi^t : S \to S$ имеет траекторию ℓ, идущую из неустойчивого предельного цикла Ω_i в устойчивый предельный цикл Ω_j. Обозначим через K компоненту связности области $K_i \cap K_j$, содержащую ℓ. Пусть $\eta_{\mu_i,\lambda_i,T_i} \colon U_i \to \Pi_{\mu_i,\lambda_i,T_i}$ – линеаризующий гомеоморфизм, сопрягающий $\phi^t|_{U_i}$ с $a^t_{\mu_i,\lambda_i,T_i}$ из Утверждения 2 для цикла Ω_i. Пусть $R_i = q^{-1}_{\mu_i,\lambda_i,T_i}(\eta_{\mu_i,\lambda_i,T_i}(K \cup \Omega_i))$ и $\Pi_i = R_i/G_{\mu_i,\lambda_i,T_i}$ (рис. 3).

Пусть ϕ'^t – поток Морса – Смейла такой, что ϕ^t сопряжён с ϕ'^t посредством гомеоморфизма $h \colon S \to S$. Будем обозначать теми же символами, но со штрихом, образы относительно гомеоморфизма h введённых объектов потока ϕ^t. По предположению $h\phi^t|_{K\cup\Omega_i} = \phi'^t h|_{K\cup\Omega_i}$ и, следовательно, $\mu'_i = \mu_i, \lambda'_i = \lambda_i, T'_i = T_i$. Пусть $\theta_i \colon R_i \to R'_i$ – поднятие гомеоморфизма $h|_{K\cup\Omega_i}$ ($q_{\mu_i,\lambda_i,T_i}\theta_i = hq_{\mu_i,\lambda_i,T_i}$), сопрягающее поток A^t с самим собой. Тогда θ_i имеет вид

$$\theta_i = (\varphi_i(x_i, y_i), \tilde{\psi}_i(x_i, y_i)),$$

где φ_i, $\tilde{\psi}_i$ – непрерывные отображения. Гомеоморфизм θ_i отображает траектории в траектории, но траектории потока A^t – это вертикальные прямые, тогда

$$\varphi_i(x_i, y_i) = \varphi_i(x_i).$$

По определению поток A^t имеет вид

$$A^t(x_i, y_i) = (x_i, y_i + t).$$

Тогда, в силу сопряжения,

$$\tilde{\psi}_i(x_i, y_i + t) = \tilde{\psi}_i(x_i, y_i) + t.$$

Представим функцию $\tilde{\psi}_i(x_i, y_i)$ в виде $\tilde{\psi}_i(x_i, y_i) = y_i + \psi_i(x_i, y_i)$. Тогда

$$y_i + t + \psi_i(x_i, y_i + t) = y_i + \psi_i(x_i, y_i) + t$$

и, следовательно,

$$\psi_i(x_i, y_i + t) = \psi_i(x_i, y_i), \quad t \in \mathbb{R}.$$

[1] В работе [9] Утверждение было доказано для $\mu_i = 1$, но случай $\mu_i = -1$ доказывается аналогично.

Это означает, что отображение ψ_i не зависит от y_i, положим

$$\psi_i(x_i, y_i) = \psi_i(x_i).$$

Таким образом, θ_i имеет вид

$$\theta_i(x_i, y_i) = (\varphi_i(x_i), y_i + \psi_i(x_i)).$$

Поскольку $R_i = \Pi_i / G_{\mu_i,\lambda_i,T_i}$, где G_{μ_i,λ_i,T_i} – циклическая группа, порождённая гомеоморфизмом $g_{\mu_i,\lambda_i,T_i}(x_i, y_i) = (x_i/2, y_i - T_i)$, и θ_i проецируется с $\mathbb{R}^2$ на $\Pi_{\mu_i,\lambda_i,T_i}$, тогда $g_{\mu_i,\lambda_i,T_i}\theta_i = \theta_i g_{\mu_i,\lambda_i,T_i}$. Отсюда имеем

$$(\varphi_i(x_i/2), y_i + \psi_i(x_i/2) - T_i) = (\varphi_i(x_i)/2, y_i + \psi_i(x_i) - T_i)$$

и, следовательно,

$$\psi_i(x_i/2) = \psi_i(x_i).$$

Покажем, что в таком случае $\psi_i(x_i)$ – константа. Действительно, пусть $x_i \in R_i \cap Ox_i$ и $y_i^n = \psi_i(x_i/2^n), n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\psi_i(x_i/2) = \psi_i(x_i)$, тогда $y_i^n = \psi_i(x_i)$ для любого натурального n. Поскольку ψ_i – непрерывная функция, тогда постоянная последовательность $\psi_i(x_i/2^n)$ сходится к $\psi_i(0)$ и $\psi_i(x_i) = \psi_i(0)$ для любого x_i. Таким образом,

$$\theta_i(x_i, y_i) = (\varphi_i(x_i), y_i + b_i),$$

где b_i – константа. Аналогичная ситуация с поднятием $\theta_j \colon R_j \to R_j'$ гомеоморфизма $h|_{K \cup \Omega_j}$ ($q_{\mu_j,\lambda_j,T_j}\theta_j = hq_{\mu_j,\lambda_j,T_j}$), откуда следует, что его можно записать в виде

$$\theta_j(x_j, y_j) = (\varphi_j(x_j), y_j + b_j).$$

Более того, существуют отображения $\Phi \colon R_j \to R_i$, $\Phi' \colon R_j' \to R_i'$, являющиеся поднятиями отображений $\phi \colon \Pi_j \setminus c_{\mu_j,\lambda_j,T_j} \to \Pi_i \setminus c_{\mu_i,\lambda_i,T_i}$, $\phi' \colon \Pi_j' \setminus c_{\mu_j,\lambda_j,T_j} \to \Pi_i' \setminus c_{\mu_i,\lambda_i,T_i}$, где

$$\phi = \eta_{\mu_i,\lambda_i,T_i}\eta^{-1}_{\mu_j,\lambda_j,T_j}, \quad \phi' = \eta'_{\mu_i,\lambda_i,T_i}\eta'^{-1}_{\mu_j,\lambda_j,T_j},$$

