



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1)

Научная статья

УДК 517.9:621.373.7

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29

## Обобщенная система Рабиновича–Фабриканта: уравнения и динамика

С. П. Кузнецов, Л. В. Тюрюкина ✉

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН, Россия

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉turukinalv@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.06.2021, принята к публикации 10.08.2021,  
опубликована 31.01.2022

**Аннотация.** Цель настоящей работы — численное исследование обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта, полученной с использованием формализма Лагранжа и описывающей трехмодовое взаимодействие в присутствии кубической нелинейности общего вида. Указанная модель демонстрирует богатую динамику, обусловленную наличием в уравнениях нелинейности третьего порядка. **Методы.** Исследование основано на численном решении полученных аналитически дифференциальных уравнений, а также их численном бифуркационном анализе с помощью программы MatCont. **Результаты.** Для полученной модели построены карты динамических режимов на плоскости управляющих параметров, зависимости показателей Ляпунова от параметра, аттракторы и их бассейны притяжения. На плоскости управляющих параметров численно найдены и построены бифуркационные линии для положений равновесия и предельного цикла периода один. Показано, что динамика обобщенной модели зависит от сигнатуры характерных выражений, присутствующих в уравнениях. Проведено сопоставление с динамикой модели Рабиновича–Фабриканта и указаны области, где имеет место полное или частичное совпадение динамики. **Заключение.** Полученная модель является новой и описывает взаимодействие трех мод в случае, когда кубическая нелинейность, определяющая их взаимодействие, задана в общем виде. Кроме того, так как рассматриваемая модель представляет собой некоторое естественное расширение известной модели Рабиновича–Фабриканта, то так же, как и модель Рабиновича–Фабриканта, она является универсальной и может моделировать системы различной физической природы (в том числе радиотехнические), в которых имеет место трехмодовое взаимодействие и присутствует кубическая нелинейность общего вида.

**Ключевые слова:** модель Рабиновича–Фабриканта, хаотические аттракторы, формализм Лагранжа, бифуркационный анализ, мультистабильность.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-12-00121, <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

**Для цитирования:** Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В. Обобщенная система Рабиновича–Фабриканта: уравнения и динамика // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 7–29. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics

*S. P. Kuznetsov*, *Turukina L. V.*✉

Saratov State University, Russia

Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering  
and Electronics of RAS, Russia

E-mail: ✉turukinalv@yandex.ru

Received 25.06.2021, accepted 10.08.2021, published 31.01.2022

**Abstract.** The purpose of this work is to numerically study of the generalized Rabinovich–Fabrikant model. This model is obtained using the Lagrange formalism and describing the three-mode interaction in the presence of a general cubic nonlinearity. The model demonstrates very rich dynamics due to the presence of third-order nonlinearity in the equations. **Methods.** The study is based on the numerical solution of the obtained analytically differential equations, and their numerical bifurcation analysis using the MatCont program. **Results.** For the generalized model we present a charts of dynamic regimes in the control parameter plane, Lyapunov exponents depending on parameters, portraits of attractors and their basins. On the plane of control parameters, bifurcation lines and points are numerically found. They are plotted for equilibrium point and period one limit cycle. It is shown that the dynamics of the generalized model depends on the signature of the characteristic expressions presented in the equations. A comparison with the dynamics of the Rabinovich–Fabrikant model is carried out. We indicated a region in the parameter plane in which there is a complete or partial coincidence of dynamics. **Conclusion.** The generalized model is new and describes the interaction of three modes, in the case when the cubic nonlinearity that determines their interaction is given in a general form. In addition, since the considered model is a certain natural extension of the well-known Rabinovich–Fabrikant model, then it is universal. And it can simulate systems of various physical nature (including radio engineering), in which there is a three-mode interaction and there is a general cubic nonlinearity.

**Keywords:** Rabinovich–Fabrikant model, chaotic attractors, Lagrange formalism, bifurcation analysis, multistability.

**Acknowledgements.** Research was carried out under support of the Russian Science Foundation (project no. 21-12-00121), <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

**For citation:** Kuznetsov SP, Turukina LV. Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1):7–29. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Введение

Исследование сложной динамики нелинейных систем, в том числе динамического хаоса, составляет одну из фундаментальных междисциплинарных проблем. К настоящему времени накоплен обширный материал, включающий множество теоретических результатов, методик и алгоритмов анализа, многообразие примеров модельных систем со сложной динамикой, экспериментальные данные и пр. [1–10]. Продуктивный подход в рамках этого направления состоит в выработке обобщенных моделей, охватывающих тот или иной круг феноменов и применимых, по крайней мере, для качественного описания систем различной природы. Одна из таких моделей предложена в 1979 г. Рабиновичем и Фабрикантом [11] для описания модуляционной неустойчивости и возникновения хаоса при параметрическом взаимодействии мод в неравновесной диссипативной среде с кубической нелинейностью со спектрально узким усилением. Считается, что возбуждаются три моды — основная мода, попадающая в область неустойчивости, и два симметрично расположенных сателлита за пределами этой области. Задача сводится

при ряде упрощающих предположений к конечномерной системе дифференциальных уравнений относительно трех действительных переменных

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(z - 1 + x^2) + \gamma x, \\ \dot{y} &= x(3z + 1 - x^2) + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(\nu + xy),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x, y, z$  — динамические переменные, а  $\nu$  и  $\gamma$  — параметры.

Известно, что модель Рабиновича–Фабриканта демонстрирует богатую феноменологию динамического поведения, включая различные регулярные и хаотические режимы и мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы разных типов [12–20]. Модель носит универсальный характер в том смысле, что она охватывает множество систем различной физической природы, таких, например, как волны Толлмина–Шлихтинга в гидродинамических течениях [21], ветровые волны на воде [22], волны в химических средах с диффузией [23], а также параметрические колебания, реализуемые в радиотехническом устройстве [18].

В настоящей работе мы предлагаем некоторое естественное расширение модели Рабиновича–Фабриканта, в рамках которого кубическая нелинейность, определяющая взаимодействие трех мод, задана в более общем виде. Можно полагать, что использование обобщенной модели расширит область применения подхода, предложенного в работе Рабиновича–Фабриканта, и феноменологию наблюдаемого динамического поведения.

## 1. Вывод уравнений обобщенной модели

Заметим, что модель Рабиновича–Фабриканта можно трактовать как результат применения метода медленных амплитуд к системе трех осцилляторов, описываемой функцией Лагранжа

$$L(x, y, z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^2 (m_n \dot{x}_n^2 - k_n x_n^2) - U(x_0, x_1, x_2),\tag{2}$$

где потенциал взаимодействия  $U(x_0, x_1, x_2)$  задан полиномом четвертой степени по трем своим аргументам и добавлена диссипация, определяемая функцией Рэлея с коэффициентами, положительными для спутников и отрицательными для основной моды:

$$R = \frac{1}{2} (-\gamma_0 \dot{x}_0^2 + \gamma_1 \dot{x}_1^2 + \gamma_2 \dot{x}_2^2).\tag{3}$$

В отношении нелинейного взаимодействия сделаем предположение, что оно полностью симметрично по отношению к перестановке осцилляторов, то есть функция  $U(x_0, x_1, x_2)$  представляется в виде суммы всевозможных комбинаций четвертой степени обобщенных координат. Благодаря симметрии, потенциальная функция естественным образом строится как сумма четырех групп однотипных членов, каждая из которых может иметь свой постоянный коэффициент:

$$\begin{aligned}U(x_0, x_1, x_2) = & \left[ \frac{1}{4} (x_0^4 + x_1^4 + x_2^4) + 3\beta (x_0^2 x_1^2 + x_0^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2) + \right. \\ & + 3\mu (x_0^2 x_1 x_2 + x_1^2 x_0 x_2 + x_2^2 x_0 x_1) + \\ & \left. + \eta (x_0^3 x_1 + x_0^3 x_2 + x_1^3 x_0 + x_1^3 x_2 + x_2^3 x_0 + x_2^3 x_1) \right].\end{aligned}\tag{4}$$

Константы  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  выступают как безразмерные параметры, характеризующие нелинейность. Как мы увидим далее, параметр  $\eta$  при переходе к описанию в рамках метода медленных амплитуд оказывается несущественным. Традиционная модель Рабиновича–Фабриканта получается в предположении  $\mu = \beta = 1$ .

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}, \quad j = 0, 1, 2 \quad (5)$$

в явной форме записываются как

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{x}_0 + k_0 x_0 + \alpha [x_0^3 + 3\beta x_0 (x_1^2 + x_2^2) + 3\mu x_1 x_2 (2x_0 + x_1 + x_2) + \\ + \eta (3x_0^2 x_1 + 3x_0^2 x_2 + x_1^3 + x_2^3)] = \gamma_0 \dot{x}_0, \\ m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \alpha [x_1^3 + 3\beta x_1 (x_2^2 + x_0^2) + 3\mu x_2 x_0 (2x_1 + x_2 + x_0) + \\ + \eta (3x_1^2 x_0 + 3x_1^2 x_2 + x_0^3 + x_2^3)] = -\gamma_1 \dot{x}_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + \alpha [x_2^3 + 3\beta x_2 (x_0^2 + x_1^2) + 3\mu x_0 x_1 (2x_2 + x_0 + x_1) + \\ + \eta (3x_2^2 x_0 + 3x_2^2 x_1 + x_0^3 + x_1^3)] = -\gamma_2 \dot{x}_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь основной моде отвечает осциллятор с индексом 0, а спутникам — соответственно, 1 и 2.

Имея в виду наложенное резонансное условие  $2\omega_0 \approx \omega_1 + \omega_2$ , где  $\omega_i = \sqrt{k_i/m_i}$ , в предположении малой нелинейности и диссипации, можно полагать, что амплитуды мод за характерный интервал времени меняются незначительно, и применить к системе (6) метод медленных амплитуд. Для этого представим обобщенные координаты осцилляторов в виде

$$x_n = a_n \exp(i\omega_n t) + a_n^* \exp(-i\omega_n t), \quad n = 0, 1, 2, \quad (7)$$

где  $a_n$  — комплексные амплитуды. Поскольку полное количество величин (действительные и мнимые части  $a_n$ ) при этом становится избыточным, мы вправе наложить на каждую комплексную амплитуду  $a_n$  дополнительное условие

$$\dot{a}_n \exp(i\omega_n t) + \dot{a}_n^* \exp(-i\omega_n t) = 0, \quad n = 0, 1, 2. \quad (8)$$

После подстановки выражений (7), (8) в уравнения (6), усреднения по времени и приведения подобных слагаемых, с учетом возможного отклонения по частоте от резонанса  $\Delta\omega = 2\omega_0 - \omega_1 - \omega_2 \neq 0$  в показателе экспоненты, получаем следующие амплитудные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= \frac{1}{2} \gamma_0 a_0 + i \frac{1}{\omega_0 m_0} \left[ \mu a_0^* a_1 a_2 \exp(-i\Delta\omega t) + \frac{3}{2} (|a_0|^2 + 2\beta |a_1|^2 + 2\beta |a_2|^2) a_0 \right], \\ \dot{a}_1 &= -\frac{1}{2} \gamma_1 a_1 + i \frac{1}{\omega_1 m_1} \left[ \mu a_0^2 a_2^* \exp(i\Delta\omega t) + \frac{3}{2} (|a_1|^2 + 2\beta |a_0|^2 + 2\beta |a_2|^2) a_1 \right], \\ \dot{a}_2 &= -\frac{1}{2} \gamma_2 a_2 + i \frac{1}{\omega_2 m_2} \left[ \mu a_0^2 a_1^* \exp(i\Delta\omega t) + \frac{3}{2} (|a_2|^2 + 2\beta |a_0|^2 + 2\beta |a_1|^2) a_2 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее следуя подходу работы [11], считаем, что амплитуда основной компоненты  $a_0$  существенно больше амплитуд спутников  $a_{1,2}$  и что комплексные амплитуды спутников одинаковы, так как из-за близости частот коэффициенты в амплитудных уравнениях для спутников 1 и 2 практически совпадают.

