Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(6)

Краткое сообщение
УДК 530.182
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868

Топология несущих многообразий несингулярных потоков с тремя нескрученными орбитами

Д. Д. Шубин

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
E-mail: schub.danil@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.05.2021, принята к публикации 27.07.2021, опубликована 30.11.2021

Аннотация. *Цель* настоящего исследования – установить топологические свойства трёхмерных многообразий, допускающих потоки Морса – Смейла без неподвижных точек (несингулярные или НМС-потоки), и привести примеры таких многообразий, не являющихся линзовыми пространствами. Несмотря на то, что известно, что любое такое многообразие является объединением круговых ручек, их топология может быть исследована дополнительно и уточнена в случае малого числа орбит. Так, например, в случае потока с двумя нескрученными (имеющими трубчатую окрестность, гомеоморфную заполненному тору) орбитами топология таких многообразий установлена точно: любое несущее многообразие НМС-потока с двумя орбитами является линзовым пространством. Ранее считалось, что такую же топологию имеют все простые ориентируемые многообразия, допускающие НМС-потоки не более чем с тремя нескрученными орбитами. *Методы.* В данной работе рассмотрены надстройки над диффеоморфизмами Морса – Смейла с тремя периодическими орбитами. Эти надстройки в свою очередь являются НМС-потоками с тремя периодическими траекториями. Рассмотрены универсальные накрытия несущих многообразий этих потоков и линзовых пространств. *Результаты.* В настоящей работе приводится счетное множество попарно различных простых 3-многообразий, допускающих НМС-потоки в точности с тремя нескрученными орбитами. *Заключение.* Из результатов данной работы следует, что существует счётное множество попарно различных трёхмерных многообразий, отличных от линзовых пространств, что опровергает ранее опубликованный результат, утверждающий, что любое простое ориентируемое многообразие, допускающее НМС-поток с не более чем тремя орбитами, является линзовым пространством.

Ключевые слова: неособые потоки, потоки Морса – Смейла.

Благодарности. Результаты подготовлены в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ)» в 2021 – 2022 гг. Автор благодарит О. В. Починку за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Для цитирования: *Шубин Д. Д.* Топология несущих многообразий несингулярных потоков с тремя нескрученными орбитами // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 6. С. 863–868. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868

Short communication
DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868

Topology of ambient manifolds of non-singular Morse – Smale flows with three periodic orbits

D. D. Shubin

National Research University
Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: schub.danil@yandex.ru
Received 29.05.2021, accepted 27.07.2021, published 30.11.2021

Abstract. The *purpose* of this study is to establish the topological properties of three-dimensional manifolds which admit Morse – Smale flows without fixed points (non-singular or NMS-flows) and give examples of such manifolds that are not lens spaces. Despite the fact that it is known that any such manifold is a union of circular handles, their topology can be investigated additionally and refined in the case of a small number of orbits. For example, in the case of a flow with two non-twisted (having a tubular neighborhood homeomorphic to a solid torus) orbits, the topology of such manifolds is established exactly: any ambient manifold of an NMS-flow with two orbits is a lens space. Previously, it was believed that all prime manifolds admitting NMS-flows with at most three non-twisted orbits have the same topology. *Methods.* In this paper, we consider suspensions over Morse – Smale diffeomorphisms with three periodic orbits. These suspensions, in turn, are NMS-flows with three periodic trajectories. Universal coverings of the ambient manifolds of these flows and lens spaces are considered. *Results.* In this paper, we present a countable set of pairwise distinct simple 3-manifolds admitting NMS-flows with exactly three non-twisted orbits. *Conclusion.* From the results of this paper it follows that there is a countable set of pairwise distinct three-dimensional manifolds other than lens spaces, which refutes the previously published result that any simple orientable manifold admitting an NMS-flow with at most three orbits is lens space.

Keywords: nonsingular flows, Morse – Smale flows.

Acknowledgements. The results were prepared in the course of the study (No. 21-04-004) within the framework of the Program "Scientific Foundation of the National Research University Higher School of Economics (HSE)" in 2021 – 2022. The author thanks O. V. Pochinka for setting the task and fruitful discussions.