и имеющие вид

$$\Phi(x_j, y_j) = (\gamma(x_j, y_j), \tilde{\delta}(x_j, y_j)), \quad \Phi'(x_j, y_j) = (\gamma'(x_j, y_j), \tilde{\delta}'(x_j, y_j)),$$

где $\gamma, \tilde{\delta}, \gamma', \tilde{\delta}'$ – непрерывные отображения. Используя соображения, аналогичные вышеприведенным, θ_i и θ_j можно переписать в виде

$$\Phi(x_j, y_j) = (\gamma(x_j), y_j + \delta(x_j)), \quad \Phi'(x_j, y_j) = (\gamma'(x_j), y_j + \delta'(x_j)).$$

С другой стороны, $\Phi' = \theta_i \Phi \theta_j^{-1}$. Отсюда следует, что

$$\Phi'(x_j, y_j) = (\varphi_i(\gamma(\varphi_j^{-1}(x_j))), y_i + b_i + \delta(\varphi_j^{-1}(x_j)) - b_j).$$

Таким образом, $\delta'(x_j) = \delta(\varphi_j^{-1}(x_j)) + y_i^0$, где $y_i^0 = b_i - b_j$ или, эквивалентно,

$$\delta'(\varphi_j(x_j)) = \delta(x_j) + y_i^0.$$

Итак, δ является функциональным модулем и, следовательно, поток имеет бесконечное число модулей устойчивости. □

4. Оснащенный граф потока Морса – Смейла без траекторий, идущих из одного предельного цикла в другой на поверхности

Пусть G – класс потоков Морса – Смейла на поверхностях без траекторий, идущих из одного предельного цикла в другой. В этом разделе мы введем понятие графа потока $\phi^t \in G$, следуя [10].

4.1. Двудольный граф потока ϕ^t. Пусть $\Omega^c_{\phi^t}$ – множество предельных циклов потока ϕ^t. Любой предельный цикл c обладает окрестностью U_c, непересекающейся с другими предельными циклами и неподвижными точками потока ϕ^t, и чья граница R_c трансверсальна траекториям потока ϕ^t. Согласно Утверждению 2, окрестность U_c гомеоморфна кольцу или плёнке Мёбиуса. Положим

$$\mathcal{R} = \bigcup_{c \in \Omega^c_{\phi^t}} R_c.$$

Назовём $\mathcal{R}$ *разрезающим множеством*, а его компоненты связности R – *разрезающими окружностями*. Индуцируем ориентацию предельных циклов на разрезающие окружности их окрестностей (см. [10]). Пусть

$$\hat{S} = S \backslash \mathcal{R}.$$

Назовём *элементарной областью* компоненту связности множества $\hat{S}$. Согласно Утверждению 3, элементарные области могут быть исключительно трёх типов:

1) область типа $\mathcal{L}$, содержащая в точности один предельный цикл;

2) область типа $\mathcal{A}$, содержащая в точности один источник или один сток;

3) область типа $\mathcal{M}$, содержащая хотя бы одну седловую точку.

С помощью введенных областей построим двудольный граф Υ_{ϕ^t}. Для этого напомним, что *графом* Γ называется упорядоченная пара (B, E) такая, что B это конечное непустое множество *вершин*, E – множество пар вершин, которые называются *рёбрами*. Если граф включает в себя ребро $e = (a, b)$, обе вершины a и b называются *инцидентными* ребру e. При этом говорят, что вершины a и b *соединены* ребром e. *Степенью вершины* называется число инцидентных ей ребер. Конечная последовательность

$$\tau = (b_0, (b_0, b_1), b_1, \ldots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \ldots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_k), b_k)$$

вершин и рёбер графа называется *путём*, число k называется *длиной* пути и равно числу рёбер пути. Путь τ называется *простым*, если он содержит только попарно непересекающиеся рёбра. Простой путь τ называется *циклом*, если $b_0 = b_k$.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём. Граф называется *простым*, если у него нет циклов. Граф называется *направленным*, если каждое его ребро является упорядоченной парой вершин. *Двудольным графом* (или *биграфом*) называется граф, чьи вершины B могут быть поделены на два непересекающихся множества B_1 и B_2 таких, что каждое ребро соединяет вершину из B_1 с вершиной из B_2. Множества B_1 и B_2 называются *долями графа*.

Согласно [10], граф Υ_{ϕ^t} называется *графом потока Морса – Смейла* $\phi^t \in G$, если

- вершины Υ_{ϕ^t} взаимно однозначно соответствуют элементарным областям потока ϕ^t;
- рёбра Υ_{ϕ^t} ориентированы и взаимно однозначно соответствуют разрезающим окружностям, а именно, ребро, соответствующее окружности R, соединяет вершину a, соответствующую области A, с вершиной b, соответствующей области B, так, что траектории потока ϕ^t пересекают R, выходя из области A и входя в область B при возрастании времени (рис. 4).