Введем действительные амплитуды  $A_{0,1}$  и фазы  $\varphi_{0,1}$ , используя соотношения  $a_0 = A_0 \exp(i\varphi_0)$  и  $a_1 = a_2 = A_1 \exp(i\varphi_1)$ , подставим эти соотношения в уравнения (9) и, отделяя действительные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned}\dot{B}_0 &= \mu B_0 B_1 \sin \varphi + 2 \frac{\gamma_0}{\Delta \omega} B_0, \\ \dot{B}_1 &= -\mu B_0 B_1 \sin \varphi - \frac{\gamma_1}{\Delta \omega} B_1, \\ \dot{\varphi} &= 1 + (2\beta - 1)(B_1 - B_0) + \mu(2B_1 - B_0) \cos \varphi.\end{aligned}\tag{10}$$

Здесь  $B_n = 3/(m_n \omega_n \Delta \omega) A_n^2$ ,  $n = 0, 1$  — нормированные действительные амплитуды,  $\varphi = 2(\varphi_0 - \varphi_1) + \Delta \omega t$  — текущая фазовая расстройка,  $\tau = \Delta \omega t$  — безразмерное время.

Наконец, введем новые переменные  $x = \sqrt{2B_0} \cos(\varphi/2)$ ,  $y = \sqrt{2B_0} \sin(\varphi/2)$ ,  $z = B_1$  и время  $t = \tau/2$ . Положим также  $p = ((1/2)\mu + \beta - 1/2)$ ,  $q = ((1/2)\mu - \beta + 1/2)$ ,  $\gamma = \gamma_0/(\Delta \omega)$ ,  $v = \gamma_1/(\Delta \omega)$ . Тогда из системы (10) получим:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= [p(x^2 + z) + q(-y^2 + 3z) - 1] y + \gamma x, \\ \dot{y} &= [p(-x^2 + 3z) + q(y^2 + z) + 1] x + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(v + (p + q)xy).\end{aligned}\tag{11}$$

Система (11) совпадает с моделью Рабиновича–Фабриканта (1), если в уравнениях положить  $p = 1$ ,  $q = 0$ , и, таким образом, представляет обобщение на случай кубической нелинейности более общего вида, нежели в исходной модели [11]. Заметим, что, как и модель Рабиновича–Фабриканта, система (11) обладает свойством симметрии относительно замены переменных  $x \rightarrow -x$  и  $y \rightarrow -y$ .

В системе (11) присутствуют две группы параметров. Первая представлена параметрами  $\gamma$  и  $v$ , которые идентичны параметрам модели Рабиновича–Фабриканта и имеют смысл коэффициентов диссипации — положительной для спутников и отрицательной для основной моды. Вторая группа представлена параметрами  $p$  и  $q$ . Это новые параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие между осцилляторами в системе.

## 2. Динамика обобщенной модели на плоскости параметров нелинейного взаимодействия

Рассмотрим динамику системы (11). Для начала построим для нее карту динамических режимов на плоскости параметров нелинейного взаимодействия  $(p, q)$  для значений параметров  $\gamma = 0.96$  и  $v = 1.5$  (рис. 1, а). Такая карта строится при сканировании плоскости параметров, когда в каждой ее точке численно определяется тип наблюдаемого режима, который обозначается соответствующим цветом. На карте, на рис. 1, а, наблюдаются следующие режимы: темно-синий цвет отвечает состоянию равновесия, голубой — предельному циклу периода 1, желтый — циклу периода 2, красный — циклу периода 4, и т. д., черный цвет отвечает хаотическому режиму, а белым цветом обозначена область убегания траекторий на бесконечность. Указанные периоды циклов определяются стандартным образом с помощью сечений Пуанкаре. Также система (11) демонстрирует новый тип динамики, не наблюдавшийся в модели Рабиновича–Фабриканта (1), который состоит в том, что в фазовом пространстве существует инвариантное (устойчивое) множество в виде окружности, целиком лежащее в плоскости  $z = 0$ . Соответствующая область отмечена на карте динамических режимов серым цветом. Однако этот режим не представляет интереса для исследования, так как в терминах исходной системы дифференциальных уравнений (6),

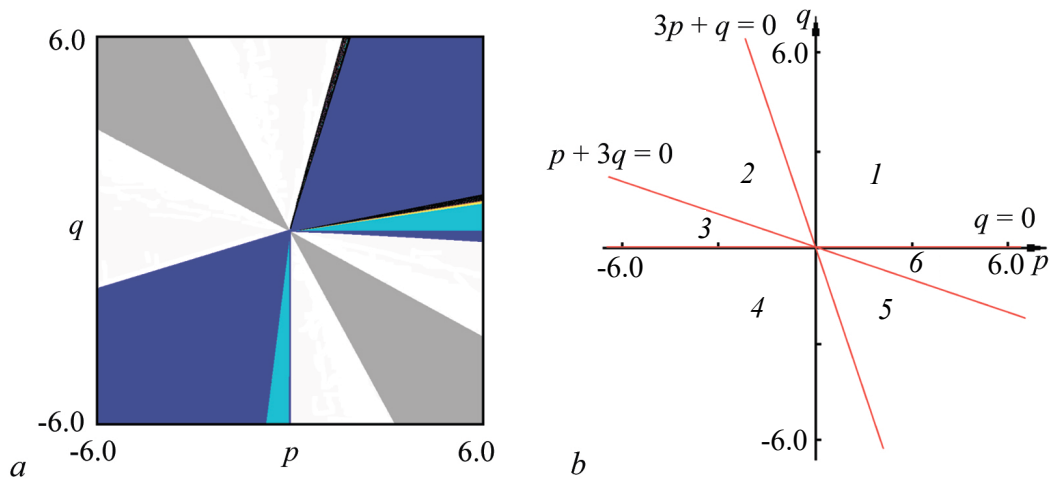


Рис. 1. *a* – Карта динамических режимов системы (11) на плоскости параметров  $(p, q)$ , построенная для  $\gamma = 0.96$  и  $\nu = 1.5$ . *b* – Разбиение плоскости параметров  $(p, q)$  на области, отвечающие разной сигнатуре выражений  $p + 3q$ ,  $3p + q$  и  $q$  (цвет online)

Fig. 1. *a* – Chart of dynamical regimes of the model (11) at  $(p, q)$  parameter plane at  $\gamma = 0.96$  and  $\nu = 1.5$ . *b* – Division of the  $(p, q)$  parameter plane into regions corresponding to different signature of expressions  $p + 3q$ ,  $3p + q$  and  $q$  (color online)

как следует из тех замен переменных, что сделаны при выводе системы (11) (см. раздел 1), он отвечает тому, что амплитуда колебаний осциллятора с индексом 0 (основная мода)  $A_0 = \text{const}$ , а амплитуды осцилляторов с индексами 1, 2 (спутники)  $A_1 = A_2 = 0$ .

Из рис. 1, *a* видно, что области различных периодических режимов, хаоса и область убегания траекторий на бесконечность имеют вид расходящихся из начала координат лучей. При этом качественное устройство карты динамических режимов системы (11) не зависит от выбора параметров  $\gamma$  и  $\nu$ .

На рис. 1, *b* представлено разбиение плоскости  $(p, q)$  на области, отвечающие разной сигнатуре выражений  $p + 3q$ ,  $3p + q$  и  $q$ . Для того чтобы объяснить, откуда взялись эти выражения, перепишем систему (11) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \left[ (p + 3q)z - 1 + (p + q)x^2 - q \frac{x^2 + y^2}{2} \right] + \gamma x, \\ \dot{y} &= x \left[ (3p + q)z + 1 - (p + q)x^2 + q \frac{x^2 + y^2}{2} \right] + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(\nu + (p + q)xy).\end{aligned}\tag{12}$$

В этом случае уравнения выглядят более громоздкими, однако их структура аналогична структуре уравнений модели Рабиновича–Фабриканта (1). А именно, в первом и втором уравнениях системы (12) в квадратных скобках будет четыре слагаемых вида:  $\text{const}_1 z$ , 1,  $\text{const}_2 x^2$  и новое слагаемое, которого не было в модели (1),  $\text{const}_3 (x^2 + y^2)$ . При этом всего в системе (12) три значимых комбинации параметров,  $(p + 3q)$ ,  $(3p + q)$  и  $q$ , то есть коэффициенты перед слагаемыми  $z$  в первом и втором уравнениях системы (12) и коэффициент перед слагаемым  $(x^2 + y^2)$ , одинаковый для обоих уравнений<sup>1</sup>. Указанные условия задают на плоскости  $(p, q)$  линии:

$$p + 3q = 0, \quad 3p + q = 0, \quad q = 0,\tag{13}$$

<sup>1</sup>Четвертая комбинация параметров  $p + q$  задает на плоскости  $(p, q)$  линию  $p = -q$ , которая является линией симметрии карты динамических режимов, но не влияет на ее структуру.

каждая из которых делит плоскость  $(p, q)$  на две области, в одной соответствующая комбинация параметров будет больше нуля, а в другой — меньше. Полное разделение плоскости  $(p, q)$  на области представлено на рис. 1, *b* и оно, так же, как и карта динамических режимов, не зависит от параметров  $\gamma$  и  $\nu$ . Из рисунка видно, что плоскость  $(p, q)$  разбита на шесть областей с разной сигнатурой выражений  $p + 3q$ ,  $3p + q$  и  $q$ . При этом состояние равновесия, предельные циклы различных периодов и хаос будут наблюдаться лишь в областях 1 ( $p + 3q > 0$ ,  $3p + q > 0$ ,  $q > 0$ ), 4 ( $p + 3q < 0$ ,  $3p + q < 0$ ,  $q < 0$ ) и 6 ( $p + 3q > 0$ ,  $3p + q > 0$ ,  $q < 0$ ). Именно из этих областей и будут выбираться значения параметров  $p$  и  $q$  для дальнейшего исследования системы (11). Новый тип динамики, инвариантное (устойчивое) множество в виде окружности, целиком лежащее в плоскости  $z = 0$ , находится в областях 2 ( $p + 3q > 0$ ,  $3p + q < 0$ ,  $q > 0$ ) и 5 ( $p + 3q < 0$ ,  $3p + q > 0$ ,  $q < 0$ ), а убегание траекторий на бесконечность — во всех шести областях.

### 3. Динамика обобщенной модели на плоскости параметров диссипации

Теперь построим для системы (11) карты динамических режимов на плоскости параметров  $(\nu, \gamma)$ . Параметры  $p$  и  $q$  выберем из тех областей на плоскости  $(p, q)$  (рис. 1, *b*), в которых система (11) демонстрирует периодические и хаотические режимы, то есть из областей 1, 4 и 6, а также на линии  $p = 0$ . Соответствующие карты представлены на рис. 2. При их построении использовалась та же цветовая палитра, что и в случае рис. 1, *a*. Кроме этого на рис. 2, *a* представлена карта динамических режимов для модели Рабиновича–Фабриканта (1), взятая из работы [20]. Это позволит сопоставить динамику системы (11) с динамикой, характерной для модели Рабиновича–Фабриканта.

