



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2)

Научная статья

УДК 517.926

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175

Охота на химер в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов

Д. С. Глызин, С. Д. Глызин[✉], А. Ю. Колесов

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, Россия

E-mail: glyzin@gmail.com, ✉glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 21.12.2021, принята к публикации 16.02.2022, опубликована 31.03.2022

Аннотация. Целью работы является изучение динамических свойств решений специальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, называемых полностью связанными сетями нелинейных осцилляторов. **Методы.** Предлагается новый подход к отысканию в этих системах периодических режимов химерного типа, суть которого состоит в следующем. Сначала в случае симметричной сети решается более простой вопрос о существовании и устойчивости квазихимерных решений — периодических режимов двухкластерной синхронизации. Для каждого из таких режимов множество осцилляторов распадается на два непересекающихся класса. В пределах данных классов наблюдается полная синхронизация колебаний, а каждые два осциллятора из разных классов колеблются асинхронно. **Результаты.** На основе предложенных методов отдельно устанавливается, что при переходе от симметричной системы к сети общего вида периодические режимы двухкластерной синхронизации могут трансформироваться в химеры. **Заключение.** Основные утверждения работы, касающиеся возникновения химер, получены аналитически на основе асимптотического исследования модельного примера. Для этого примера введено понятие канонической химеры и доказано утверждение о существовании и устойчивости решений химерного типа в случае несимметричности сети. Все приведённые результаты распространены на непрерывный аналог соответствующей системы. Полученные результаты проиллюстрированы численно.

Ключевые слова: полностью связанная сеть нелинейных осцилляторов, периодические режимы двухкластерной синхронизации, охота на химер, устойчивость, буферность.

Благодарности. Исследования, изложенные в разделе 4, выполнены в рамках реализации программы развития РНОМЦ (ЯрГУ) при поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-02-2021-1397). Исследования, приведенные в разделах 1–3, выполнены при поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-30011).

Для цитирования: Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Охота на химер в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 152–175. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Hunt for chimeras in fully coupled networks of nonlinear oscillators

D. S. Glyzin, S. D. Glyzin✉, A. Yu. Kolesov

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Russia

E-mail: glyzin@gmail.com, ✉glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru

Received 21.12.2021, accepted 16.02.2022, published 31.03.2022

Abstract. The purpose of this work is to study the dynamic properties of solutions to special systems of ordinary differential equations, called fully connected networks of nonlinear oscillators. *Methods.* A new approach to obtain periodic regimes of the chimeric type in these systems is proposed, the essence of which is as follows. First, in the case of a symmetric network, a simpler problem is solved of the existence and stability of quasi-chimeric solutions — periodic regimes of two-cluster synchronization. For each of these modes, the set of oscillators falls into two disjoint classes. Within these classes, full synchronization of oscillations is observed, and every two oscillators from different classes oscillate asynchronously. *Results.* On the basis of the proposed methods, it is separately established that in the transition from a symmetric system to a general network, the periodic regimes of two-cluster synchronization can be transformed into chimeras. *Conclusion.* The main statements of the work concerning the emergence of chimeras were obtained analytically on the basis of an asymptotic study of a model example. For this example, the notion of a canonical chimera is introduced and the statement about the existence and stability of solutions of chimeric type in the case of asymmetry of the network is proved. All the results presented are extended to a continuous analogue of the corresponding system. The obtained results are illustrated numerically.

Keywords: fully coupled network of nonlinear oscillators, periodic modes of two-cluster synchronization, hunting for chimeras, stability, buffering.

Acknowledgements. Sections 1–3 of this work were supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-30011). Section 4 was carried out within the framework of a development programme for the RSEMC of the P. G. Demidov Yaroslavl State University with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2021-1397).

For citation: Glyzin DS, Glyzin SD, Kolesov AYU. Hunt for chimeras in fully coupled networks of nonlinear oscillators. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2):152–175. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

1. Общая стратегия охоты на химер

Полносвязной сетью нелинейных осцилляторов или просто полносвязной сетью назовем систему вида

$$\dot{x}_j = F_j(x_j, u_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Здесь $m \geq 2$, $x_j = x_j(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, точка — дифференцирование по t ,

$$u_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G_s(x_s), \quad (2)$$

а вектор-функции $F_j(x, u)$, $G_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$, со значениями в \mathbb{R}^n бесконечно дифференцируемы по своим переменным $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Как правило, каждая из отвечающих сети (1), (2) парциальных систем

$$\dot{x} = F_j(x, 0), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл, то есть представляет собой нелинейный осциллятор. Мы же рассматриваем ситуацию, когда m осцилляторов (3) взаимодействуют друг с другом по принципу «каждый со всеми».