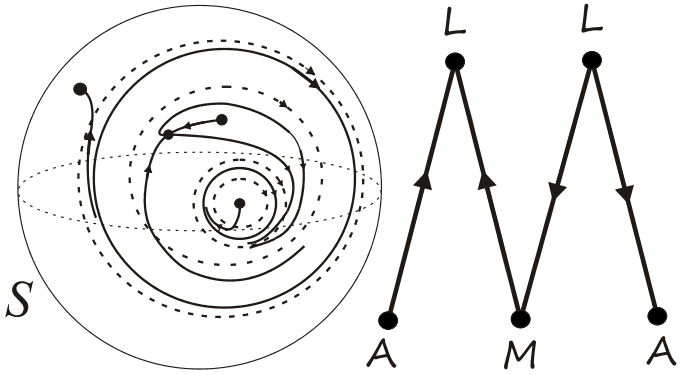

Рис. 4. Поток ϕ^t и его граф Υ_{ϕ^t}

Fig. 4. Flow ϕ^t and its graph Υ_{ϕ^t}

Мы будем называть $\mathcal{L}$-, $\mathcal{A}$- или $\mathcal{M}$-*вершиной* вершину графа Υ_{ϕ^t}, которая соответствует $\mathcal{L}$-, $\mathcal{A}$-, или $\mathcal{M}$-области, соответственно. Непосредственно из динамики потока ϕ^t и структуры разрезающего множества следует, что граф Υ_{ϕ^t} любого потока $\phi^t \in G$ является направленным двудольным графом, у которого одна доля состоит из $\mathcal{L}$-вершин, другая доля состоит из $\mathcal{A}$- и $\mathcal{M}$-вершин. Более того, каждая $\mathcal{L}$-вершина имеет степень 1 или 2 и ребра, инцидентные $\mathcal{L}$-вершине степени 2, направлены одновременно к вершине, или одновременно от неё.

4.2. Трехцветный граф $\mathcal{M}$-вершины. Рассмотрим некоторую $\mathcal{M}$-область, являющуюся или 2-многообразием с краем, или замкнутой поверхностью (в случае, когда ϕ^t изначально градиентно-подобный). В первом случае присоединим объединение D непересекающихся 2-дисков к границе, чтобы получить замкнутую поверхность M, во втором случае мы также обозначаем имеющуюся изначально замкнутую поверхность через M и полагаем $D = \varnothing$. Продолжим поток $\phi^t|_{\mathcal{M}}$ до градиентно-подобного потока $f^t\colon M \to M$ такого, что f^t совпадает с ϕ^t вне D и Ω_{f^t} имеет в точности одну неподвижную точку (сток или источник) в каждой компоненте связности D.

Положим $\Omega^0_{f^t}$, $\Omega^1_{f^t}$, $\Omega^2_{f^t}$ – множества всех стоков, сёдел и источников потока f^t, соответственно. По определению, область $\mathcal{M}$ потока f^t содержит минимум одну седловую точку. Пусть

$$\tilde{M} = M \setminus (\Omega^0_{f^t} \cup W^s_{\Omega^1_{f^t}} \cup W^u_{\Omega^1_{f^t}} \cup \Omega^2_{f^t}).$$

Компонента связности $\tilde{M}$ называется *ячейкой*. Непосредственно из Утверждений 3 и 4 следует, что каждая ячейка J потока f^t содержит единственный сток ω и единственный источник α в её границе, а вся ячейка является объединением траекторий, идущих из α в ω. Обозначим через J_{f^t} множество всех ячеек потока f^t. Выберем траекторию $\theta_J \in J_{f^t}$ в ячейке J, назовём её t-*кривой*. Положим

$$\mathcal{T} = \bigcup_{J \subset \tilde{M}} \theta_J, \quad \bar{M} = \tilde{M} \setminus \mathcal{T}.$$

Назовём u-*кривой* неустойчивую седловую сепаратрису, s-*кривой* устойчивую седловую сепаратрису. Назовём *треугольной областью* Δ компоненту связности множества $\bar{M}$ (см. рис. 5).

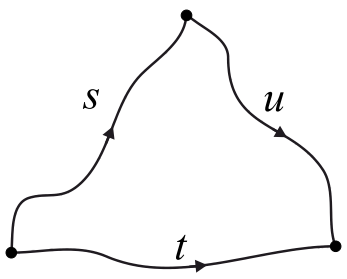

Рис. 5. Треугольная область

Fig. 5. Triangular region

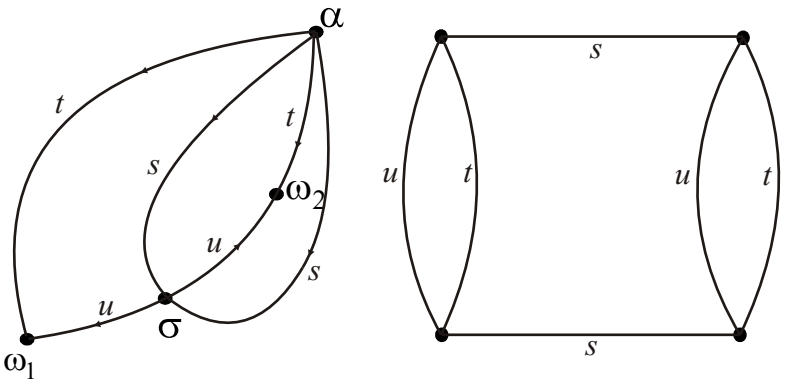

Рис. 6. Поток f^t и его трёхцветный граф

Fig. 6. Flow f^t and its three-colour graph

Утверждение 6 [5, 15]. *Каждая треугольная область Δ гомеоморфна открытому диску, и её граница состоит из единственной t-кривой, единственной u-кривой и единственной s-кривой.*

Обозначим через Δ_{f^t} множество всех треугольных областей потока f^t.

Напомним, что граф Γ называется *мультиграфом*, если у него существуют вершины, соединенные более чем одним ребром. Мультиграф называется *n-цветным графом*, если множество его рёбер является дизъюнктным объединением n подмножеств, каждое из которых состоит из рёбер одного и того же цвета.