For citation: Shubin DD. Topology of ambient manifolds of non-singular Morse – Smale flows with three periodic orbits. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(6):863–868. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868

В настоящей работе устанавливаются топологические свойства замкнутых 3-многообразий M^3, допускающих потоки Морса – Смейла без неподвижных точек (несингулярные или НМС-потоки). Из работы [1] известно, что любое такое многообразие является объединением круговых ручек. Напомним, что под круговой ручкой понимается n-диск $D^k \times D^{n-k}$, приклеенный к многообразию M по диффеоморфизму $S^{k-1} \times D^{n-k} \to \partial M$. Однако в случае малого числа орбит топологию многообразия можно уточнить. Например, НМС-потоки в точности с двумя нескрученными орбитами (имеющими трубчатую окрестность, гомеоморфную заполненному тору) допускают только линзовые пространства. В предположении, что несущее многообразие является простым (гомеоморфным $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ или неприводимым – любая цилиндрически вложенная в него 2-сфера ограничивает 3-шар), этот результат получен в [2], в общем случае – в [3], где также получена полная топологическая классификация таких потоков. Напомним, что в трубчатой окрестности периодических орбит НМС-поток топологически сопряжён с надстройкой над диффеоморфизмом $a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вида $a(x_1, x_2) \mapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$; в случае, когда $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, соответствующая орбита получится притягивающей, когда $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ – седловой, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ – отталкивающей. Для таких потоков одна периодическая орбита является притягивающей, другая отталкивающей. В силу того, что несущее многообразие любого НМС-потока является объединением неустойчивых (равно, как и устойчивых) многообразий своих периодических орбит, то при наличии более чем двух орбит НМС-поток необходимо имеет хотя бы одну притягивающую, хотя бы одну отталкивающую и хотя бы одну седловую орбиту. Согласно [2], НМС-потоки с нескрученными орбитами, не более, чем одна из которых является седловой, тоже допускают только линзовые пространства (см. Теорему 2 в [2]). В настоящей работе мы приведем счетное множество попарно различных простых 3-многообразий, допускающих НМС-потоки в точности с тремя нескрученными орбитами и не являющихся линзовыми пространствами. Откуда следует, что Теорема 2 в [2] не верна.

Теорема 1. *Существует счетное множество попарно различных простых 3-многообразий, допускающих НМС-потоки в точности с тремя нескрученными орбитами и не являющихся линзовыми пространствами.*

Доказательство. В работе [4] рассмотрен класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов f Морса – Смейла в точности с одной седловой орбитой $\mathcal{O}_\sigma$, заданных на замкнутых ориентируемых поверхностях S_g рода g. Установлено, что в случае, когда диффеоморфизм $f|_{W^u_\sigma}$ меняет ориентацию, неблуждающее множество диффеоморфизма f имеет кроме седловой одну стоковую $\mathcal{O}_\omega$ и одну источниковую $\mathcal{O}_\alpha$ орбиты. При этом необходимым и достаточным условием существования такого диффеоморфизма f на поверхности S_g является следующий набор периодов m_ω, m_σ, m_α орбит $\mathcal{O}_\omega$, $\mathcal{O}_\sigma$, $\mathcal{O}_\alpha$, соответственно:

- $m_\omega = 1$, $m_\sigma = 2g$, $m_\alpha = 1$, $g > 0$;
- $m_\omega = 1$, $m_\sigma = 2g + 1$, $m_\alpha = 2$, $g \geqslant 0$;
- $m_\omega = 2$, $m_\sigma = 2g + 1$, $m_\alpha = 1$, $g \geqslant 0$.

Таким образом, диффеоморфизмы Морса – Смейла в точности с тремя периодическими орбитами существуют на поверхности S_g любого рода $g \geqslant 0$ (рис. 1, 2, 3).

Пояснение к рис. 1, 2, 3: поверхность и диффеоморфизм на ней получаются склеиванием сторон многоугольника, имеющих одинаковое обозначение.