В частном случае, когда

$$F_j(x, u) = F_j(x) + D_j(x)u, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где $D_j(x)$ — квадратные матрицы размера $n \times n$, система (1), (2) приобретает вид

$$\dot{x}_j = F_j(x_j) + D_j(x_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G_s(x_s), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Данная ситуация заслуживает отдельного упоминания в связи с тем, что именно системы (4) наиболее часто встречаются в приложениях.

Следует отметить, что цепочки и решетки связанных идентичных нелинейных осцилляторов используются в качестве математических моделей в различных областях естествознания: биофизике, экологии, оптике, химической кинетике, нейродинамике, генной инженерии и т. д. При этом в подавляющем большинстве работ, посвященных системам связанных нелинейных осцилляторов, изучаются специальные стационарные режимы упомянутых систем — так называемые химеры. Универсального математического определения химеры не существует. На эвристическом же уровне строгости одна из возможных ситуаций, когда мы имеем дело с химерой, состоит в следующем. Пусть m — количество осцилляторов в системе, а $m_1, m_2 : m_1 < m_2 < m$ — некоторые фиксированные натуральные числа. Тогда в случае химерного стационарного режима имеются две зоны когерентности: для любых двух компонент x_j с номерами $1 \leq j \leq m_1$ или $m_2 < j \leq m$ наблюдается синхронизация (возможно, приближенная). Под термином «синхронизация» во избежание недоразумений мы понимаем выполнение равенств вида $x_1 = x_2 = \dots = x_{m_1}, x_{m_2+1} = x_{m_2+2} = \dots = x_m$. Любые же два осциллятора с номерами $j_1, j_2 : m_1 < j_1 < j_2 \leq m_2$ колеблются асинхронно, то есть $x_{j_1} \neq x_{j_2}$ (это так называемая зона некогерентности). Добавим еще, что, как правило, химеры характерны для случая $m, m_1, m_2 \gg 1$ и выявляются посредством численного анализа соответствующих математических моделей.

С момента своего открытия в 2002 г. (см. [1]) химеры стали активно изучаемым объектом исследования [2, 3]. Было показано, что они могут возникать как в глобально связанных [4, 5], так и в локально связанных [6] сетях нелинейных осцилляторов. Например, химеры удалось обнаружить в модели Стюарта–Ландау [7, 8], в связанных системах ван дер Поля [9], ФитцХью–Нагумо [10], в моделях Ходжкина–Хаксли [11], Хиндмарша–Роуза [12] и т. д. Это, разумеется, далеко не полный библиографический список. Более подробную библиографию по химерам можно найти в книге [13].

В настоящей работе предлагается некоторый общий подход к отысканию химерных стационарных режимов, который уместно назвать «охотой на химер». Упомянутый подход состоит из двух этапов.

На первом этапе мы рассматриваем аналогичную (1), (2) симметричную полносвязную сеть

$$\dot{x}_j = F(x_j, u_j), \quad u_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

где, как и выше, $F(x, u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $G(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Далее, нас будут интересовать периодические режимы системы (5), которые можно квалифицировать как квазихимеры. В описанной выше ситуации им соответствует случай $m_1 = m_2$, когда отсутствует зона некогерентного

поведения осцилляторов, а есть только две зоны когерентности. Такого типа периодические решения естественно назвать режимами двухкластерной синхронизации. Простейший из них имеет вид

$$C: \quad x_1 = x_2 = \dots = x_k = v_{(k)}(t), \quad x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_m = w_{(k)}(t), \quad (6)$$

где $k: 1 \leq k \leq m$ — некоторое фиксированное натуральное число, а $v_{(k)}(t)$, $w_{(k)}(t)$ — периодические вектор-функции. Предположим, что данный цикл в системе (5) существует и экспоненциально орбитально устойчив.

На втором этапе перейдем от (5) к несимметричной сети

$$\dot{x}_j = F_j(x_j, u_j, \varepsilon), \quad u_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G_s(x_s, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

где

$$F_j(x, u, \varepsilon) = F(x, u) + \varepsilon \Delta_{1,j}(x, u), \quad G_j(x, \varepsilon) = G(x) + \varepsilon \Delta_{2,j}(x), \quad (8)$$

$$\Delta_{1,j}(x, u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \quad \Delta_{2,j}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

а $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Ясно, что система (7) допускает асимптотически близкий к (6) устойчивый цикл $C(\varepsilon)$, который при подходящих возмущениях $\Delta_{1,j}$, $\Delta_{2,j}$ из (8) может стать химерой.