Трёхцветный связный мультиграф $\Gamma_{\mathcal{M}}$ с рёбрами цветов $u,\ s,\ t$ называется *графом вершины* $\mathcal{M}$, если

- вершины $\Gamma_{\mathcal{M}}$ взаимно однозначно соответствуют треугольным областям множества Δ_{f^t};
- две вершины графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$ инцидентны ребру цвета s, t или u, если треугольные области, соответствующие этим вершинам, имеют общую s-, t- или u-кривую, соответственно (рис. 6).

Обозначим через π_{f^t} описанное выше взаимно-однозначное соответствие между вершинами и треугольными областями, а также между цветными рёбрами графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$ и цветными кривыми потока f^t, соответственно. Назовём *st-циклом*, *tu-циклом* и *su-циклом* циклы графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$, состоящие только из s- и t-рёбер, t- и u-рёбер, s- и u-рёбер, соответственно.

Утверждение 7 [15, предложение 3]. *Проекция π_{f^t} порождает взаимно-однозначное соответствием между множествами $\Omega^0_{f^t}$, $\Omega^1_{f^t}$, $\Omega^2_{f^t}$ и множествами tu-, su-, st-циклов, соответственно.*

По построению $M = \mathcal{M} \cup D$, где D или пусто, или каждая его компонента связности содержит в точности один сток ω (соотв. источник α) потока f^t, взаимно однозначно соответствующий разрезающей окружности R предельного цикла c потока ϕ^t. Окружность R в свою очередь взаимно однозначно соответствует $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$-ребру (соотв. $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-ребру) графа Υ_{ϕ^t}. Согласно Утверждению 7, узел ω (соотв. α) взаимно однозначно соответствует tu-циклу (соотв. st-циклу), обозначим этот цикл через $\tau_{\mathcal{M},\mathcal{L}}$ (соотв. $\tau_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$). Согласно Утверждению 7, граф $\Gamma_{\mathcal{M}}$ вкладывается в поверхность M так, что цикл $\tau_{\mathcal{M},\mathcal{L}}$ (соотв. $\tau_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$) совпадает с окружностью R и, соответственно, является *ориентированным* согласно ориентации, заданной на окружности.

4.3. Оснащённый граф потока ϕ^t.

Определение 1. *Граф Υ_{ϕ^t} потока $\phi^t \in G$ назовем оснащённым графом $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$ (см. рис. 7), если:*

- *каждая $\mathcal{M}$-вершина оснащена трёхцветным графом $\Gamma_{\mathcal{M}}$, соответствующим потоку f^t, построенному в подразделе 4.2;*

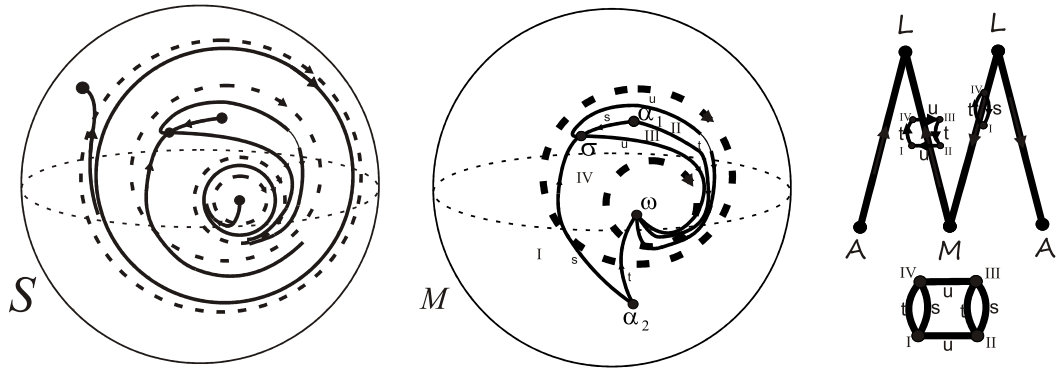

Рис. 7. Поток из класса G и его оснащённый граф

Fig. 7. Flow from G and its equipped graph

- *каждое ребро $(\mathcal{M},\mathcal{L})$ ($(\mathcal{L},\mathcal{M})$) оснащено ориентированным tu-циклом (st-циклом) $\tau_{\mathcal{M},\mathcal{L}}$ ($\tau_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$) графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$, соответствующим предельному циклу c из области $\mathcal{L}$ и ориентированным согласованно с R;*
- *каждая $\mathcal{L}$-вершина оснащена периодом $T_{\mathcal{L}}$ цикла, лежащего в соответствующей $\mathcal{L}$-области.*

Определение 2. *Два оснащенных графа $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$ и $\Upsilon^{**}_{\phi'^t}$ назовем изоморфными, если существует взаимно-однозначное соответствие ξ между всеми рёбрами и вершинами графа $\Upsilon^{*}_{\phi^t}$ и всеми рёбрами и вершинами графа $\Upsilon^{*}_{\phi'^t}$ такое, что:*

1. *для вершин $\mathcal{M}$ и $\xi(\mathcal{M})$ существует изоморфизм $\psi_{\mathcal{M}}$ графов $\Gamma_{\mathcal{M}}, \Gamma_{\xi(\mathcal{M})}$ такой, что $\psi_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M},\mathcal{L}}) = \tau_{\xi(\mathcal{M}),\xi(\mathcal{L})}$ и ориентации $\psi_{\mathcal{M}}(\tau_{\mathcal{M},\mathcal{L}})$ и $\tau_{\xi(\mathcal{M}),\xi(\mathcal{L})}$ совпадают (аналогично $\tau_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$);*
2. *$T_{\xi(\mathcal{L})} = T_{\mathcal{L}}$.*

Заметим, что из результатов работы [10] следует, что изоморфизм оснащённых графов $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$, $\Upsilon^{**}_{\phi'^t}$ потоков ϕ^t, $\phi'^t \in G$ может быть распознан за полиномиальное время. Ориентируемость несущей поверхности S потока $\phi^t \in G$ может быть проверена за линейное время, а эйлерова характеристика поверхности S может быть вычислена за квадратичное время по оснащённому графу $\Upsilon^{*}_{\phi^t}$.