Рассмотрим диффеоморфизм $f_g\colon S_g \to S_g$, $g > 0$ с периодическими данными $m_\omega = 1$; $m_\sigma = 2g$; $m_\alpha = 1$ и надстройку $f^t_g\colon M_{f_g} \to M_{f_g}$ над ним. По определению надстройки 3-многообразие M_{f_g} является пространством орбит действия диффеоморфизма

$$F_g(x, r) = (f_g(x), r - 1)\colon S_g \times \mathbb{R} \to S_g \times \mathbb{R},$$

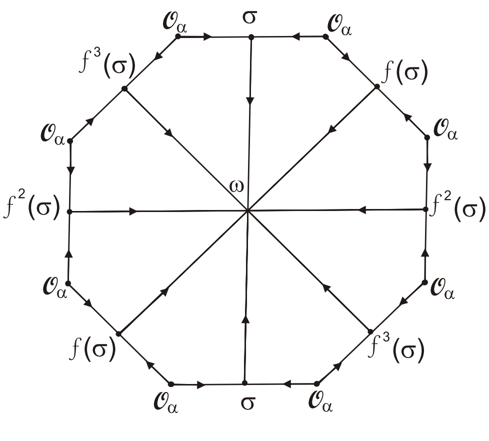

Рис. 1. Диффеоморфизм с периодическими данными $m_\omega = 1$, $m_\sigma = 4$, $m_\alpha = 1$, $g = 2$

Fig. 1. Diffeomorphism with periodic data $m_\omega = 1$, $m_\sigma = 4$, $m_\alpha = 1$, $g = 2$

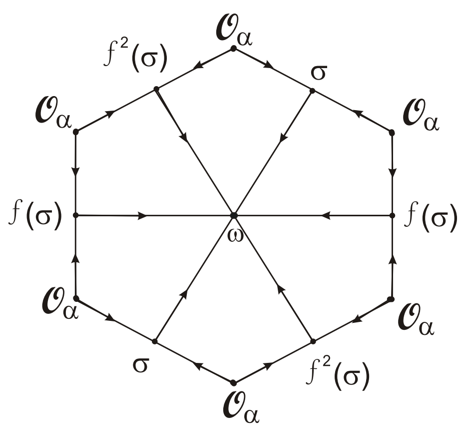

Рис. 2. Диффеоморфизм с периодическими данными $m_\omega = 1$, $m_\sigma = 3$, $m_\alpha = 2$, $g = 1$

Fig. 2. Diffeomorphism with periodic data $m_\omega = 1$, $m_\sigma = 3$, $m_\alpha = 2$, $g = 1$

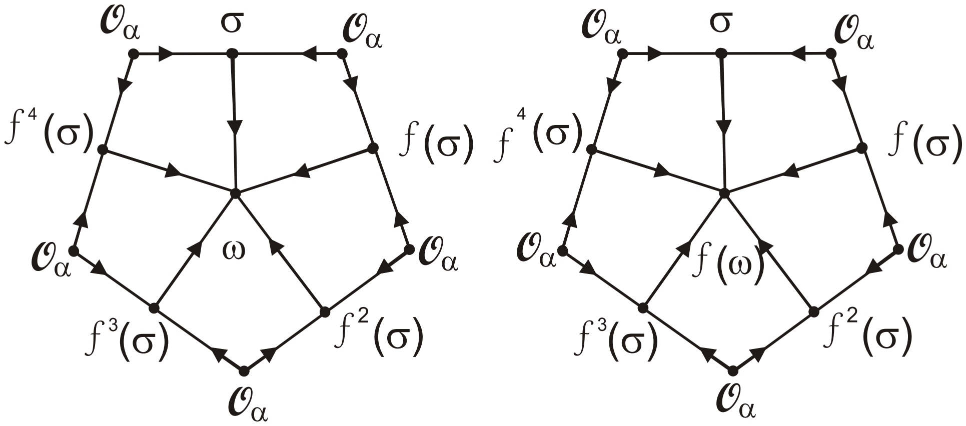

Рис. 3. Диффеоморфизм с периодическими данными $m_\omega = 2$, $m_\sigma = 5$, $m_\alpha = 1$, $g = 2$