Действительно, фиксируем натуральные $m_1, m_2: m_1 < k < m_2 < m$ и предположим, что

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1} = \Delta_{1,2} = \dots = \Delta_{1,m_1}, \quad \Delta_{1,m_2+1} = \Delta_{1,m_2+2} = \dots = \Delta_{1,m}, \\ \Delta_{2,1} = \Delta_{2,2} = \dots = \Delta_{2,m_1}, \quad \Delta_{2,m_2+1} = \Delta_{2,m_2+2} = \dots = \Delta_{2,m}, \end{aligned} \quad (9)$$

а при $m_1 + 1 \leq j \leq m_2$ добавки $\Delta_{1,j}$, $\Delta_{2,j}$ нетривиально зависят от индекса j (строгий смысл этому понятию будет придан ниже при рассмотрении конкретного примера сети (7)). Тогда, очевидно, система (7) допускает так называемые частично однородные решения (не обязательно периодические), для которых выполняются аналогичные (9) соотношения

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{m_1}, \quad x_{m_2+1} = x_{m_2+2} = \dots = x_m. \quad (10)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что равенства (10) справедливы и для цикла $C(\varepsilon)$ (поскольку он заведомо обладает частичной однородностью при $\varepsilon = 0$). Что же касается компонент x_j этого цикла при $m_1 + 1 \leq j \leq m_2$, то в общем случае они демонстрируют некогерентное поведение, то есть каждая пара из них колеблется асинхронно.

Итак, для реализации предложенной нами стратегии охоты на химер необходимо знать периодические режимы двухкластерной синхронизации у симметричной сети (5). В отличие от химер данные режимы допускают строгое математическое описание, позволяющее в ряде случаев проанализировать вопросы об их существовании и устойчивости. Соответствующая теория излагается ниже.

Фиксируем произвольно натуральное $k: 1 \leq k \leq m - 1$ и предположим, что совокупность индексов $1 \leq j \leq m$ разбита на два непересекающихся множества \mathcal{A} и \mathcal{B} , состоящих из k и $m - k$ элементов, соответственно, то есть

$$\{1, 2, \dots, m\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}. \quad (11)$$

Тогда, как нетрудно увидеть, система (5) допускает решения с компонентами

$$x_j = v(t) \quad \text{при} \quad j \in \mathcal{A}, \quad x_j = w(t) \quad \text{при} \quad j \in \mathcal{B}, \quad (12)$$

где переменные v, w удовлетворяют вспомогательной системе

$$\dot{v} = F(v, u_{k,1}), \quad \dot{w} = F(w, u_{k,2}), \quad (13)$$

в которой

$$u_{k,1} = (k-1)G(v) + (m-k)G(w), \quad u_{k,2} = kG(v) + (m-k-1)G(w). \quad (14)$$

А поскольку нас интересуют периодические решения системы (5) вида (12), то предполагаем выполненным следующее

Условие 1. Система (13), (14) имеет непостоянное периодическое решение

$$C_k : (v, w) = (v_{(k)}(t), w_{(k)}(t)) \quad (15)$$

периода $T_{(k)} > 0$, удовлетворяющее требованию неоднородности

$$v_{(k)}(t) \not\equiv w_{(k)}(t). \quad (16)$$

Сформулированное условие гарантирует существование у исходной системы (5) целого семейства циклов \mathcal{U}_k . Все циклы из этого семейства задаются равенствами (11), (12) при

$$v = v_{(k)}(t), \quad w = w_{(k)}(t), \quad (17)$$

а их количество равно, очевидно, C_m^k . Добавим еще, что в силу условия неоднородности (16) они представляют собой режимы двухкластерной синхронизации.

Для исследования устойчивости циклов (11), (12), (17) системы (5) нам потребуется серия $T_{(k)}$ -периодических по t матриц $A_s(t)$, $B_s(t)$, $s = 1, 2, 3$ размера $n \times n$. Упомянутые матрицы зададим равенствами

$$A_1(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial x}(x, u) \right|_{x=v_{(k)}(t), u=u_{k,1}(t)}, \quad (18)$$

$$A_2(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=v_{(k)}(t), u=u_{k,1}(t)} \cdot G'_x(v_{(k)}(t)), \quad (19)$$

$$A_3(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=v_{(k)}(t), u=u_{k,1}(t)} \cdot G'_x(w_{(k)}(t)), \quad (20)$$

$$B_1(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial x}(x, u) \right|_{x=w_{(k)}(t), u=u_{k,2}(t)}, \quad (21)$$

$$B_2(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=w_{(k)}(t), u=u_{k,2}(t)} \cdot G'_x(v_{(k)}(t)), \quad (22)$$

$$B_3(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=w_{(k)}(t), u=u_{k,2}(t)} \cdot G'_x(w_{(k)}(t)), \quad (23)$$