4.4. Решение проблемы реализации.

Определение 3. *Направленный двудольный граф Υ^{**}, у которого одна доля состоит из $\mathcal{L}$-вершин, другая доля состоит из $\mathcal{A}$- и $\mathcal{M}$-вершин, назовем допустимым оснащенным графом, если выполнены следующие условия:*

- *каждая $\mathcal{L}$-вершина оснащена положительным параметром $T_{\mathcal{L}}$, имеет степень 1 или 2, и ребра, инцидентные $\mathcal{L}$-вершине степени 2, направлены одновременно к вершине, или одновременно от неё;*
- *каждая $\mathcal{M}$-вершина оснащена трёхцветным графом $\Gamma_{\mathcal{M}}$, который:*
  1) содержит su-, tu- и ts-циклы и каждый su-цикл имеет длину 4;
  2) индуцирует на $(\mathcal{M},\mathcal{L})$- и $(\mathcal{L},\mathcal{M})$-рёбрах оснащение $\tau_{\mathcal{M},\mathcal{L}}$- и $\tau_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$-циклами, которые попарно не пересекаются.

Методы, предложенные в [10, теорема 5.9], позволяют для каждого допустимого оснащённого графа Υ^{**} построить поток $\phi^t \in G$ такой, что граф $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$ будет изоморфен графу Υ^{**}.

5. Топологическая сопряженность потоков класса G

В настоящем разделе мы докажем Теорему 2, откуда, с учетом Леммы 1, непосредственно будет следовать доказательство Теоремы 1.

Докажем, что потоки Морса – Смейла на поверхностях ϕ^t, ϕ'^t без траекторий, идущих из одного предельного цикла в другой, топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их оснащённые графы $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$ и $\Upsilon^{**}_{\phi'^t}$ изоморфны.

Доказательство 2.

Необходимость. Пусть два потока Морса – Смейла ϕ^t, $\phi'^t \in G$ на замкнутой поверхности S топологически сопряжены, то есть существует гомеоморфизм $h\colon S \to S$ такой, что $h\phi^t = \phi'^t h$ для $t \in \mathbb{R}$. Поскольку сопряжение сохраняет тип базисных множеств и асимптотическое поведение их инвариантных многообразий, а также периоды предельных циклов, то изоморфизм ξ графов $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$ и $\Upsilon^{**}_{\phi'^t}$ задается формулой

$$\xi = \pi_{\phi'^t} h \pi^{-1}_{\phi^t}.$$

Достаточность. Положим, что два графа $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$ и $\Upsilon^{**}_{\phi'^t}$ изоморфны. Тогда из результатов работы [10] следует, что потоки ϕ^t и ϕ'^t эквивалентны посредством гомеоморфизма $\tilde{h}$. Пусть $\Omega'_i = \tilde{h}(\Omega_i)$ для базисных множеств Ω_i. Также, если ℓ – седловая сепаратриса потока ϕ^t, тогда $\ell' = \tilde{h}(\ell)$.

Пусть Ω_i, Ω'_i – предельные циклы, и $\eta_i\colon K_i \to \Pi_{\mu_i,1,T_i}$, $\eta'_i\colon K'_i \to \Pi_{\mu_i,1,T_i}$ – линеаризующие гомеоморфизмы для $\phi^t|_{K_i}$, $\phi^t|_{K'_i}$, соответственно. В силу Утверждения 5 существует единственное слоение Ξ_i на K_i и аналогичное слоение Ξ'_i на K'_i. Из изоморфизма графов следует, что $T_i = T'_i$. Тогда $\tilde{h}_i = \eta'^{-1}_i \eta_i\colon K_i \to K'_i$ отображает Ξ_i в Ξ'_i. Для каждого слоя $\xi_i \in \Xi_i$ обозначим через $\xi'_i \in \Xi'_i$ слой такой, что $\xi'_i = \tilde{h}_i(\xi_i)$. Для каждой седловой сепаратрисы $\ell\,(\ell')$, принадлежащей $K_i\,(K'_i)$, обозначим через $K_\ell\,(K_{\ell'})$ компоненту связности множества $K_i \setminus \Omega_i\,(K'_i \setminus \Omega'_i)$, которой она принадлежит.

Ниже мы модифицируем гомеоморфизмы $\tilde{h}$ и $\tilde{h}_i$ так, чтобы получить объемлющий сопрягающий гомеоморфизм.

1. Модификация гомеоморфизма около седловых точек. Пусть $U_0{=}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy|{<}1\}$. По Утверждению 1, существует окрестность u_σ седла σ и гомеоморфизм $\psi_\sigma\colon u_\sigma \to U_0$ такой, что ограничения $\phi^t|_{u_\sigma}$ и $a^t_1|_{U_0}$, где $a^t_1(x,y) = \left(2^t x, 2^{-t} y\right) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сопряжены посредством ψ_σ. Тогда ψ_σ может быть расширен гомеоморфизмом Ψ_σ на ϕ^t-инвариантную окрестность U_σ седла σ, ограниченную четырьмя траекториями такими, что $U_\sigma = \Psi^{-1}_\sigma(U_0^{\tau_\sigma})$, где $U_0^{\tau_\sigma} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < \tau_\sigma\}$ для некоторых $\tau_\sigma \in (0,1)$. Аналогично для $U_{\sigma'} = \Psi^{-1}_{\sigma'}(U_0^{\tau_{\sigma'}})$. Не уменьшая общности будем считать, что $\Psi_\sigma(\ell){=}\Psi_{\sigma'}(\ell')$ для каждой сепаратрисы ℓ седла σ.