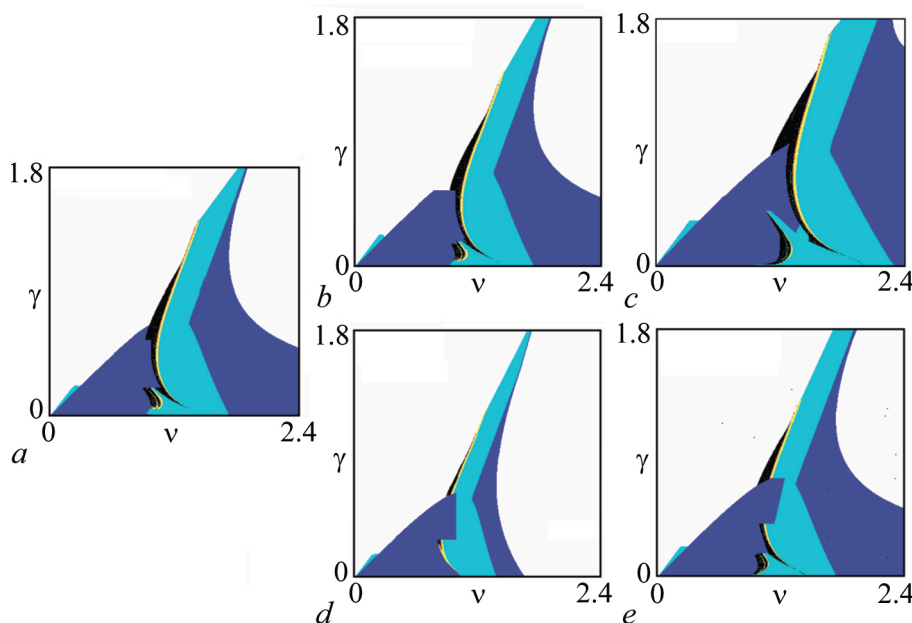


Рис. 2. *a* — Карта динамических режимов модели Рабиновича–Фабриканта (1) на плоскости  $(\nu, \gamma)$ . *b–e* — Карты динамических режимов системы (11) на плоскости  $(\nu, \gamma)$  для  $p = 0.8$ ,  $q = 0.0$  (*b*);  $p = 0.9$ ,  $q = 0.1$  (*c*);  $p = 1.3$ ,  $q = -0.1$  (*d*);  $p = -0.05$ ,  $q = -0.85$  (*e*) (цвет online)

Fig. 2. *a* — Chart of dynamical regimes of the Rabinovich–Fabrikant model (1) at  $(\nu, \gamma)$  parameter plane. *b–e* — Chart of dynamical regimes of the model (11) at  $(\nu, \gamma)$  parameter plane at  $p = 0.8$ ,  $q = 0.0$  (*b*);  $p = 0.9$ ,  $q = 0.1$  (*c*);  $p = 1.3$ ,  $q = -0.1$  (*d*);  $p = -0.05$ ,  $q = -0.85$  (*e*) (color online)



Пусть сначала  $p = 0.8$ , а  $q = 0.0$ . Это отвечает тому, что точка на плоскости  $(p, q)$  лежит на линии  $q = 0$  на рис. 1, *b*. В этом случае в системе (12) коэффициент перед слагаемым  $(x^2 + y^2)$  равен нулю и от модели Рабиновича–Фабриканта (1) она будет отличаться лишь другими коэффициентами перед слагаемыми  $z$  и  $x^2$ , а структура уравнений будет та же самая. Соответствующая карта динамических режимов системы (11) на плоскости  $(v, \gamma)$  представлена на рис. 2, *b*. Из ее сопоставления с рис. 2, *a* видно, что карты как качественно, так и количественно идентичны друг другу. А значит, и динамика системы (11) будет идентична динамике системы (1). Также отметим, что для других значений параметров  $p$  и  $q$ , лежащих на линии  $q = 0$  в области  $p > 0$ , карта динамических режимов системы (11) меняться не будет. В случае же когда  $p < 0$ , в системе (11) будет иметь место убегание траекторий на бесконечность.

Пусть теперь  $p = 0.9$ , а  $q = 0.1$ . В этом случае точка на плоскости  $(p, q)$  попадает в область *I* (см. рис. 1, *b*). Соответствующая карта динамических режимов системы (11) на плоскости  $(v, \gamma)$  представлена на рис. 2, *c*, из которого видно, что теперь динамика системы (11) количественно отличается от той, что демонстрирует модель Рабиновича–Фабриканта (1) (см. рис. 2, *a*). Так, области периодических и хаотических режимов становятся шире и сдвигаются вправо; и как мы покажем далее, мультистабильность будет наблюдаться при больших значениях параметра  $\gamma$ , чем в случае модели Рабиновича–Фабриканта (1).

Теперь положим  $p = 1.3$ , а  $q = -0.1$ , а точка на плоскости  $(p, q)$  попадает в область *b* (см. рис. 1, *b*). Карта динамических режимов системы (11) на плоскости  $(v, \gamma)$  для этого случая представлена на рис. 2, *d*. Видно, что в данном случае карта динамических режимов системы (11) существенно отличается от карты, построенной для модели Рабиновича–Фабриканта (1) (рис. 2, *a*): области периодических и хаотических режимов стали меньше, а область убегания траекторий на бесконечность — больше. Также исчезла вторая структура, демонстрирующая переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, наблюдавшаяся при небольших значениях параметра  $\gamma$ , слева от основной структуры, а область мультистабильности стала уже.

И, наконец, пусть  $p = -0.05$ , а  $q = -0.85$ . Это отвечает тому, что точка на плоскости  $(p, q)$  попадает в область *4* (см. рис. 1, *b*). Соответствующая карта динамических режимов системы (11) на плоскости  $(v, \gamma)$  представлена на рис. 2, *e*. Из рисунка видно, что в данном случае карта динамических режимов системы (11) качественно идентична карте для модели Рабиновича–Фабриканта (1) (см. рис. 2, *a*), хотя и имеются незначительные количественные отличия.

Во всех остальных областях плоскости  $(p, q)$  в системе (11) будет иметь место либо убегание траекторий на бесконечность, либо новый тип режима — инвариантное (устойчивое) множество в виде окружности, целиком лежащее в плоскости  $z = 0$ .

#### 4. Динамика обобщенной модели в случае $p = 0.9$ , $q = 0.1$

Теперь рассмотрим динамику системы (11) в случае, когда параметры нелинейности принимают значения  $p = 0.9$  и  $q = 0.1$ , более подробно. Этот случай интересен тем, что с одной стороны карта динамических режимов системы (11) (см. рис. 2, *c*) похожа на карту для модели Рабиновича–Фабриканта (см. рис. 2, *a*), а с другой стороны на ней присутствует ряд отличий. Как и в работе [20], построим для системы (11) графики зависимости спектра показателей Ляпунова от параметра  $v$ , аттракторы и бассейны их притяжения для нескольких фиксированных значений параметра  $\gamma$ . А также численно построим бифуркационные линии на плоскости  $(v, \gamma)$ .

**4.1. Случай  $\gamma = 0.96$ .** Для того чтобы было удобно сопоставлять динамику системы (11) с динамикой модели Рабиновича–Фабриканта (1) выберем те же значения параметра  $\gamma$ . Итак, пусть  $\gamma = 0.96$ . На рис. 3, *a* представлен график зависимости трех показателей Ляпунова от параметра  $v$  для системы (11). Из рисунка видно, что в области  $v > 1.75$  все показатели Ляпунова



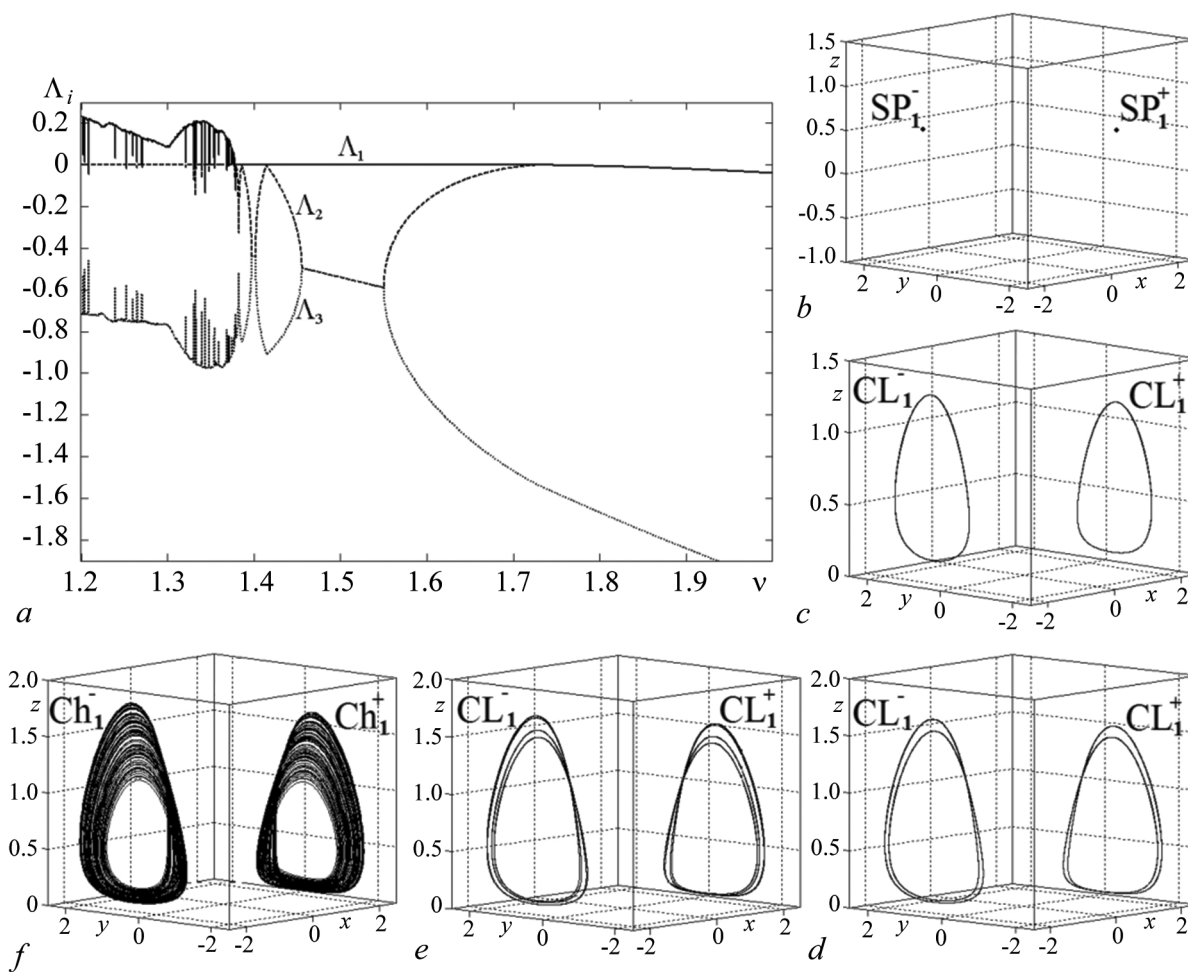


Рис. 3. *a* — Зависимость показателей Ляпунова системы (11) от параметра  $\nu$  для  $\gamma = 0.96$ . *b–f* — Аттракторы системы (11) для  $\gamma = 0.96$  при  $\nu = 1.9$  (*b*); 1.6 (*c*); 1.4 (*d*); 1.38 (*e*); 1.35 (*f*)

Fig. 3. *a* — Graphs of Lyapunov exponents of the model (11) on the parameter  $\nu$  at  $\gamma = 0.96$ . *b–f* — Attractors of the model (11) at  $\gamma = 0.96$ :  $\nu = 1.9$  (*b*); 1.6 (*c*); 1.4 (*d*); 1.38 (*e*); 1.35 (*f*)

отрицательные, то есть в системе существует устойчивое положение равновесия. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис. 3, *b*. На нем наблюдаются два сосуществующих положения равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$ , расположенных симметрично и переходящих друг в друга при замене  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ , то есть в системе (11) имеет место бистабильность. При уменьшении параметра  $\nu$  устойчивые положения равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$  исчезают, и на их месте возникают устойчивые предельные циклы  $CL_1^-$  и  $CL_1^+$  (рис. 3, *c*), а старший показатель Ляпунова становится равным нулю (см. рис. 3, *a*). При дальнейшем уменьшении параметра  $\nu$  период предельных циклов удваивается (рис. 3, *d*, *e*), пока в результате каскада бифуркаций удвоения периода не возникнут хаотические аттракторы  $Ch_1^-$  и  $Ch_1^+$  (рис. 3, *f*), при этом старший показатель Ляпунова станет положительным.