где

$$u_{k,1}(t) = (k-1)G(v_{(k)}(t)) + (m-k)G(w_{(k)}(t)),$$

$$u_{k,2}(t) = kG(v_{(k)}(t)) + (m-k-1)G(w_{(k)}(t)).$$

Далее, введем в рассмотрение линейные системы

$$\begin{aligned}\dot{c}_1 &= (A_1(t) + (k-1)A_2(t))c_1 + (m-k)A_3(t)c_2, \\ \dot{c}_2 &= k B_2(t)c_1 + (B_1(t) + (m-k-1)B_3(t))c_2,\end{aligned}\quad (24)$$

$$\dot{c} = (A_1(t) - A_2(t))c, \quad \dot{c} = (B_1(t) - B_3(t))c, \quad (25)$$

где $c_1, c_2, c \in \mathbb{R}^n$.

Из формул (18)–(23) непосредственно следует, что система (24) представляет собой линеаризацию вспомогательной системы (13), (14) на цикле (15). Тем самым, она заведомо имеет единичный мультипликатор. В дальнейшем считаем, что этот мультипликатор является простым. Более того, предположим, что выполнено очередное

Условие 2. Все мультипликаторы систем (24), (25) (за исключением простого единичного в случае системы (24)) по модулю строго меньше единицы.

Сформулированные ограничения позволяют доказать следующий базовый результат.

Теорема 1. При условиях 1, 2 система (5) допускает семейство \mathcal{U}_k периодических режимов двухкластерной синхронизации, количество которых равно C_m^k . Все эти циклы экспоненциально орбитально устойчивы.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, существование у системы (5) семейства циклов \mathcal{U}_k гарантируется условием 1. Поэтому перейдем сразу к вопросу об устойчивости данных циклов. В связи с этим сделаем два полезных наблюдения.

Во-первых, несложная проверка показывает, что система (5) инвариантна относительно замен

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}), \quad (26)$$

где (j_1, j_2, \dots, j_m) — произвольная перестановка набора индексов $(1, 2, \dots, m)$. Во-вторых, периодические режимы из семейства \mathcal{U}_k допускают кодирование с помощью бинарных векторов

$$(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m) : \vartheta_j = 1 \text{ или } 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (27)$$

Точнее говоря, предполагаем, что j -я координата вектора (27) равна 1 или 0 при $j \in \mathcal{A}$ или $j \in \mathcal{B}$, соответственно. В этом случае между векторами (27), содержащими k единиц и $m-k$ нулей, и циклами семейства \mathcal{U}_k имеет место взаимно однозначное соответствие.

Суммируя вышесказанное, убеждаемся в том, что любые два цикла из \mathcal{U}_k переходят друг в друга под действием замен (26), а значит, имеют одинаковые свойства устойчивости. Таким образом, проблема устойчивости всех режимов семейства \mathcal{U}_k сводится к исследованию устойчивости только одного цикла, соответствующего бинарному вектору

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-k}).$$

Линеаризуя исходную систему (5) на указанном цикле, приходим к линейной системе вида

$$\dot{h}_j = A_1(t)h_j + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^k A_2(t)h_s + \sum_{s=k+1}^m A_3(t)h_s, \quad 1 \leq j \leq k, \quad (28)$$

$$\dot{h}_j = B_1(t)h_j + \sum_{s=1}^k B_2(t)h_s + \sum_{\substack{s=k+1 \\ s \neq j}}^m B_3(t)h_s, \quad k+1 \leq j \leq m, \quad (29)$$

где $A_s(t)$, $B_s(t)$, $s = 1, 2, 3$ — матрицы (18)–(23), $h_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Как оказывается, при подходящей замене переменных система (28), (29) принимает блочную структуру: распадается на одну $2n$ -мерную подсистему и $m - 2$ подсистем размерности n .