Определим сопрягающий гомеоморфизм $h_\ell\colon \ell \to \ell'$ на каждой седловой сепаратрисе ℓ следующим образом. Если сепаратриса ℓ не содержит предельных циклов в своем замыкании, то положим $h_\ell = \Psi^{-1}_{\sigma'} \Psi_\sigma|_\ell$. Если сепаратриса ℓ содержит в своем замыкании предельный цикл Ω_i, то положим $h_\ell(\xi_i \cap \ell) = \ell' \cap \xi'_i$. Итак, для каждой седловой точки σ получаем сопрягающие гомеоморфизмы $h^u_\sigma : W^u_\sigma \to W^u_{\sigma'}$, $h^s_\sigma : W^s_\sigma \to W^s_{\sigma'}$.

Положим $H^u_\sigma = \Psi'_\sigma h^u_\sigma \Psi^{-1}_\sigma\colon Ox \to Ox$, $H^s_\sigma = \Psi'_\sigma h^s_\sigma \Psi^{-1}_\sigma\colon Oy \to Oy$ и $H_\sigma(x,y) = (H^u_\sigma(x), H^u_\sigma(y))$ для $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Положим $U_{0,\sigma} = U_0^{\tau_\sigma} \cap U_0^{\tau_{\sigma'}} \cap H^{-1}_\sigma(U_0^{\tau_\sigma} \cap U_0^{\tau_{\sigma'}})$. Для траектории $\gamma \subset U_{0,\sigma}$ потока a^t_1 положим $\gamma' = H_\sigma(\gamma)$.

Пусть $\Xi_\sigma = \Psi_\sigma(U_\sigma \cap (\bigcup\limits_{\Omega_i \in \Omega^c_{\phi^t}} \Xi_i))$, где $\Omega^c_{\phi^t}$ это множество предельных циклов потока ϕ^t. Заметим, что все слои из Ξ_σ пересекают только одну координатную ось, пусть это будет Ox для определённости (для Oy аналогично). Тогда для $x \in Ox$ обозначим через $\xi_{\sigma,x} \in \Xi_\sigma$ единственный слой, пересекающий Ox в точке x. Введём аналогичные обозначения, но со штрихами,

для σ'. Обозначим гомеоморфизм g_σ на $U_{0,\sigma}$ через $g_\sigma(x,y) = a_1^{t_\gamma}(x,y)$, где $a_1^{t_\gamma}(x,y) \in \xi_{\sigma,x}$ для $(x,y) \notin Oy$ и тождественен на Oy. Аналогично определим гомеоморфизм $g_{\sigma'}$ на $H_\sigma(U_{0,\sigma})$. Тогда гомеоморфизм $G_\sigma = g_{\sigma'} H_\sigma g_\sigma^{-1} \colon U_{0,\sigma} \to H_\sigma(U_{0,\sigma})$ переводит слои из Ξ_σ в слои $\Xi_{\sigma'}$, и $G_\sigma a_1^t = a_1^t G_\sigma$ для $t \in \mathbb{R}$.

Положим $V_\sigma = \Psi_\sigma^{-1}(U_{0,\sigma})$, $V_{\sigma'} = \Psi_{\sigma'}^{-1}(G_\sigma(U_{0,\sigma}))$ и $h_\sigma = \Psi_\sigma^{-1} G_\sigma \Psi_\sigma \colon V_\sigma \to V_{\sigma'}$. Положим $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{\sigma \in \Omega^1_{\phi^t}} V_\sigma$, $\mathcal{V}' = \bigcup\limits_{\sigma' \in \Omega^1_{\phi' t}} V_{\sigma'}$ и пусть $h_\mathcal{V} \colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ – гомеоморфизм, составленный из h_σ для всех седловых точек σ потока ϕ^t. Пусть $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{\Omega_i \in \Omega^c_{\phi^t}} K_i$, $\mathcal{K}' = \bigcup\limits_{\Omega'_i \in \Omega^c_{\phi' t}} K'_i$.

2. Продолжение гомеоморфизма $h_\mathcal{V}$ на множество $\mathcal{K}$. Рассмотрим слой $\xi_i \in \Xi_i$ и фундаментальный сегмент ξ_i^0 слоя ξ_i, ограниченный некоторой точкой $z \in \xi_i \setminus (\mathcal{V} \cup \tilde{h}_i^{-1}(\mathcal{V}'))$ и $\phi^{T_i}(z)$. Обозначим через $\xi_i'^0$ сегмент ξ'_i, ограниченный $\tilde{h}_i(z)$ и $\tilde{h}_i(\phi^{T_i}(z)) = \phi'^{T_i}(\tilde{h}_i(z))$. Определим гомеоморфизм $h_{\xi_i^0} \colon \xi_i^0 \to \xi_i'^0$ так, что $h_{\xi_i^0}|_{\xi_i^0 \cap \mathcal{V}} = h_\mathcal{V}|_{\xi_i^0 \cap \mathcal{V}}$. Заметим, что, по построению, сопряжение около предельного цикла полностью определяется гомеоморфизмом фундаментального сегмента слоя из Ξ_i. Следовательно, имеем сопрягающий гомеоморфизм $h_{K_i} \colon K_i \to K'_i$, индуцированный $h_{\xi_i^0}$. Обозначим через $h_\mathcal{K} \colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ – гомеоморфизм, составленный из h_{K_i}, $\Omega_i \in \Omega^3_{\phi^t}$. Положим $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cup \mathcal{K}$, $\mathcal{W}' = \mathcal{V}' \cup \mathcal{K}'$ и обозначим через $h_\mathcal{W} \colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}'$ гомеоморфизм, составленный из $h_\mathcal{V}$ и $h_\mathcal{K}$.