Для анализа бистабильности были построены бассейны притяжения аттракторов. На рис. 4 представлены бассейны притяжения для устойчивых положений равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$ , обозначенных на рисунке синим и зеленым цветом, соответственно. Отметим, что на этом рисунке (и на всех последующих аналогичных рисунках) представлены проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения бассейнов притяжения плоскостью  $z_0 = \text{const}$ , а сами бассейны притяжения окрашены в тот же цвет, что и его аттрактор. При небольших значениях  $z_0 = 0.1$  бассейны

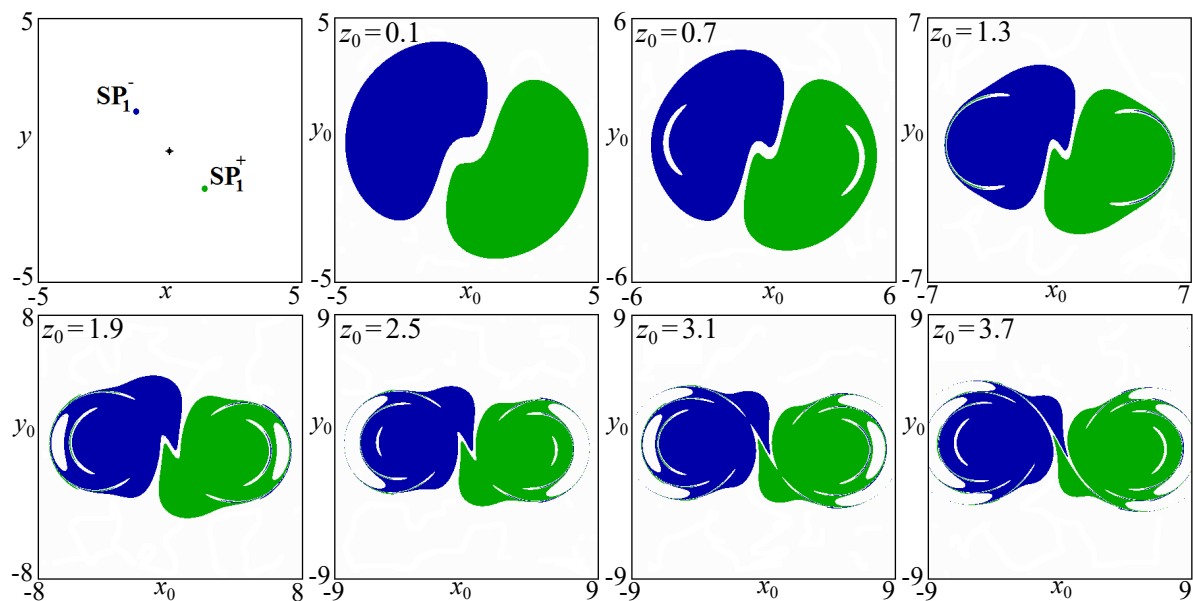


Рис. 4. Проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения их бассейнов притяжения плоскостью  $z_0 = \text{const}$  системы (11).  $\gamma = 0.96$  и  $\nu = 1.9$ . Бассейн притяжения положения равновесия  $SP_1^-$  окрашен в синий цвет, положения равновесия  $SP_1^+$  — в зеленый (цвет online)

Fig. 4. Projection of the attractors on a  $(x, y)$  plane and sections of their basins by the  $z_0 = \text{const}$  plane plotted for the model (11).  $\gamma = 0.96$  and  $\nu = 1.9$ . The basin of attraction of the equilibrium position  $SP_1^-$  is colored blue, and the basin of  $SP_1^+$  is colored green (color online)

притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$  представляют собой симметрично расположенные относительно начала координат овальные области. С ростом  $z_0$  бассейны увеличиваются в размере, а внутри них появляются «острова», отвечающие разбеганию траекторий на бесконечность. Далее эти «острова» увеличиваются в размере, а ограничивающие их справа и слева полосы становятся все уже и уже, пока совсем не разрываются, и у бассейнов появляются своеобразные «хвосты». Если и далее увеличивать  $z_0$ , то появляются новые «острова», отвечающие разбеганию траекторий на бесконечность, и новые «хвосты», а также от основного бассейна отделяются области меньшего размера. Кроме того, с ростом  $z_0$  внутри бассейнов притяжения положений равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$  появляются узкие полосы, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора. (Внутри области зеленого цвета появляются полосы синего цвета, а внутри синей — зеленого.) Отметим, что для всех остальных аттракторов (предельных циклов различных периодов, хаотических аттракторов), наблюдаемых в данном случае, бассейны притяжения качественно будут такими же, как для положений равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$ . С тем лишь отличием, что их трансформации будут происходить при меньших значениях  $z_0$ , а сами бассейны станут чуть меньше.

Таким образом, можно утверждать, что при данных значениях параметра  $\gamma$  динамика системы (11) в целом идентична, по крайней мере качественно, динамике модели Рабиновича–Фабриканта (1) [20]. Имеют место лишь количественные отличия, которые состоят в том, что бассейны притяжения аттракторов становятся больше, а одни и те же трансформации в системе (11) по сравнению с моделью Рабиновича–Фабриканта (1) происходят при больших значениях  $z_0$ . Хотя есть и одно качественное отличие, состоящее в том, что в системе (11) с ростом  $z_0$  внутри бассейнов притяжения появляются узкие полосы, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора. В модели Рабиновича–Фабриканта (1) подобные изменения не наблюдались.

**4.2. Случай  $\gamma = 0.78$ .** Теперь уменьшим значение параметра  $\gamma$ . Пусть  $\gamma = 0.78$ . Отметим, что динамика модели Рабиновича–Фабриканта в этом случае не изменится [20]. А вот динамика системы (11), как показано далее, будет существенно отличаться. На рис. 5 представлен график зависимости показателей Ляпунова от параметра  $\nu$  и аттракторы системы (11), построенные для данного случая. Из рис. 5, *a* видно, что в области  $\nu > 1.75$  все показатели Ляпунова отрицательные, то есть в системе существует устойчивое положение равновесия. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис. 5, *b*. На нем, как и в предыдущем случае, наблюдаются два сосуществующих аттрактора  $SP_2^-$  и  $SP_2^+$ ,<sup>2</sup> расположенные симметрично и переходящие друг в друга при замене  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ <sup>3</sup>. При уменьшении параметра  $\nu$  устойчивые положения равновесия  $SP_2^-$  и  $SP_2^+$  исчезают, и на их месте возникают устойчивые предельные циклы  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$  (рис. 5, *c*), а старший показатель Ляпунова становится равен нулю (см. рис. 5, *a*). При дальнейшем уменьшении параметра  $\nu$  в системе (11) возникает мультистабильность, когда в фазовом пространстве помимо устойчивых предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$  наблюдаются расположенные внутри них устойчивые положения равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  (рис. 5, *d*). Отметим, что это новые положения равновесия, не совпадающие с рассмотренными ранее и возникающие, как мы покажем далее, в результате другой бифуркации. Далее период предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$  удваивается (рис. 5, *e, f*), пока, в результате каскада бифуркаций удвоения периода, не возникнут хаотические аттракторы  $Ch_2^-$  и  $Ch_2^+$  (рис. 5, *g*), а старший показатель Ляпунова станет положительным (см. рис. 5, *a*). При этом устойчивые положения равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  продолжают сосуществовать вместе с предельными циклами и хаотическими аттракторами, пока не останутся единственными аттракторами (рис. 5, *h*) после того как хаотические аттракторы исчезнут при  $\nu \approx 1.27$ . Таким образом, в отличие от модели Рабиновича–Фабриканта (1) в системе (11) при значении параметра  $\gamma = 0.78$  в определенном диапазоне изменения параметра  $\nu$  имеет место мультистабильность. Что подтверждает сделанный ранее вывод о том, что в системе (11) мультистабильность наблюдается в большем диапазоне изменения параметров.

На рис. 6, *a* представлены бассейны притяжения для устойчивых положений равновесия  $SP_2^-$  и  $SP_2^+$  (см. рис. 5, *b*), обозначенные на рисунке синим и зеленым цветом, соответственно. Из рис. 6, *a* видно, что при небольших значениях  $z_0 = 0.1$  бассейны притяжения представляют собой окружность довольно большого радиуса, разделенную на две части многообразиями неустойчивого положения равновесия, расположенного в начале координат. При этом правая часть окружности — бассейн  $SP_2^+$ , а левая — бассейн  $SP_2^-$ . С ростом  $z_0$  как снаружи, так и внутри окружности появляются новые области, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора (см. рис. 6, *a*). Причем, чем больше  $z_0$ , тем больше чередующихся областей наблюдается.

На рис. 6, *b* представлены бассейны для случая  $\nu = 1.5$ , когда в фазовом пространстве сосуществуют симметрично расположенные пары, состоящие из предельного цикла  $CL_2^-$  (или  $CL_2^+$ ) и находящегося внутри него устойчивого положения равновесия  $SP_3^-$  (или  $SP_3^+$ ) (рис. 5, *d*). В этом случае при значениях  $z_0$  близких к нулю, на плоскости начальных условий  $(x_0, y_0)$  наблюдаются лишь бассейны притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$ , которые представляют собой симметрично расположенные относительно начала координат овальные области. С ростом  $z_0$  внутри появляются бассейны притяжения парных им предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$ , которые также представляют собой овальные области. Потом внутри этих областей появляются овальные области, представляющие собой бассейны притяжения парных им устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  и т. д. Таким образом, при  $z_0 \approx 0.1$  на плоскости начальных условий  $(x_0, y_0)$

<sup>2</sup>Строго говоря, это те же самые положения равновесия, что и  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$ . Однако для удобства изложения материала аттракторы (даже если это один и тот же аттрактор), построенные для разных значений параметра  $\gamma$ , будут обозначаться своим индексом.

<sup>3</sup>Отметим, что в силу симметрии системы (11) все аттракторы, если не оговаривается иное, будут возникать симметрично расположенной парой объектов, переходящих друг в друга при замене  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ . Поэтому данный момент при дальнейшем изложении материала будет подразумеваться по умолчанию.

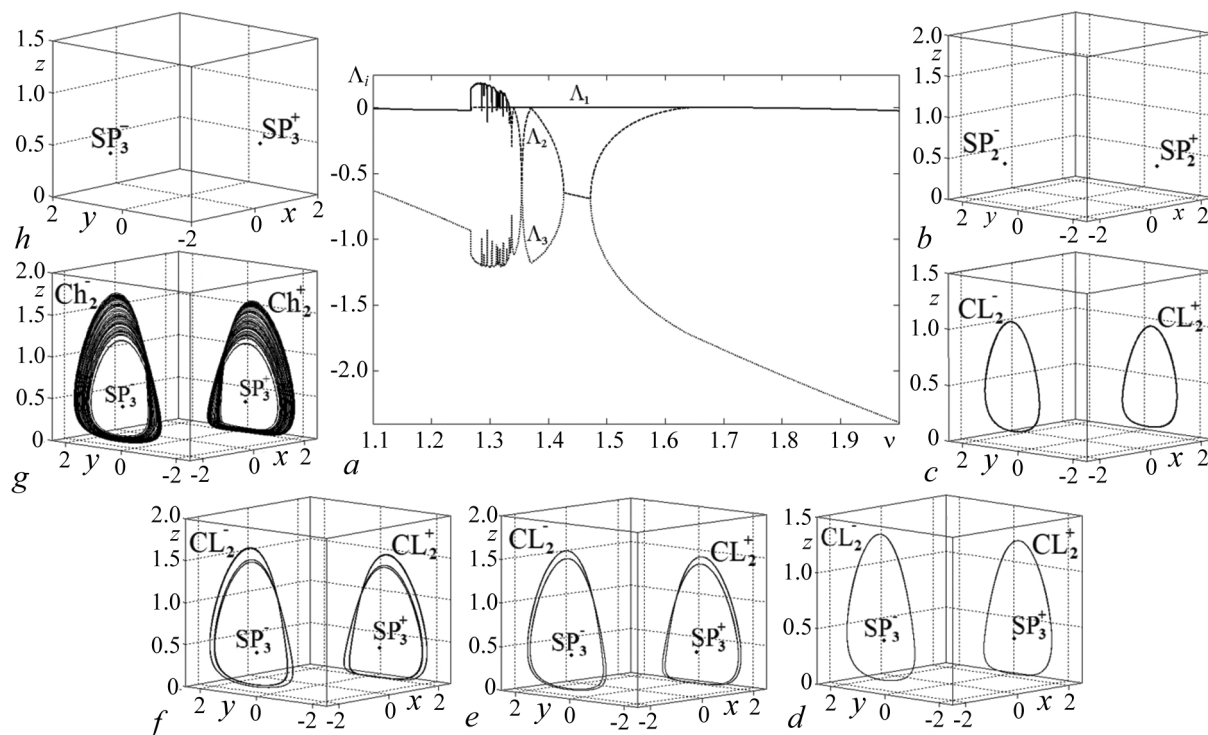


Рис. 5. *a* — Зависимость показателей Ляпунова системы (11) от параметра  $\nu$  для  $\gamma = 0.78$ . *b–h* — Аттракторы системы (11) для  $\gamma = 0.78$ :  $\nu = 2.0$  (*b*);  $1.6$  (*c*);  $1.5$  (*d*);  $1.36$  (*e*);  $1.34$  (*f*);  $1.3$  (*g*);  $1.2$  (*h*)