Fig. 3. Diffeomorphism with periodic data $m_\omega = 2$, $m_\sigma = 5$, $m_\alpha = 1$, $g = 2$

то есть $M_{f_g} = S_g \times \mathbb{R}/F_g$. Обозначим через $v_{f_g}\colon S_g \times \mathbb{R} \to M_{f_g}$ естественную проекцию. Определим поток $\bar{f}^t_g$ на $S_g \times \mathbb{R}$ формулой:

$$\bar{f}^t_g(x, r) = (x, r + t).$$

Естественная проекция $v_{f_g}\colon S_g \times \mathbb{R} \to M_{f_g}$ индуцирует поток $f^t_g = v_{f_g}\bar{f}^t_g v^{-1}_{f_g}\colon M_{f_g} \to M_{f_g}$, называемый *надстройкой* над диффеоморфизмом f_g. По построению f^t_g – НМС-поток в точности с тремя нескрученными орбитами.

Покажем, что многообразие M_{f_g} является простым и не гомеоморфно линзовому пространству для всех $g > 0$.

В силу утверждения 1.6 в [5], многообразие является неприводимым, если оно накрывается неприводимым многообразием. Из определения надстройки следует, что многообразие M_{f_g} накрывается многообразием $S_g \times \mathbb{R}$. При этом поверхность S_g накрывается либо евклидовой плоскостью, либо плоскостью Лобачевского, и, следовательно, M_{f_g} универсально накрывается евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$, которое, как известно, неприводимо. Таким образом, M_{f_g} – простое многообразие. Поскольку все линзовые пространства универсально накрываются либо $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, либо $\mathbb{S}^3$, и универсальные накрытия у гомеоморфных пространств гомеоморфны (см., например, следствие 21.5 в [6]), то многообразие M_{f_g} не гомеоморфно линзовому пространству.

Покажем, что многообразия M_{f_g} попарно не гомеоморфны при различных g.

Заметим, что диффеоморфизм f_g является градиентно-подобным. В этом случае (см., например, [7]) он топологически сопряжён с диффеоморфизмом вида $\phi_g\xi^1_g$, где ϕ_g – периодический диффеоморфизм, совпадающий с f_g на неблуждающем множестве и имеющий период, совпадающий с периодом седловых сепаратрис (все сепаратрисы имеют одинаковый период), а ξ^1_g – сдвиг на единицу времени градиентно-подобного потока ξ^t_g. Таким образом, f_g и ϕ_g гомотопны. Из этого факта следует (см., например, теорему 2.6 в [5]), что многообразия M_{f_g} и M_{ϕ_g} – гомеоморфны.

В силу периодичности ϕ_g многообразие M_{φ_g} – зейфертово с тремя особыми слоями, соответствующими орбитам $\mathcal{O}_\alpha, \mathcal{O}_\omega, \mathcal{O}_\sigma$. Для диффеоморфизма f_g период седловых сепаратрис равен $4g$, и, следовательно, кратность этих слоёв равна $4g, 4g, 2$, соответственно. Кроме того, как было отмечено выше, многообразие M_{ϕ_g} универсально накрывается евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$. В этом случае (см., например, теорему 2.3 в [5]) многообразие M_{ϕ_g} допускает единственное с точностью до изоморфизма расслоение Зейферта. Напомним, что два зейфертовых расслоения называются *изоморфными*, если существует диффеоморфизм, переводящий слои одного слоения в слои второго. При этом (см., например, утверждение 2.1 [5] или теорему 10.2 [8]) необходимым условием изоморфности зейфертовых расслоений является равенство кратностей особых слоёв. Таким образом, зейфертовы расслоения на многообразиях M_{φ_g} попарно не изоморфны и, следовательно, многообразия M_{f_g} попарно не гомеоморфны при различных g. $\square$