Действительно, введем в рассмотрение серию матриц размера $nm \times n$, задающихся в виде матричных столбцов

$$e_{1,0} = (\underbrace{I, I, \dots, I}_k, \underbrace{O, O, \dots, O}_{m-k})^*, \quad e_{2,0} = (\underbrace{O, O, \dots, O}_k, \underbrace{I, I, \dots, I}_{m-k})^*, \quad (30)$$

$$e_{1,s} = (I, O, \dots, O, \underbrace{-I}_{s+1}, O, \dots, O)^*, \quad s = 1, \dots, k-1, \quad (31)$$

$$e_{2,s} = (O, \dots, O, \underbrace{I}_{k+1}, O, \dots, O, \underbrace{-I}_{k+1+s}, O, \dots, O)^*, \quad s = 1, \dots, m-k-1. \quad (32)$$

Здесь I и O — единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$, $*$ — операция транспонирования, а нижние подписи обозначают номера позиций, которые занимают эти $n \times n$ -блоки в соответствующих матричных столбцах (30)–(32).

Опираясь на приведенные матрицы, выполним в системе (28), (29) замену

$$\text{colon}(h_1, h_2, \dots, h_m) = e_{1,0}c_{1,0} + e_{2,0}c_{2,0} + \sum_{s=1}^{k-1} e_{1,s}c_{1,s} + \sum_{s=1}^{m-k-1} e_{2,s}c_{2,s}, \quad (33)$$

где $c_{1,0}, c_{2,0}, c_{1,s}, c_{2,s} \in \mathbb{R}^n$ — новые переменные. В результате приходим к выводу, что пара компонент $(c_{1,0}, c_{2,0}) = (c_{1,0}(t), c_{2,0}(t))$ из (33) удовлетворяет линейной системе (24). Что же касается компонент $c_{1,s} = c_{1,s}(t)$, $s = 1, \dots, k-1$, то все они являются решениями первой системы из (25). Аналогичным образом, группа координат $c_{2,s} = c_{2,s}(t)$, $s = 1, \dots, m-k-1$, удовлетворяет второй системе из (25). А отсюда и из Условия 2 вытекает требуемая экспоненциальная орбитальная устойчивость всех циклов семейства \mathcal{U}_k . Теорема 1 доказана. \square

Завершая описание общей схемы исследования проблем существования и устойчивости периодических режимов двухкластерной синхронизации, напомним [14, 15], что ранее такие режимы были обнаружены в полносвязных нейронных и генных сетях, содержащих запаздывание по времени. Однако, как показывают результаты настоящей работы, факт наличия или отсутствия запаздывания в данном вопросе несущественен.

2. Анализ модельного примера

В настоящем разделе изложенная выше общая стратегия охоты на химер иллюстрируется на конкретном модельном примере. А именно рассматривается такая симметричная полносвязная сеть (5), для которой все периодические режимы двухкластерной синхронизации задаются явными формулами.

Для построения интересующей нас сети обратимся сначала к двумерной системе, имеющей в комплексной форме записи вид

$$\dot{z} = z - d_0|z|^2 z, \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad d_0 = 1 - ic_0, \quad c_0 = \text{const} > 0. \quad (34)$$

Несложно проверить, что эта система допускает экспоненциально орбитально устойчивый гармонический цикл $z_0(t) = \exp(ic_0 t)$, то есть является простейшим нелинейным осциллятором. Рассмотрим далее полносвязную сеть

$$\dot{z}_j = z_j - d_0|z_j|^2 z_j - \frac{v}{m} d_1 \bar{z}_j \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m z_s^2, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (35)$$

осцилляторов (34), где $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\nu = \text{const} > 0$, $d_1 = 1 + ic_1$, $c_1 = \text{const} \in \mathbb{R}$. Как будет показано ниже, сеть (35) обладает интересующим нас свойством: все ее периодические режимы двухкластерной синхронизации, а также условия их устойчивости, выписываются в явном виде.

Анализ системы (35) начнем с получения условий ее диссипативности. Для этого нам потребуется функция

$$V(z_1, z_2, \dots, z_m, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m) = \sum_{j=1}^m |z_j|^2. \quad (36)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. При выполнении неравенства

$$\nu < m \quad (37)$$

имеет место оценка

$$\frac{1}{2} \dot{V} \leq V - \left(1 - \frac{\nu}{m}\right) \frac{1}{m} V^2, \quad (38)$$

где \dot{V} — производная функции (36) в силу системы (35).