Fig. 5. *a* — Graphs of the Lyapunov exponents of the model (11) on the parameter  $\nu$  at  $\gamma = 0.78$ . *b–h* — Attractors of the model (11) at  $\gamma = 0.78$ :  $\nu = 2.0$  (*b*);  $1.6$  (*c*);  $1.5$  (*d*);  $1.36$  (*e*);  $1.34$  (*f*);  $1.3$  (*g*);  $1.2$  (*h*)

наблюдаются структура в виде овальных областей (бассейны притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$ ), внутри которых расположены меньшие овальные области (бассейны притяжения парных им предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$ ), которые окружены узкими кольцами, представляющими собой чередующиеся бассейны притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  и парных им предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$ . При дальнейшем увеличении  $z_0$  внутри бассейнов притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  появляются «острова», отвечающие убеганию траекторий на бесконечность, внутри которых в свою очередь появляются узкие полосы, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора. Далее эти «острова» увеличиваются в размере, а ограничивающие их полосы становятся все уже и уже, пока совсем не разрываются и у бассейнов не появляются своеобразные «хвосты». Таким образом, дальнейшая трансформация бассейнов становится такой же, как и в случае  $\gamma = 0.96$ .

Отметим, что бассейны притяжения предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$ , наблюдаемых при тех значениях параметра  $\nu$ , когда в системе (11) нет мультистабильности, например при  $\nu = 1.6$  (см. рис. 5, *c*), идентичны бассейнам притяжения, представленным на рис. 6, *a*. А бассейны притяжения для всех остальных режимов, в случаях когда мультистабильность есть (см. рис. 5, *d–g*), будут идентичны бассейнам притяжения, представленным на рис. 6, *b*. А вот бассейны притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  качественно будут идентичны тем, что наблюдались в системе (11) для случая  $\gamma = 0.96$  для устойчивых положений равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$  (см. рис. 4). С тем лишь отличием, что в данном случае трансформация бассейнов происходит быстрее, а их размер растет чуть медленнее.

Таким образом, система (11) при  $\gamma=0.78$  демонстрирует динамику, существенно отличную от той, что имеет место в модели Рабиновича–Фабриканта (1) при том же значении параметра  $\gamma$  [20]. Основным отличием является наличие в системе (11) мультистабильности, которая

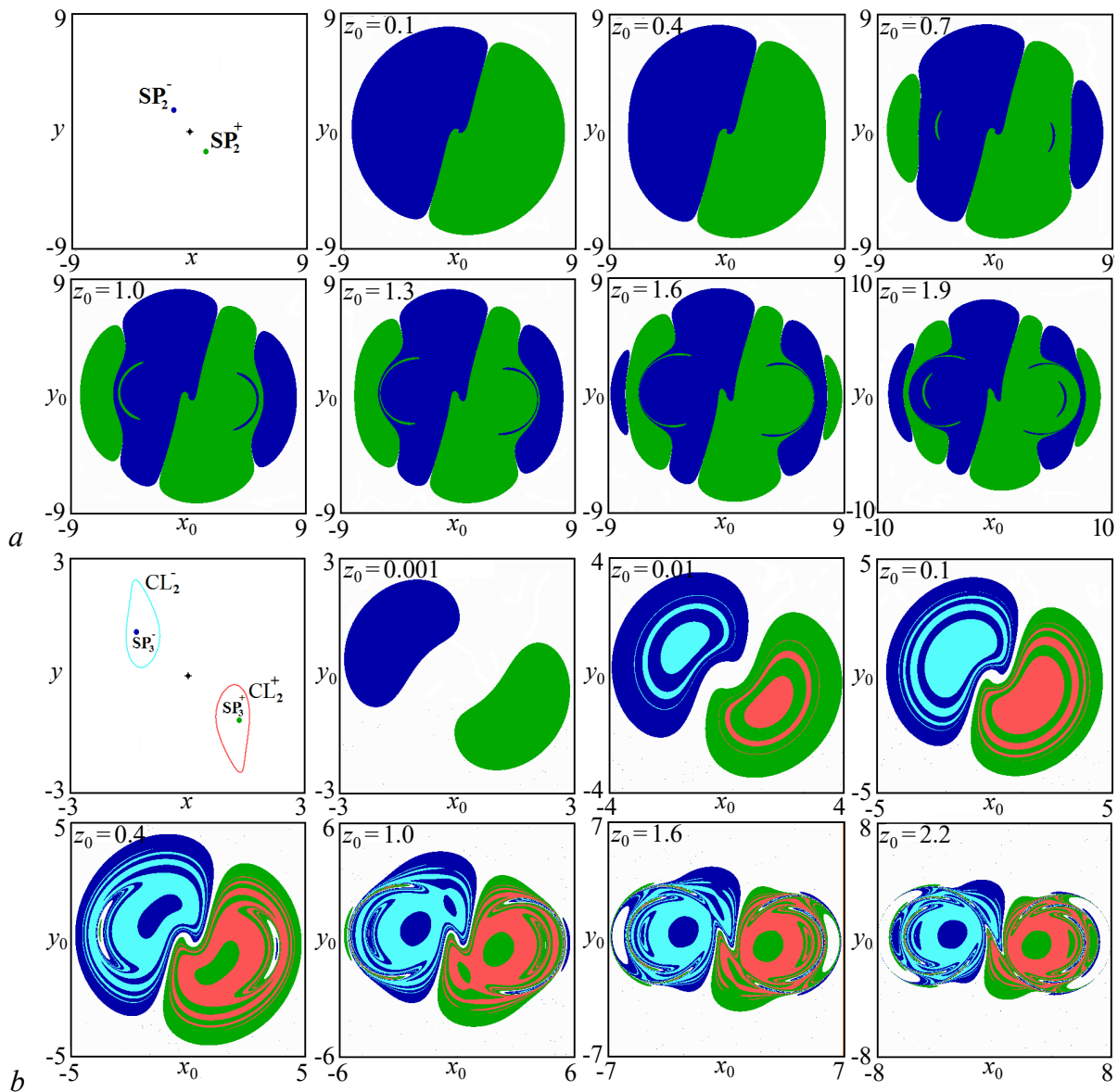


Рис. 6. Проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения их бассейнов притяжения плоскостью  $z_0 = \text{const}$  системы (11).  $\gamma = 0.78$ ,  $\nu = 2.0$  (a), 1.5 (b). Бассейн притяжения положения равновесия  $SP_2^-$  окрашен в синий цвет, а положения равновесия  $SP_2^+$  — в зеленый, предельного цикла  $CL_2^-$  — в голубой и  $CL_2^+$  — в красный (цвет online)

Fig. 6. Projection of the attractors on a  $(x, y)$  plane and sections of their basins of attraction by  $z_0 = \text{const}$  plane plotted for the model (11).  $\gamma = 0.78$ ,  $a - \nu = 2.0$ ,  $b - \nu = 1.5$ . The basin of attraction of the equilibrium position  $SP_2^-$  is colored blue, the basin of  $SP_2^+$  is colored green, the basin of  $CL_2^-$  is colored light blue, the basin of  $CL_2^+$  is colored red (color online)

наблюдается в модели Рабиновича–Фабриканта (1) при меньших значениях параметра  $\gamma$  ( $\gamma \approx 0.5$ ). При этом, отметим, что если устройство бассейнов притяжения в случае, когда в системе (11) есть мультистабильность, аналогично тому, что наблюдалось в модели Рабиновича–Фабриканта (1) при  $\gamma = 0.5$ , то устройство бассейнов притяжения в случае, когда в системе (11) мультистабильности нет, существенно иное и аналогично тому, что наблюдалось в модели Рабиновича–Фабриканта (1) при  $\gamma = 0.2$ .

**4.3. Случай  $\gamma = 0.5$ .** Пусть теперь  $\gamma = 0.5$ . Отметим, что динамика модели Рабиновича–Фабриканта (1) для данного значения параметра  $\gamma$  демонстрирует мультистабильность,



когда в фазовом пространстве сосуществуют две симметрично расположенные пары, состоящие из предельного цикла и находящегося внутри него устойчивого положения равновесия [20]. Теперь рассмотрим динамику системы (11). На рис. 7, *a* представлен график зависимости показателей Ляпунова от параметра  $\nu$  и аттракторы системы (11), построенные для данного случая. Из рисунка видно, что динамика системы (11) в этом случае полностью идентична той, что наблюдалась в системе (11) для  $\gamma = 0.78$ . Так, при  $\nu > 2.0$  и  $\nu < 1.28$  в фазовом пространстве наблюдаются устойчивые положения равновесия  $SP_4^-$ ,  $SP_4^+$  и  $SP_5^-$ ,  $SP_5^+$  соответственно (рис. 7, *b* и рис. 7, *h*); в области  $1.28 < \nu < 2.0$  — предельные циклы  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$ , демонстрирующие переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода (рис. 7, *c-g*). При этом при  $\nu < 1.5$  в системе (11) имеет место мультистабильность.

А вот устройство бассейнов притяжения существенно отличается от того, что наблюдалось для случая  $\gamma = 0.78$ . На рис. 8, *a* представлены бассейны притяжения для устойчивых положений равновесия  $SP_4^-$  и  $SP_4^+$  (см. рис. 7, *b*), обозначенных синим и зеленым цветом, соответственно. Из рис. 8, *a* видно, что в данном случае внешние границы бассейнов притяжения представляют собой сложно устроенные кривые. С ростом  $z_0$  внутри бассейнов появляются новые области, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора, сначала у внешней границы, а потом в окрестности начала координат. При этом сам размер бассейнов не меняется. Отметим, что бассейны притяжения, построенные для предельных циклов  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$  (см. рис. 7, *c*), полностью идентичны бассейнам для положений равновесия  $SP_4^-$  и  $SP_4^+$  на рис. 8, *a*. Заметим также, что подобное устройство бассейнов притяжения не наблюдалось ни в модели Рабиновича–Фабриканта (1), ни в системе (11) для рассмотренных ранее значений параметров.