3. Продолжение гомеоморфизма $h_\mathcal{W}$ до объемлющего сопрягающего гомеоморфизма (рис. 8). Чтобы распространить гомеоморфизмы $h_\mathcal{W}$ до объемлющего сопрягающего гомеоморфизма h заметим, что, согласно Утверждению 3 пункт (3), замыкание W некоторой компоненты связности множества $S \setminus \mathcal{W}$ состоит или из единственной узловой точки, или из траекторий, идущих из источника α в сток ω. Кроме того, существует взаимно однозначное соответствие между W и аналогичной компонентой W' множества $S \setminus \mathcal{W}'$, определяемое эквивалентностью потоков ϕ^t и ϕ'^t.

В первом случае положим $h_W(W) = W'$. Рассмотрим второй случай. По Утверждению 1 существуют окрестности u_ω и $u_{\omega'}$ такие, что потоки $f^t|_{u_\omega}$ и $f'^t|_{u_{\omega'}}$ сопряжены посредством гомеоморфизмов ψ_ω и $\psi_{\omega'}$, соответственно с a_0^t, где $a_0^t(x,y) = \left(2^{-t}x, 2^{-t}y\right) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, в окрестности $\hat{U}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Пусть τ_0 – некоторая замкнутая кривая без контакта, трансверсально пересекающая все траектории потока a_0^t, и пусть $\tau = \psi_\omega^{-1}(\tau_0)$, $\tau' = \psi_{\omega'}^{-1}(\tau_0)$.

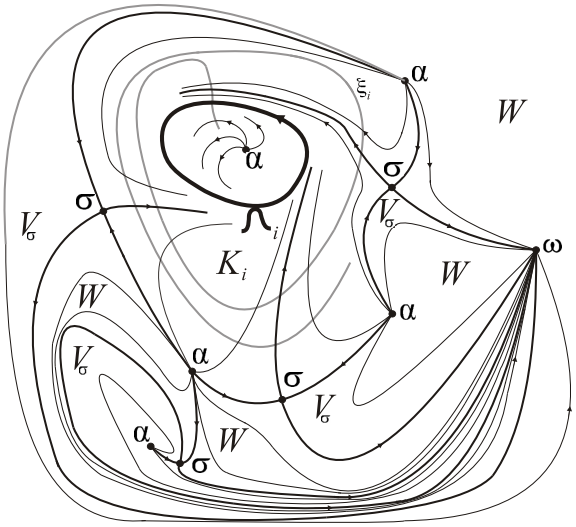

Рис. 8. Поток ϕ^t, предельный цикл Ω_i, сёдла σ, источники α, сток ω, слой ξ_i, области K_i, V_σ, W

Fig. 8. A flow ϕ^t, a limit cycle Ω_i, saddles σ, sources α, a sink ω, a leaf ξ_i, regions K_i, V_σ, W

Таким образом, τ, τ' – корректно определённые замкнутые кривые без контакта вокруг ω и ω', соответственно.

Положим $\tau_W = \tau \cap W$ и пусть a_0, a_1 – концы дуги τ_W. Тогда есть две седловые точки σ_0, σ_1 (возможно, $\sigma_0 = \sigma_1$) такие, что $a_i \in (\tau_W \cap V_{\sigma_i}), i = 0, 1$. Аналогично, дуга $\tilde{\tau}_{W'} = \tau' \cap W'$ ограничена точками $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1$, принадлежащими $V_{\sigma'_0}, V_{\sigma'_1}$, соответственно. Пусть $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ такие, что $\phi'^{t_i}(\tilde{a}_i) = h_{\mathcal{W}}(a_i), i = 0, 1$ и пусть $\rho\colon \tilde{\tau}_{W'} \to [0, 1]$ – гомеоморфизм такой, что $\rho(\tilde{a}_i) = i$, $i = 0, 1$. Пусть

$$\tau_{W'} = \{\phi'^{t_z}(\tilde{z}) \mid \tilde{z} \in \tilde{\tau}_{W'}, t_z = t_0 + (t_1 - t_0)\rho(\tilde{z})\}.$$

Определим произвольный гомеоморфизм $h_\tau\colon \tau_W \to \tau_{W'}$ так, что $h_\tau(a_i) = h_{\mathcal{W}}(a_i), i = 0, 1$. Тогда каждая точка z из W единственным образом определяется точкой $z_0 = \mathcal{O}_z \cap \tau_W$ и значением $t_z \in \mathbb{R}$ такими, что $\phi^{t_z}(z_0) = z$. Определим гомеоморфизм $h_W\colon W \to W'$ формулой

$$h_W(\phi^{t_z}(z_0)) = \phi'^{t_z}(h_\tau(z_0)).$$

Наконец определим сопрягающий гомеоморфизм $h\colon S \to S$ так, что $h|_{\mathcal{W}} = h_{\mathcal{W}}$ и $h|_W = h_W$. □

Заключение

Таким образом, в настоящей работе установлен критерий конечности числа модулей потоков Морса – Смейла на поверхностях. Для таких потоков построен комбинаторный инвариант (оснащённый граф), описывающий класс его топологической сопряженности. Выделен класс допустимых оснащённых графов, допускающих реализацию потоками Морса – Смейла с конечным числом модулей устойчивости.