Доказательство. Для вычисления производной \dot{V} заметим сначала, что в силу (35) при любом индексе $j : 1 \leq j \leq m$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z_j|^2 = |z_j|^2 - \left(1 - \frac{\nu}{m}\right) |z_j|^4 - \frac{\nu}{2m} \left(d_1 \bar{z}_j^2 \sum_{s=1}^m z_s^2 + \bar{d}_1 z_j^2 \sum_{s=1}^m \bar{z}_s^2 \right). \quad (39)$$

Суммируя затем выражения (39) по j , приходим к выводу, что

$$\frac{1}{2} \dot{V} = V - \left(1 - \frac{\nu}{m}\right) \sum_{j=1}^m |z_j|^4 - \frac{\nu}{m} \left| \sum_{j=1}^m z_j^2 \right|^2 \leq V - \left(1 - \frac{\nu}{m}\right) \sum_{j=1}^m |z_j|^4.$$

А отсюда с учетом очевидного свойства

$$\left(\sum_{j=1}^m |z_j|^2 \right)^2 \leq m \sum_{j=1}^m |z_j|^4$$

получаем требуемую оценку (38). Лемма 1 доказана. \square

Установленная лемма позволяет без труда разобраться с интересующим нас вопросом о диссипативности системы (35). Действительно, пусть выполнено условие (37). Тогда в силу (38) при любом фиксированном $R > m^2/(m - \nu)$ все траектории нашей системы при увеличении t втекают в шар

$$\left\{ (z_1, z_2, \dots, z_m) : \sum_{j=1}^m |z_j|^2 \leq R \right\},$$

то есть имеет место требуемое свойство диссипативности. При выполнении же строго противоположного (37) неравенства диссипативность отсутствует.

Действительно, непосредственная проверка показывает, что система (35) допускает инвариантное многообразие вида

$$z_j = z \exp(i\gamma_j), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где вещественные постоянные γ_j подчинены условию

$$\sum_{j=1}^m \exp(2i\gamma_j) = 0,$$

а комплексная переменная z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = z - \left(d_0 - \frac{\nu}{m} d_1 \right) |z|^2 z. \quad (40)$$

Что же касается уравнения (40), то в случае $\nu > m$ любое его решение $z(t) \neq 0$ определено на конечном полуинтервале вида $[0, t_0)$ и $|z(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_0$.

Перейдем теперь к вопросам о существовании и устойчивости периодических решений системы (35). Нетрудно проверить, что рассматриваемая сеть допускает однородный цикл

$$z_j = \xi_0 \exp(i\omega_0 t), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (41)$$

где

$$\xi_0 = \sqrt{1/(1 + \nu(m-1)/m)}, \quad \omega_0 = \left(c_0 - \frac{\nu(m-1)}{m} c_1 \right) \xi_0^2, \quad (42)$$

а также периодические режимы двухкластерной синхронизации

$$z_j = \xi_0 \exp(i\omega_0 t), \quad 1 \leq j \leq k, \quad z_j = -\xi_0 \exp(i\omega_0 t), \quad k+1 \leq j \leq m \quad (43)$$

при всех $k : 1 \leq k \leq m-1$. Как уже отмечалось в разделе 1, каждый из циклов (43) порождает, в свою очередь, целое семейство \mathcal{U}_k режимов двухкластерной синхронизации. Обозначим через \mathcal{U} — объединение циклов из $\bigcup_{k=1}^{m-1} \mathcal{U}_k$ с однородным циклом (41). Как оказывается, все эти периодические режимы устойчивы или нет одновременно.

Лемма 2. *Любой цикл из \mathcal{U} экспоненциально орбитально устойчив при выполнении неравенств*

$$\frac{\nu(m+1)}{m} < 1, \quad \frac{\nu}{m} (1 + c_1^2) + c_0 c_1 - 1 > 0 \quad (44)$$

и неустойчив при строгом нарушении хотя бы одного из них.

Доказательство. При обосновании леммы обратим внимание на два обстоятельства. Во-первых, как нетрудно увидеть, система (35) инвариантна по отношению к заменам переменных

$$(\theta_1 z_1, \theta_2 z_2, \dots, \theta_m z_m) \rightarrow (z_1, z_2, \dots, z_m), \quad (45)$$

где множители θ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ независимо друг от друга принимают значения 1 или -1 . Во-вторых, любые два цикла семейства \mathcal{U} переходят друг в друга при некоторой замене вида (45). А отсюда автоматически следует, что свойства устойчивости всех циклов из \mathcal{U} одинаковы. Таким образом, достаточно разобратся с устойчивостью лишь одного из них — однородного цикла (41), (42).