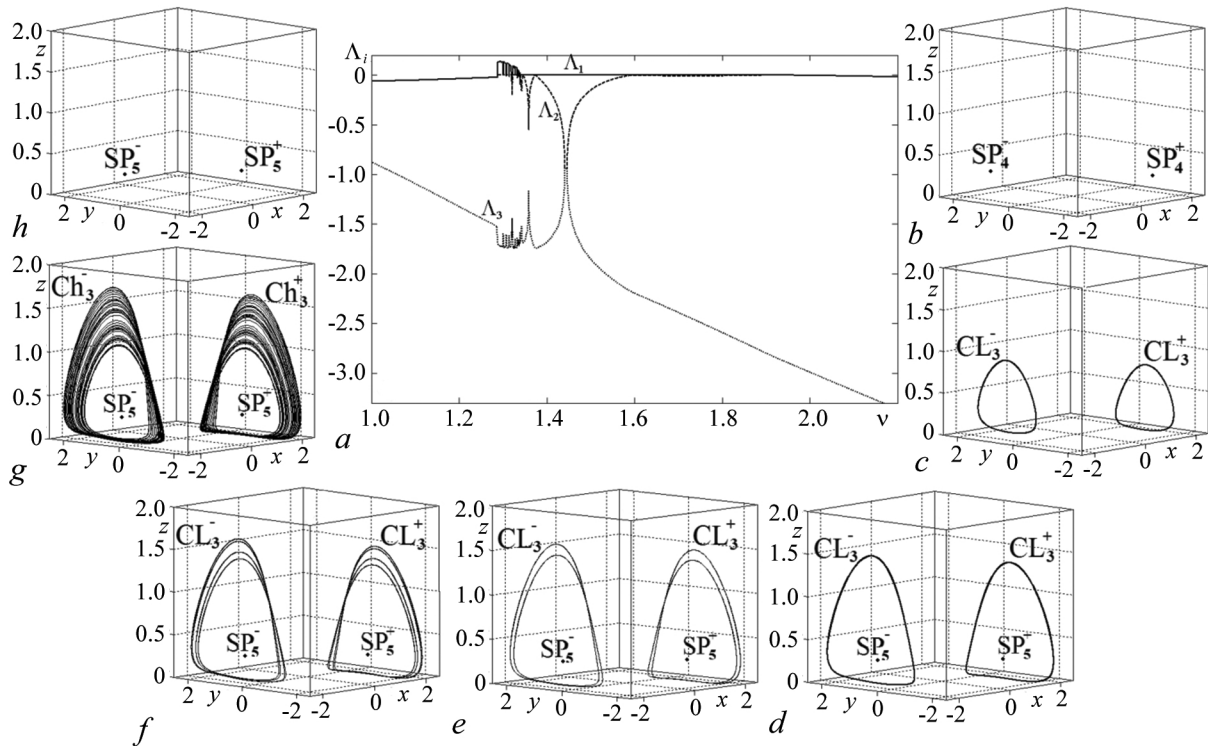


Рис. 7. *a* — Зависимость показателей Ляпунова системы (11) от параметра  $\nu$  для  $\gamma = 0.5$ . *b-h* — Аттракторы системы (11) для  $\gamma = 0.5$ :  $\nu = 2.2$  (*b*); 1.6 (*c*); 1.4 (*d*); 1.36 (*e*); 1.34 (*f*); 1.3 (*g*); 1.2 (*h*)

Fig. 7. *a* — Graphs of Lyapunov exponents of the model (11) on the parameter  $\nu$  at  $\gamma = 0.5$ . *b-h* — Attractors of the model (11) at  $\gamma = 0.5$ :  $\nu = 2.2$  (*b*); 1.6 (*c*); 1.4 (*d*); 1.36 (*e*); 1.34 (*f*); 1.3 (*g*); 1.2 (*h*)



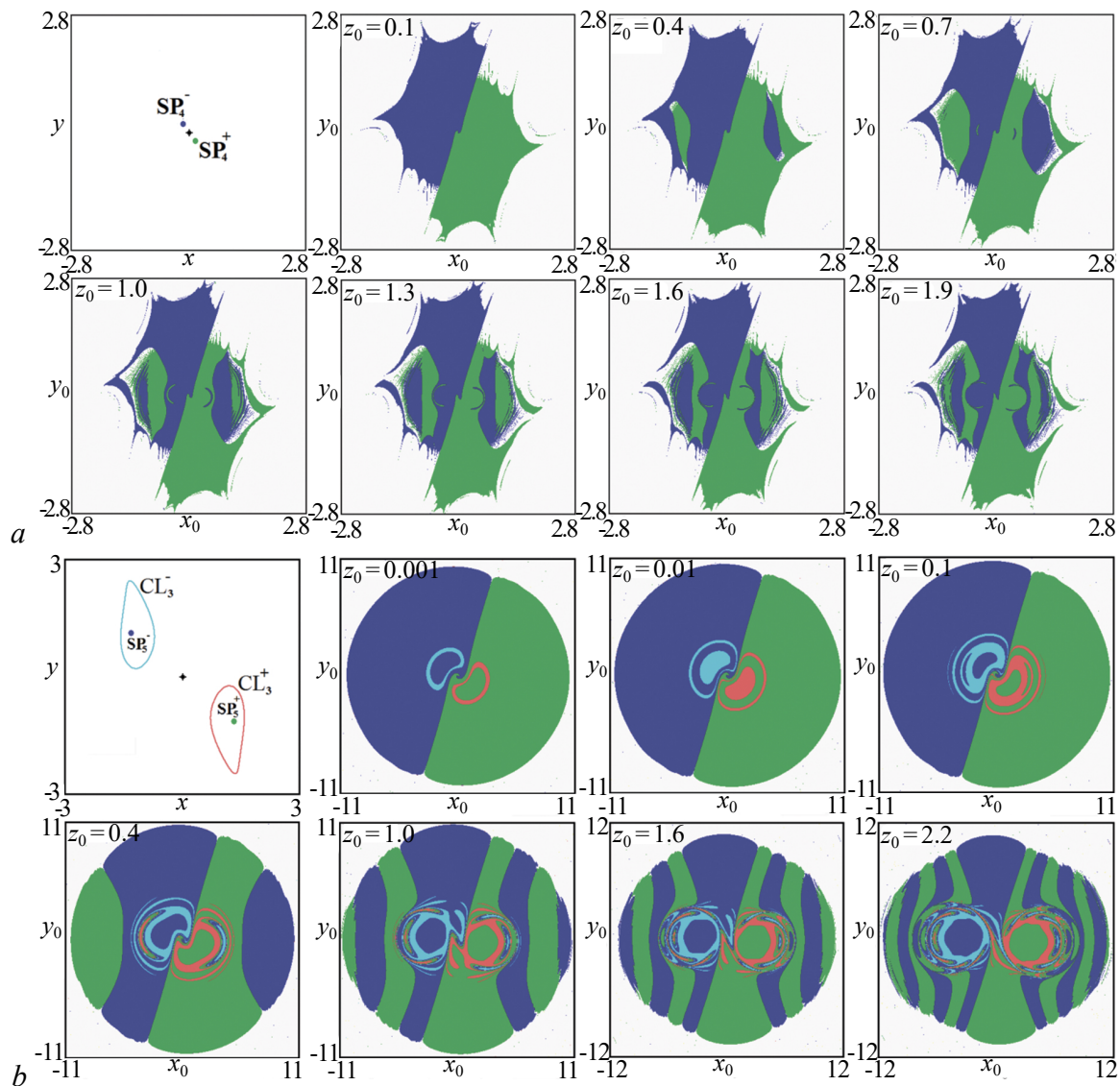


Рис. 8. Проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения их бассейнов притяжения плоскостью  $z_0 = \text{const}$  системы (11),  $\gamma = 0.5$ :  $\nu = 2.2$  (a),  $\nu = 1.4$  (b). Бассейны притяжения положений равновесия  $SP_4^-$  и  $SP_5^-$  окрашены в синий цвет, а положений равновесия  $SP_4^+$  и  $SP_5^+$  — в зеленый, предельного цикла  $CL_3^-$  — в голубой, а  $CL_3^+$  — в красный (цвет online)

Fig. 8. Projection of the attractors on a  $(x, y)$  plane and sections of their basins of attraction by the  $z_0 = \text{const}$  plane plotted for the model (11),  $\gamma = 0.5$ :  $\nu = 2.2$  (a),  $\nu = 1.4$  (b). The basins of  $SP_4^-$  and  $SP_5^-$  are colored blue, the basins of  $SP_4^+$  and  $SP_5^+$  are colored green, the basin of  $CL_3^-$  is colored light blue and the basin of  $CL_3^+$  is colored red (color online)

На рис. 8, b представлены бассейны для случая  $\nu = 1.5$ , когда в фазовом пространстве сосуществуют симметрично расположенные пары, состоящие из предельного цикла  $CL_3^-$  (или  $CL_3^+$ ) и находящегося внутри него устойчивого положения равновесия  $SP_5^-$  (или  $SP_5^+$ ) (рис. 7, d). Из рис. 8, b видно, что бассейны притяжения положений равновесия  $SP_5^-$  и  $SP_5^+$  представляют собой, как и в случае положений равновесия  $SP_2^-$  и  $SP_2^+$ , наблюдаемых при  $\gamma = 0.78$  (см. рис. 6, a), окружность довольно большого радиуса, разделенную на две части многообразиями неустойчивого положения равновесия, расположенного в начале координат. С ростом  $z_0$  как снаружи, так и внутри окружности появляются новые области, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора (положения равновесия).

Теперь рассмотрим бассейны притяжения предельных циклов  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$ . Их устройство и трансформация идентичны тем, что наблюдались для предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$  для  $\gamma = 0.78$  (см. рис. 6, *b*). Однако, в отличие от указанного случая бассейны притяжения предельных циклов  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$  существуют при сколь угодно малых значениях  $z_0$ , а их трансформация происходит быстрее. Также бассейны притяжения предельных циклов  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$  всегда расположены внутри центральных бассейнов притяжения положений равновесия  $SP_5^-$  и  $SP_5^+$ .

Отметим, что, как и в предыдущем случае ( $\gamma = 0.78$ ), бассейны притяжения предельных циклов  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$ , наблюдаемых при тех значениях параметра  $\nu$ , когда в системе (11) нет мультистабильности, например при  $\nu = 1.6$  (см. рис. 7, *c*), идентичны бассейнам притяжения, представленным на рис. 8, *a*. Бассейны притяжения для всех остальных режимов, в случаях когда мультистабильность есть (см. рис. 7, *d–g*), идентичны бассейнам притяжения, представленным на рис. 8, *b*. А бассейны притяжения для устойчивых положений равновесия  $SP_5^-$  и  $SP_5^+$  (см. рис. 7, *h*) качественно идентичны тем, что наблюдались для устойчивых положений равновесия  $SP_2^-$  и  $SP_2^+$  системы (11) для  $\gamma = 0.78$  (см. рис. 6, *a*) с тем лишь отличием, что в данном случае трансформация бассейнов происходит быстрее, а их размер растет медленнее.

Таким образом, система (11) при  $\gamma = 0.5$  демонстрирует динамику, идентичную той, что наблюдалась в ней же для  $\gamma = 0.78$ , с тем лишь отличием, что бассейны притяжения устойчивых положений равновесия имеют другое устройство. При этом динамика системы (11) при  $\gamma = 0.5$  аналогична динамике модели Рабиновича–Фабриканта (1) за исключением устройства бассейнов притяжения аттракторов [20].

**4.4. Случай небольших значений параметра  $\gamma$ .** И, наконец, рассмотрим случай небольших значений параметра  $\gamma$ :  $\gamma = 0.2$  и  $\gamma = 0.1$ . Отметим, что так же, как в модели Рабиновича–Фабриканта (1), в системе (11) на карте динамических режимов в этой области будут наблюдаться две структуры, отвечающие существованию разных типов предельных циклов (сравним рис. 2, *a* и рис. 2, *c*). Правая структура отвечает тому, что существующие при больших значениях параметра  $\nu$  устойчивые положения равновесия  $SP_6^-$  и  $SP_6^+$  (рис. 9, *a*) при его уменьшении в результате, как покажем далее, бифуркации Андронова–Хопфа становятся неустойчивыми и в системе рождаются предельные циклы  $CL_4^-$  и  $CL_4^+$  (рис. 9, *b*). При дальнейшем уменьшении параметра  $\nu$  происходит переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода (рис. 9, *c–e*). При этом бассейны притяжения наблюдаемых аттракторов полностью идентичны тем, что наблюдались в системе (11) для положений равновесия  $SP_4^-$  и  $SP_4^+$  (рис. 8, *a*) для  $\gamma = 0.5$ .