Список литературы

1. *Asimov D.* Round handles and non-singular Morse – Smale flows // Annals of Mathematics. 1975. Vol. 102, no. 1. P. 41–54. DOI: 10.2307/1970972.
2. *Campos B., Cordero A., Martínez-Alfaro J., Vindel P.* NMS flows on three-dimensional manifolds with one saddle periodic orbit // Acta Mathematica Sinica. 2004. Vol. 20, no. 1. P. 47–56. DOI: 10.1007/s10114-003-0305-z.
3. *Pochinka O., Shubin D.* Nonsingular Morse – Smale flows of n-manifolds with attractor-repeller dynamics [Electronic resource] // arXiv: 2105.13110. arXiv Preprint, 2021. 17 p. Available from: https://arxiv.org/abs/2105.13110.
4. *Medvedev T., Nozhdrinova E., Pochinka O.* On periodic data of diffeomorphisms with one saddle orbit // Topology Proceedings. 2019. Vol. 54. P. 49–68.
5. *Hatcher A.* Notes on Basic 3-Manifold Topology [Electronic resource]. Ithaca, NY: Cornell University, 2007. 61 p. Available from: https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/3M/3M.pdf.
6. *Kosniowski C.* A First Course in Algebraic Topology. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. 269 p. DOI: 10.1017/CBO9780511569296.
7. *Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Vol. 46 of Developments in Mathematics. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. 295 p. DOI: 10.1007/978-3-319-44847-3.
8. *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Издательство МГУ, 1991. 304 с.
9. *Friedl S.* Algebraic Topology [Electronic resource]. Regensburg: University of Regensburg, 2019. 326 p. Available from: http://www.mathematik.uni-regensburg.de/friedl/papers/2016_algebraic-topology-i.pdf.

References

1. Asimov D. Round handles and non-singular Morse – Smale flows. Annals of Mathematics. 1975; 102(1):41–54. DOI: 10.2307/1970972.
2. Campos B, Cordero A, Martínez-Alfaro J, Vindel P. NMS flows on three-dimensional manifolds with one saddle periodic orbit. Acta Mathematica Sinica. 2004;20(1):47–56. DOI: 10.1007/s10114-003-0305-z.
3. Pochinka O, Shubin D. Nonsingular Morse – Smale flows of n-manifolds with attractor-repeller dynamics [Electronic resource]. arXiv: 2105.13110. arXiv Preprint; 2021. 17 p. Available from: https://arxiv.org/abs/2105.13110.
4. Medvedev T, Nozhdrinova E, Pochinka O. On periodic data of diffeomorphisms with one saddle orbit. Topology Proceedings. 2019;54:49–68.
5. Hatcher A. Notes on Basic 3-Manifold Topology [Electronic resource]. Ithaca, NY: Cornell University; 2007. 61 p. Available from: https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/3M/3M.pdf.
6. Kosniowski C. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge: Cambridge University Press; 1980. 269 p. DOI: 10.1017/CBO9780511569296.

7. Grines VZ, Medvedev TV, Pochinka OV. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Vol. 46 of Developments in Mathematics. Switzerland: Springer International Publishing; 2016. 295 p. DOI: 10.1007/978-3-319-44847-3.
8. Matveev SV, Fomenko AT. Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds. Netherlands: Springer; 1997. 337 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0699-5.
9. Friedl S. Algebraic Topology [Electronic resource]. Regensburg: University of Regensburg; 2019. 326 p. Available from:
http://www.mathematik.uni-regensburg.de/friedl/papers/2016_algebraic-topology-i.pdf.

Шубин Данила Денисович – родился в городе Павлово Нижегородской области (2000). С 2018 г. по настоящее время – студент факультета математики, информатики и компьютерных наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Нижний Новгород), стажёр-исследователь лаборатории топологических методов в динамике (ИМиКН НИУ ВШЭ).

Россия, 603155 Нижний Новгород, Большая Печерская, 25/12
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Лаборатория топологических методов в динамике
E-mail: schub.danil@yandex.ru
AuthorID: 1056063