Положим в (35) $z_j = \xi_0(1 + h_j) \exp(i\omega_0 t)$, $h_j = h_{1,j} + ih_{2,j}$, $h_{1,j}, h_{2,j} \in \mathbb{R}$ и отбросим нелинейные по h_j , \bar{h}_j слагаемые. В результате приходим к линейной системе

$$\begin{aligned} \dot{h}_j = & -d_0 \xi_0^2 (h_j + \bar{h}_j) + \frac{\nu(m+1)}{m} d_1 \xi_0^2 h_j - \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \xi_0^2 \bar{h}_j - \\ & - \frac{2\nu}{m} d_1 \xi_0^2 \sum_{s=1}^m h_s, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (46)$$

Заметим, далее, что получившаяся система допускает инвариантное подпространство $h_1 = h_2 = \dots = h_m$, на котором она записывается в виде

$$\dot{h} = -\xi_0^2 \left(d_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \right) (h + \bar{h}), \quad h = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m h_j,$$

а также инвариантное подпространство $(h_1, h_2, \dots, h_m) : \sum_{j=1}^m h_j = 0$, на котором она приобретает вид

$$\dot{h}_j = -\xi_0^2 \left(d_0 - \frac{\nu(m+1)}{m} d_1 \right) h_j - \xi_0^2 \left(d_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \right) \bar{h}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Тем самым спектр устойчивости системы (46) совпадает с собственными значениями матрицы

$$B_1 = -\xi_0^2 \begin{pmatrix} d_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 & d_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \\ \bar{d}_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} \bar{d}_1 & \bar{d}_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} \bar{d}_1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

и $m-1$ одинаковых матриц

$$B_2 = -\xi_0^2 \begin{pmatrix} d_0 - \frac{\nu(m+1)}{m} d_1 & d_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \\ \bar{d}_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} \bar{d}_1 & \bar{d}_0 - \frac{\nu(m+1)}{m} \bar{d}_1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Остается заметить, что матрица (47) имеет собственные значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -2$, а матрица (48) при условиях (44) является гурвицевой. При строгом же нарушении хотя бы одного из этих условий B_2 допускает собственное значение в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. Лемма 2 доказана. \square

Перейдем теперь от (35) к соответствующей несимметричной сети

$$\dot{z}_j = (1 + i\varepsilon\mu_j)z_j - d_0|z_j|^2 z_j - \frac{\nu}{m} d_1 \bar{z}_j \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m z_s^2, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (49)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \ll 1$, $\mu_j = \operatorname{const} \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Предполагаем существование таких натуральных $m_1, m_2 : m_1 < m_2 < m$, что

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{m_1}, \quad \mu_{m_2} = \mu_{m_2+1} = \dots = \mu_m. \quad (50)$$

В случае же $m_1 + 1 \leq j \leq m_2 - 1$ считаем зависимость величин μ_j от индекса j нетривиальной. Последнее означает, что

$$\mu_{j_1} \neq \mu_{j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in [m_1 + 1, m_2 - 1], \quad j_1 \neq j_2. \quad (51)$$

Как оказывается, для системы (49) приведенному в разделе 1 эвристическому описанию химеры можно придать строгий смысл. А именно, канонической химерой назовем цикл этой системы, компоненты $z_j = z_j(t)$ которого удовлетворяют требованиям

$$z_1(t) \equiv z_2(t) \equiv \dots \equiv z_{m_1}(t), \quad z_{m_2}(t) \equiv z_{m_2+1}(t) \equiv \dots \equiv z_m(t), \quad (52)$$

$$z_{j_1}(t) \not\equiv z_{j_2}(t) \quad \forall j_1, j_2 \in [m_1 + 1, m_2 - 1], \quad j_1 \neq j_2, \quad (53)$$

где натуральные m_1, m_2 заимствованы из (50), (51). Что же касается отрезков $1 \leq j \leq m_1$, $m_2 \leq j \leq m$ и $m_1 + 1 \leq j \leq m_2 - 1$, то, как обычно, их будем называть промежутками когерентного и некогерентного поведения осцилляторов.

При решении вопроса о существовании канонической химеры предположим, что параметры c_0, c_1, ν системы (49) удовлетворяют требованиям

$$0 < \nu < \frac{m}{m+1}, \quad c_0 c_1 > 1. \quad (54)$$

В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 (о существовании канонической химеры). При выполнении сформулированных выше ограничений и при всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, система (49) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$z_j = \rho_j(\varepsilon) \exp[i\varphi_j(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon)t], \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^m \varphi_j(\varepsilon) = 0, \quad (55)$$