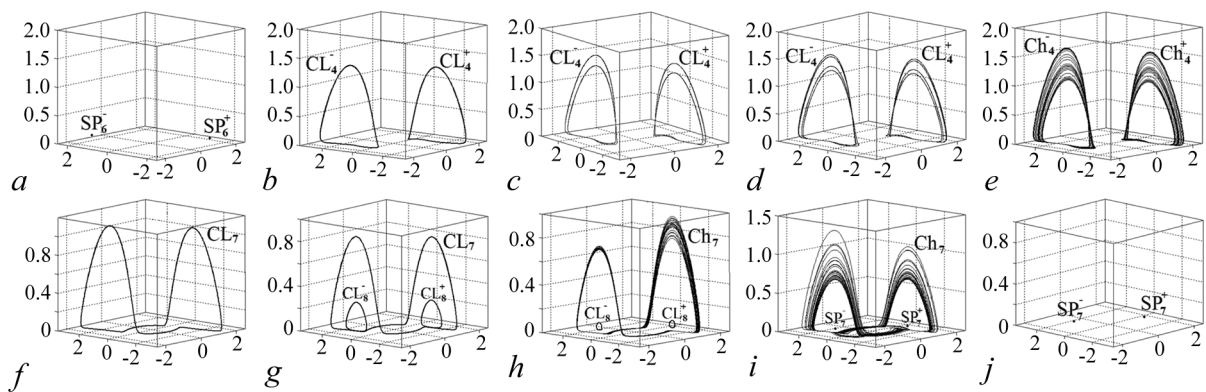


Рис. 9. Аттракторы системы (11) для  $\gamma = 0.2$ :  $\nu = 2.3$  (*a*); 1.6 (*b*); 1.55 (*c*); 1.543 (*d*); 1.53 (*e*) и для  $\gamma = 0.1$ :  $\nu = 1.6$  (*f*); 1.4 (*g*); 1.31 (*h*); 1.29 (*i*); 1.2 (*j*)

Fig. 9. Attractors of the model (11) at  $\gamma = 0.2$ : 2.3 *a*; 1.6 (*b*); 1.55 (*c*); 1.543 (*d*); 1.53 (*e*) and at  $\gamma = 0.1$ :  $\nu = 1.6$  (*f*); 1.4 (*g*); 1.31 (*h*); 1.29 (*i*); 1.2 (*j*)

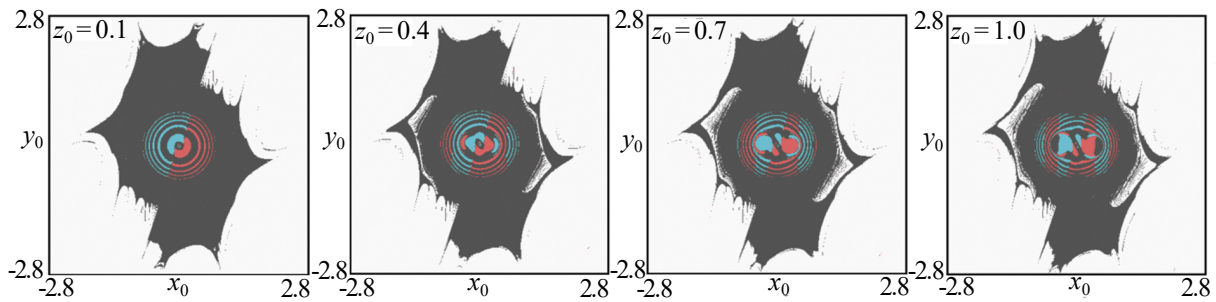


Рис. 10. Сечения бассейнов притяжения системы (11) плоскостью  $z_0 = \text{const}$ .  $\gamma = 0.1$  и  $\nu = 1.4$ . Бассейн притяжения предельного цикла  $CL_7$  окрашен в серый цвет, а предельных циклов  $CL_8^-$  и  $CL_8^+$  — в голубой и красный, соответственно (цвет online)

Fig. 10. Sections of the basins of the attractors by the  $z_0 = \text{const}$  plane plotted for the model (11),  $\gamma = 0.1$  and  $\nu = 1.4$ . The basin of  $CL_7$  is colored grey, the basin of  $CL_8^-$  is colored light blue and the basin of  $CL_8^+$  is colored red (color online)

Вторая (левая) структура отвечает тому, что сначала в фазовом пространстве системы (11) наблюдается не пара симметрично расположенных предельных циклов, а один симметричный предельный цикл  $CL_7$ , который при замене переменных  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$  переходит сам в себя (рис. 9, *f*). При уменьшении параметра  $\nu$  внутри этого цикла возникает пара симметрично расположенных предельных циклов  $CL_8^-$  и  $CL_8^+$ , сосуществующих с циклом  $CL_7$  (рис. 9, *g*). При этом цикл  $CL_7$  сохраняет свою симметрию. При дальнейшем уменьшении параметра  $\nu$  предельный цикл  $CL_7$  теряет симметрию и демонстрирует переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода (рис. 9, *h*). Одновременно с этим сосуществующие с ним предельные циклы  $CL_8^-$  и  $CL_8^+$  уменьшаются в размере и исчезают, а вместо них рождается пара симметрично расположенных устойчивых положений равновесия  $SP_7^-$  и  $SP_7^+$  (рис. 9, *i*). И наконец, хаотический аттрактор исчезает и в фазовом пространстве системы (11) наблюдаются лишь устойчивые положения равновесия  $SP_7^-$  и  $SP_7^+$  (см. рис. 9, *j*).

Таким образом, динамика системы (11) при небольших значениях параметра  $\gamma$  идентична динамике модели Рабиновича–Фабриканта (1) для тех же значений параметра. А вот бассейны притяжения аттракторов будут существенно отличаться. В случае когда в системе (11) нет мультистабильности (см. рис. 9, *a–f, j*) бассейны притяжения идентичны (как качественно, так и количественно) бассейнам притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_4^-$  и  $SP_4^+$  для  $\gamma = 0.5$  (см. рис. 8, *a*). А когда в системе (11) мультистабильность присутствует (см. рис. 9, *g–i*) бассейны притяжения будут иметь вид, представленный на рис. 10. Здесь бассейн притяжения предельного цикла  $CL_7$  окрашен в серый цвет и идентичен тому, что наблюдался в случае отсутствия мультистабильности. А бассейны притяжения предельных циклов  $CL_8^-$  и  $CL_8^+$  представляют собой окружности и «острова», расположенные внутри бассейна притяжения предельного цикла  $CL_7$ .

**4.5. Бифуркационный анализ обобщенной системы.** В заключение для системы (11) был проведен численный поиск бифуркационных линий для положений равновесия и предельных циклов периода один с помощью программы MatCont. Соответствующая бифуркационная диаграмма представлена на рис. 11. Она хорошо согласуется с картой динамических режимов, представленной на рис. 2, *c*, подтверждая ее структуру и более подробно описывая наблюдаемые в системе варианты мультистабильности. Также с ее помощью можно определить общее количество устойчивых положений равновесия и предельных циклов периода один, возникающих в рассматриваемой системе.

Отметим, что во многом бифуркационная картина системы (11) на плоскости  $(\nu, \gamma)$  похожа на ту, что имела место для модели Рабиновича–Фабриканта (1) [20]. Так, во-первых,

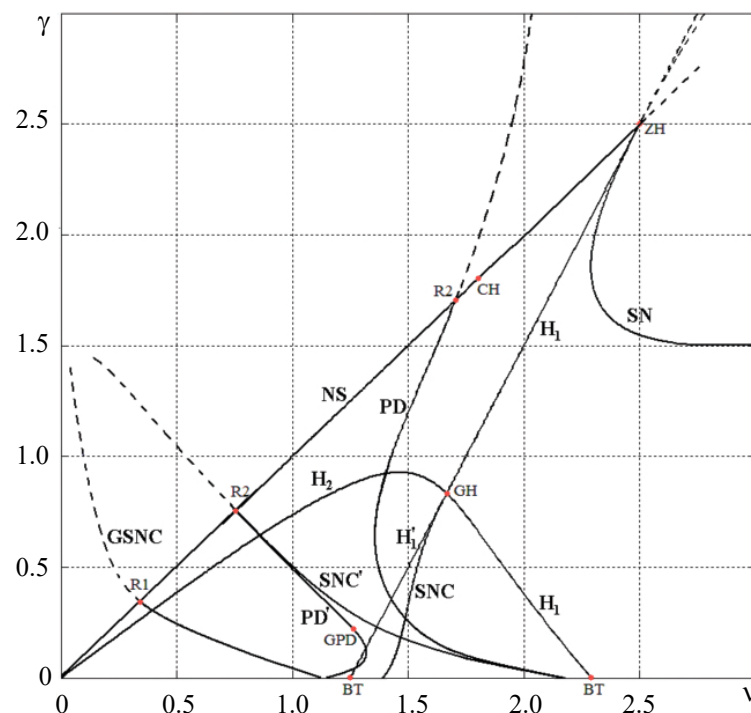


Рис. 11. Бифуркационные линии и точки системы (11) на плоскости  $(v, \gamma)$  для  $p = 0.9$  и  $q = 0.1$ . SN — седло-узловая бифуркация неподвижной точки, SNC — седло-узловая бифуркация предельных циклов,  $H_1$  — прямая бифуркация Андронова–Хопфа,  $H_2$  — обратная бифуркация Андронова–Хопфа, PD — бифуркация удвоения периода предельных циклов, GSNC — жесткая касательная бифуркация предельных циклов, NS — обратная бифуркация Неймарка–Сакера, GH — обобщенная точка бифуркации Андронова–Хопфа, GPD — обобщенная точка бифуркации удвоения периода, ZH — точка пересечения линии касательной бифуркации неподвижной точки и линии бифуркации Андронова–Хопфа (точка бифуркации Zero–Hopf), R1 — резонанс 1:1, R2 — резонанс 1:2, BT — точка бифуркации Богданова–Тakens. Пунктиром обозначены бифуркационные линии, отвечающие неустойчивым режимам

Fig. 11. Bifurcations lines and points of the general model (11) on the  $(v, \gamma)$  parameter plane,  $p = 0.9$  and  $q = 0.1$ . SN is saddle-node bifurcation of the stable point, SNC is saddle-node bifurcation of the limit cycle,  $H_1$  is direct Hopf bifurcation,  $H_2$  is inverse Hopf bifurcation, PD is period doubling bifurcation of the limit cycle, GSNC is hard saddle-node bifurcation of the limit cycle, NS is inverse Neimark–Sacker bifurcation, GH is generalized Hopf bifurcation point, GPD is generalized period doubling bifurcation point, ZH is Zero–Hopf bifurcation point, R1 is resonance 1:1, R2 is resonance 1:2, BT is Bogdanov–Takens bifurcation point. The bifurcation lines corresponded unstable regimes are indicated by dotted lines

при движении по плоскости справа налево сначала на линии SN в результате седло-узловой бифуркации рождаются устойчивое и неустойчивое положение равновесия<sup>4</sup>. Далее устойчивое положение равновесия становится неустойчивым на линии  $H_1$ , в результате бифуркации Андронова–Хопфа. При этом в системе рождается устойчивый предельный цикл, период которого удваивается на линии бифуркации удвоения периода PD (рис. 11). Как следует из вида карты динамических режимов (см. рис. 2, с), далее будет иметь место каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого в системе (11) возникает хаотический аттрактор. Это совпадает с тем, что наблюдалось в модели Рабиновича–Фабриканта (1) в той же области пространства параметров.

Во-вторых, при движении по плоскости параметров  $(v, \gamma)$  слева направо в области  $\gamma < 0.94$  на линии  $H_2$  в результате обратной бифуркации Андронова–Хопфа рождаются устойчивое положение равновесия и неустойчивый предельный цикл. Потом это устойчивое положение

<sup>4</sup>Напоминаем, что все положения равновесия и циклы в системе (11) рождаются симметричными парами.