Список литературы

1. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы // Доклады Академии наук СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
2. *Леонтович Е. А., Майер А. Г.* О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Доклады Академии наук СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 251–257.
3. *Леонтович Е. А., Майер А. Г.* О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Доклады Академии наук СССР. 1955. Т. 103, № 4. С. 557–560.
4. *Peixoto M. M.* On the classification of flows on 2-manifolds // In: Dynamical Systems. Proceedings of a Symposium Held at the University of Bahia. 26 July–14 August 1971, Salvador, Brasil. Cambridge, Massachusetts: Academic Press, 1973. P. 389–419. DOI: 10.1016/B978-0-12-550350-1.50033-3.
5. *Ошемков А. А., Шарко В. В.* О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 8. С. 93–140. DOI: 10.4213/sm341.
6. *Palis J.* A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability // Astérisque. 1978. Vol. 51. P. 335–346.
7. *Takens F.* Heteroclinic attractors: Time averages and moduli of topological conjugacy // Bol. Soc. Bras. Mat. 1994. Vol. 25, no. 1. P. 107–120. DOI: 10.1007/BF01232938.
8. *Kruglov V.* Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces // Динамические системы. 2018. Т. 8(36), № 1. С. 15–21.
9. *Kruglov V., Pochinka O., Talanova G.* On functional moduli of surface flows // Proceedings of the International Geometry Center. 2020. Vol. 13, no. 1. P. 49–60. DOI: 10.15673/tmgc.v13i1.1714.

10. *Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O.* Topological classification of Ω-stable flows on surfaces by means of effectively distinguishable multigraphs // Discrete & Continuous Dynamical Systems. 2018. Vol. 38, no. 9. P. 4305–4327. DOI: 10.3934/dcds.2018188.
11. *Palis J., de Melo W.* Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction. New York: Springer-Verlag, 1982. 198 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-5703-5.
12. *Robinson C.* Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. Boca Raton: CRC Press, 1995. 468 p.
13. *Irwin M. C.* A classification of elementary cycles // Topology. 1970. Vol. 9. P. 35–47.
14. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, no. 6. P. 747–817. DOI: 10.1090/S0002-9904-1967-11798-1.
15. *Круглов В. Е., Малышев Д. С., Починка О. В.* Многоцветный граф как полный топологический инвариант для Ω-устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 1. С. 100–126. DOI: 10.4213/sm8797.

References

1. Andronov AA, Pontryagin LS. Rough systems. Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1937;14(5):247–250 (in Russian).
2. Leontovich EA, Mayer AG. About trajectories determining qualitative structure of sphere partition into trajectories. Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1937;14(5):251–257 (in Russian).
3. Leontovich EA, Mayer AG. On a scheme determining the topological structure of the separation of trajectories. Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1955;103(4):557–560 (in Russian).
4. Peixoto MM. On the classification of flows on 2-manifolds. In: Dynamical Systems. Proceedings of a Symposium Held at the University of Bahia. 26 July–14 August 1971, Salvador, Brasil. Cambridge, Massachusetts: Academic Press; 1973. P. 389–419. DOI: 10.1016/B978-0-12-550350-1.50033-3.
5. Oshemkov AA, Sharko VV. Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds. Sbornik: Mathematics. 1998;189(8):1205–1250. DOI: 10.1070/SM1998v189n08ABEH000341.
6. Palis J. A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability. Astérisque. 1978;51:335–346.
7. Takens F. Heteroclinic attractors: Time averages and moduli of topological conjugacy. Bol. Soc. Bras. Mat. 1994;25(1):107–120. DOI: 10.1007/BF01232938.
8. Kruglov V. Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces. Dynamical Systems. 2018;8(1):15–21.
9. Kruglov V, Pochinka O, Talanova G. On functional moduli of surface flows. Proceedings of the International Geometry Center. 2020;13(1):49–60. DOI: 10.15673/tmgc.v13i1.1714.
10. Kruglov V, Malyshev D, Pochinka O. Topological classification of Ω-stable flows on surfaces by means of effectively distinguishable multigraphs. Discrete & Continuous Dynamical Systems. 2018;38(9):4305–4327. DOI: 10.3934/dcds.2018188.
11. Palis J, de Melo W. Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction. New York: Springer-Verlag; 1982. 198 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-5703-5.
12. Robinson C. Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. Boca Raton: CRC Press; 1995. 468 p.
13. Irwin MC. A classification of elementary cycles. Topology. 1970;9:35–47.
14. Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc. 1967;73(6):747–817. DOI: 10.1090/S0002-9904-1967-11798-1.
15. Kruglov VE, Malyshev DS, Pochinka OV. A multicolour graph as a complete topological invariant for Ω-stable flows without periodic trajectories on surfaces. Sbornik: Mathematics. 2018;209(1):96–121. DOI: 10.1070/SM8797.

Круглов Владислав Евгеньевич – родился в Нижнем Новгороде (1995). Окончил институт информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского по направлению «Математика», бакалавриат (2016) и магистратуру (2018). В 2018 году поступил в аспирантуру Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». С 2017 года работает в лаборатории топологических методов в динамике Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» в должности стажёра-исследователя, с 2018 года – на кафедре фундаментальной математики в должности преподавателя, с 2019 года – в лаборатории динамических систем и приложений в должности стажёра-исследователя, с 2020 – научного сотрудника. Научные интересы – качественная теория динамических систем. Опубликовал 18 научных статей.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: vekruglov@hse.ru
ORCID: 0000-0003-4661-0288
AuthorID: 923275

Починка Ольга Витальевна – родилась в 1972 году. Окончила механико-математический факультет Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского (ННГУ, 1994), аспирантуру Нижегородской государственной сельскохозяйственной академии (НГСХА, 2004) и докторантуру (ННГУ, 2011). Защитила диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (НГСХА, 2004) и доктора физико-математических наук (ННГУ, 2012). С 1997 по 2014 год работала на кафедре теории функций механико-математического факультета ННГУ имени Н. И. Лобачевского: сначала в должности ассистента, затем старшего преподавателя, доцента. С 2014 года по настоящее время – профессор, заведующая кафедрой фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Профессиональные интересы – качественная теория динамических систем.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12
Лаборатория топологических методов в динамике, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-6587-5305
AuthorID: 123665