равновесия станет неустойчивым на линии  $H'_1$  в результате прямой бифуркации Андронова–Хопфа, а в системе возникнет устойчивый предельный цикл, который исчезнет в результате седло-узловой бифуркации предельных циклов на линии SNC, слившись с неустойчивым предельным циклом, родившимся в результате обратной бифуркации Андронова–Хопфа на линии  $H_2$  (рис. 11). При этом, так как линии  $H'_1$  и SNC, в определенной области пространства параметров находятся между линиями PD и  $H_1$ , то в системе (11) возможно несколько типов мультистабильности, когда устойчивый предельный цикл с разными периодами или хаос сосуществует с устойчивым положением равновесия или с устойчивым предельным циклом периода один.

В-третьих, при движении по плоскости параметров  $(\nu, \gamma)$  справа налево в области  $\gamma < 0.3$  и  $\nu < 2.0$  на линии SNC' в результате седло-узловой бифуркации предельных циклов рождаются устойчивый и неустойчивый предельные циклы, переходящие в себя при замене переменных  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$  (см. рис. 9, f). Далее на линии PD' период устойчивого цикла удвоится (см. рис. 11) и в дальнейшем, как следует из вида карты динамических режимов (рис. 2, c) будет иметь место каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого в системе (11) возникает хаос. При этом, так как линии  $H'_1$  и SNC пересекают область существования указанного цикла, то в рассматриваемой системе возможна мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют устойчивый предельный цикл, переходящий в себя при замене переменных, и симметричная пара устойчивых предельных циклов периода один (см. рис. 9, g).

Таким образом, в системе (11) наблюдаются следующие аттракторы: две пары устойчивых положений равновесия и две пары устойчивых предельных циклов, возникающих в результате разных бифуркаций, и симметричный предельный цикл. А представленное на рис. 11 довольно сложное расположение бифуркационных линий приводит к большому числу комбинаций их взаимного сосуществования.

Однако в бифуркационной картине системы (11) есть и ряд отличий от системы (1). Так, в системе (11) наблюдаются две новые бифуркационные линии, которых не было в модели Рабиновича–Фабриканта (1) [20]. Это линия GSNC, на которой имеет место жесткая касательная бифуркация предельных циклов, и линия NS, на которой имеет место обратная бифуркация Неймарка–Сакера, которая ограничивает на плоскости параметров  $(\nu, \gamma)$  область существования периодических режимов и хаоса слева. Также в системе (11) появилось несколько бифуркационных точек коразмерности два. Это точки GPD представляющая собой обобщенную точку бифуркации удвоения периода, ZH — точка пересечения линии касательной бифуркации неподвижной точки и линии бифуркации Андронова–Хопфа (точка бифуркации Zero–Hopf), R1 и R2 отвечающие резонансам 1 : 1 и 1 : 2, соответственно.

Еще одно отличие бифуркационной картины системы (11) от той, что имела место в модели Рабиновича–Фабриканта (1), состоит в том, что в модели Рабиновича–Фабриканта (1) было две точки GH (обобщенная точка бифуркации Андронова–Хопфа). В первой сходились линии прямой бифуркации Андронова–Хопфа, обратной бифуркации Андронова–Хопфа и седло-узловой бифуркации предельных циклов, а во второй — две линии прямой бифуркации Андронова–Хопфа и две линии обратной бифуркации Андронова–Хопфа [20]. В системе (11) эти две точки слились, и наблюдается лишь одна точка GH, к которой сходятся пять линий: две линии  $H_1$ , линия  $H'_1$  (все отвечают прямой бифуркации Андронова–Хопфа), линия  $H_2$  (обратная бифуркация Андронова–Хопфа) и линия SNC (седло-узловая бифуркация предельных циклов) (см. рис. 11).

### Заключение

В работе в рамках формализма Лагранжа рассмотрено трехмодовое взаимодействие в присутствии кубической нелинейности общего вида. Была записана исходная система, состоящая из трех осцилляторов, для которой аналитически, используя метод медленно меняющихся амплитуд,

была получена трехмерная система, представляющая собой обобщение модели Рабиновича–Фабриканта на рассматриваемый случай.

Динамика полученной системы исследована численно с помощью методов теории динамического хаоса. Для нее построены карты динамических режимов как на плоскости параметров, представляющих собой коэффициенты диссипации, так и на плоскости параметров, характеризующих нелинейное взаимодействие между осцилляторами в системе; зависимости показателей Ляпунова от параметра, аттракторы и их бассейны притяжения. Найдены основные бифуркации положений равновесия и предельных циклов периода один. Было проведено сопоставление с моделью Рабиновича–Фабриканта: указаны значения параметров нелинейного взаимодействия, при которых уравнения полученной системы полностью совпадают с уравнениями для модели Рабиновича–Фабриканта; а также, в случае когда уравнения не совпадают, указаны области в пространстве параметров, для которых динамика полученной модели полностью или частично идентична динамике модели Рабиновича–Фабриканта.

Исследование показало, что устройство плоскости параметров, характеризующих нелинейное взаимодействие между осцилляторами, не зависит от параметров, представляющих собой коэффициенты диссипации, а определяется соотношением между самими параметрами нелинейности. А вот устройство плоскости параметров, представляющих собой коэффициенты диссипации, существенным образом зависит от параметров нелинейного взаимодействия. Так, если параметр  $q = 0$ , то динамика рассматриваемой системы идентична динамике модели Рабиновича–Фабриканта, хотя их уравнения и не совпадают. При этом рассматриваемая модель превращается в модель Рабиновича–Фабриканта при  $p = 1$  и  $q = 0$ .

В области  $p + 3q > 0$ ,  $3p + q > 0$  и  $q > 0$  динамика рассматриваемой системы качественно максимально похожа на динамику модели Рабиновича–Фабриканта, хотя и демонстрирует ряд отличий: увеличение области мультистабильности, появление новых бифуркационных линий и точек коразмерности два, и т. д. Во всех остальных областях динамика рассматриваемой системы существенно отличается от динамики модели Рабиновича–Фабриканта вплоть до исчезновения некоторых структур или появления новых.

## Список литературы

1. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
2. Ott E. Chaos in Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 385 p.
3. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 561 с.
4. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахов В. В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 367 с.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
6. Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 488 с.
7. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
8. Lorenz E. N. The Essence of Chaos. Seattle, WA, USA: University of Washington Press, 1995. 240 p.
9. Alligood K. T., Sauer T., Yorke J. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag, 1996. 603 p. DOI: 10.1007/b97589.
10. Hilborn R. C. Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers. Oxford: Oxford University Press, 2001. 672 p.



11. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1979. Т. 77, № 2. С. 617–629.
12. Danca M.-F., Feckan M., Kuznetsov N., Chen G. Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, no. 2. P. 1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
13. Liu Y., Yang Q., Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 234, no. 1. P. 101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
14. Agrawal S. K., Srivastava M., Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems // Nonlinear Dynamics. 2012. Vol. 69, no. 4. P. 2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
15. Srivastava M., Agrawal S. K., Vishal K., Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system // Applied Mathematical Modelling. 2014. Vol. 38, no. 13. P. 3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
16. Danca M.-F. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 86, no. 2. P. 1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.
17. Danca M.-F., Kuznetsov N., Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 88, no. 1. P. 791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
18. Danca M.-F., Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, no. 10. P. 3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
19. Luo X., Small M., Danca M.-F., Chen G. On a dynamical system with multiple chaotic attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, no. 9. P. 3235–3251. DOI: 10.1142/S0218127407018993.
20. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В. Сложная динамика и хаос в модельной системе Рабиновича–Фабриканта // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2019. Т. 19, № 1. С. 4–18. DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
21. Hocking L. M., Stewartson K. On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance // Proc. R. Soc. Lond. A. 1972. Vol. 326, no. 1566. P. 289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
22. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 68–104.
23. Kuramoto Y., Yamada T. Turbulent state in chemical reactions // Progress of Theoretical Physics. 1976. Vol. 56, no. 2. P. 679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.

## References

1. Kuznetsov S. P. Dynamical Chaos. Moscow: Fizmatlit; 2006. 356 p. (in Russian).
2. Ott E. Chaos in Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press; 1993. 385 p.
3. Guckenheimer J., Holmes P. J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer-Verlag; 1983. 462 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1140-2.
4. Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Astahov V. V. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Saratov: Saratov University Publishing; 1999. 367 p. (in Russian).

5. Schuster HG, Just W. Deterministic Chaos: An Introduction. Weinheim: Wiley; 2005. 287 p. DOI: 10.1002/3527604804.
6. Kuznetsov SP. Dynamical Chaos and Hyperbolic Attractors: From Mathematics to Physics. Moscow-Izhevsk: Institute for Computer Research; 2013. 488 p. (In Russian).
7. Neimark JI, Landa PS. Stochastic and Chaotic Oscillations. Dordrecht: Springer; 1992. 500 p. DOI: 10.1007/978-94-011-2596-3.
8. Lorenz EN. The Essence of Chaos. Seattle, WA, USA: University of Washington Press; 1995. 240 p.
9. Alligood KT, Sauer T, Yorke J. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag; 1996. 603 p. DOI: 10.1007/b97589.
10. Hilborn RC. Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers. Oxford: Oxford University Press; 2001. 672 p.
11. Rabinovich MI, Fabrikant AL. Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media. Sov. Phys. JETP. 1979;77(2):617–629 (in Russian).
12. Danca MF, Feckan M, Kuznetsov N, Chen G. Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016;26(2):1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
13. Liu Y, Yang Q, Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010;234(1):101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
14. Agrawal SK, Srivastava M, Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems. Nonlinear Dynamics. 2012;69(4):2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
15. Srivastava M, Agrawal SK, Vishal K, Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system. Applied Mathematical Modelling. 2014;38(13):3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
16. Danca MF. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system. Nonlinear Dynamics. 2016;86(2):1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.
17. Danca MF, Kuznetsov N, Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system. Nonlinear Dynamics. 2017;88(1):791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
18. Danca MF, Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004;14(10):3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
19. Luo X, Small M, Danca MF, Chen G. On a dynamical system with multiple chaotic attractors. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007;17(9):3235–3251. DOI: 10.1142/S0218127407018993.
20. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Turukina LV. Complex Dynamics and Chaos in the Rabinovich–Fabrikant Model. Izvestiya of Saratov University. Physics. 2019;19(1):4–18 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
21. Hocking LM, Stewartson K. On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance. Proc. R. Soc. Lond. A. 1972;326(1566):289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
22. Andronov AA, Fabrikant AL. Landau damping, wind waves and whistle. In: Nonlinear Waves. Moscow: Nauka; 1979. P. 68–104 (in Russian).
23. Kuramoto Y, Yamada T. Turbulent state in chemical reactions. Progress of Theoretical Physics. 1976;56(2):679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.

*Кузнецов Сергей Петрович* (1951–2020) — родился в Москве. Окончил Саратовский государственный университет (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 1977) и доктора наук (СГУ, 1987) по специальности радиофизика. Работал в СГУ и в Саратовском филиале ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН: главным научным сотрудником СФ ИРЭ РАН, профессором базовой кафедры динамических систем СГУ, руководил лабораторией теоретической нелинейной динамики. А также являлся главным научным сотрудником лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Автор монографий «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А. П. Кузнецовым и Н. М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат Государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Regular and Chaotic Dynamics», «Нелинейная динамика», «Известия Саратовского университета — Новая серия. Серия Физика».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
410012, Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского  
ORCID: 0000-0003-4506-9864  
AuthorID: 22592

*Тюрюкина Людмила Владимировна* родилась в Саратове (1977). Окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2000). Обучалась в очной аспирантуре Саратовского государственного университета (2000–2003), по окончании которой защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика», имеет звание доцента по специальности «Радиофизика» (2009). В настоящее время работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН. По совместительству работает доцентом на кафедре динамических систем ФНП на базе СФ ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН. Опубликовала более 50 статей по направлениям, указанным выше.



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН  
410012, Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: turukinalv@yandex.ru  
ORCID: 0000-0002-4221-8900  
AuthorID: 39405