являющийся при $\varepsilon \neq 0$ канонической химерой. Здесь вещественные функции $\rho_j(\varepsilon), \varphi_j(\varepsilon), \omega(\varepsilon)$ аналитически зависят от ε и при $\varepsilon \rightarrow 0$ допускают асимптотику:

$$\rho_j(\varepsilon) = \rho_0 + \varepsilon \rho_{1,j} + O(\varepsilon^2), \quad \varphi_j(\varepsilon) = \varepsilon \varphi_{1,j} + O(\varepsilon^2), \quad \omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2), \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \xi_0, \quad \rho_{1,j} = \frac{\operatorname{Re} \kappa_j}{\xi_0}, \quad \varphi_{1,j} = \frac{\operatorname{Im} \kappa_j}{\xi_0^2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m \mu_s, \\ \kappa_j &= \frac{\nu c_1 - i(1 - \nu/m)}{2\nu[c_0 c_1 - 1 + \nu(1 + c_1^2)/m]} (\omega_1 - \mu_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (57)$$

а ξ_0, ω_0 — величины (42).

Доказательство. В силу Условий (54) и Леммы 2 при $\varepsilon = 0$ однородный цикл (41) системы (49) экспоненциально орбитально устойчив. Поэтому при малых по модулю значениях ε он переходит в экспоненциально орбитально устойчивый цикл вида

$$z_j = z_j(\varepsilon) \exp[i\omega(\varepsilon)t], \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (58)$$

где комплексные амплитуды $z_j(\varepsilon), z_j(0) = \xi_0$ и частота $\omega(\varepsilon), \omega(0) = \omega_0$ аналитически зависят от ε . Далее подставим формулы (58) вместе с разложениями

$$z_j(\varepsilon) = \xi_0 + \varepsilon \xi_{1,j} + \dots, \quad \omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots \quad (59)$$

в систему (49), сократим результат на $\exp[i\omega(\varepsilon)t]$ и приравняем коэффициенты при ε в левой и правой частях получившихся соотношений. В результате для постоянных $\xi_{1,j} \in \mathbb{C}, \omega_1 \in \mathbb{R}$ из (59) приходим к линейной неоднородной системе

$$\begin{aligned} i\omega_1 &= i\mu_j - d_0 \xi_0 (\xi_{1,j} + \bar{\xi}_{1,j}) + \frac{\nu(m+1)}{m} d_1 \xi_0 \xi_{1,j} - \\ &\quad - \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \xi_0 \bar{\xi}_{1,j} - \frac{2\nu}{m} d_1 \xi_0 \sum_{s=1}^m \xi_{1,s}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Последняя же, как нетрудно проверить, при значении ω_1 , определенном соответствующей формулой из (57), имеет решение

$$\xi_{1,j} = \frac{\kappa_j}{\xi_0}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (60)$$

Из установленных соотношений (59), (60) следует, что цикл (58) преобразуется к нужному виду (55)–(57). Необходимо только заметить, что выполнения фигурирующего в (55) равенства $\sum_{j=1}^m \varphi_j(\varepsilon) = 0$ всегда можно добиться посредством замены t на $t + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Добавим, наконец, что при $\varepsilon \neq 0$ цикл (55) является канонической химерой. Действительно, равенства вида (52) справедливы для него по тем же причинам, что и аналогичные равенства (10) для цикла $C(\varepsilon)$ системы (7) (см. соответствующее место в разделе 1). Что же касается требований (53), то их справедливость при $\varepsilon \neq 0$ гарантируют условие (51) и формулы (56), (57). Теорема 2 доказана. \square

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Поскольку при $\varepsilon \neq 0$ система (49) по-прежнему инвариантна относительно замен (45), то каноническая химера (55) порождает целое семейство \mathcal{U} , состоящее из $2^m - 1$ экспоненциально орбитально устойчивых циклов. Все эти циклы, получающиеся из одного цикла (55) посредством указанных замен переменных, будем называть химероподобными структурами. Ясно также, что если положить

$$\mu_j = \mu(s)|_{s=j/m}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (61)$$

где $\mu(s)$ — некоторая непрерывная на отрезке $0 \leq s \leq 1$ функция, то при выполнении аналогичных (54) условий

$$0 < \nu < 1, \quad c_0 c_1 > 1 \quad (62)$$

и при согласованном стремлении $\varepsilon \rightarrow 0$, $m \rightarrow +\infty$ количество сосуществующих в системе (49) устойчивых циклов неограниченно растет. Иными словами, наблюдается известное явление буферности. Как показано в монографиях [16, 17], данное явление характерно для широкого класса динамических систем из различных областей естествознания.

Завершая обсуждение стратегии охоты на химер применительно к системе (49), отметим, что за счет подходящего выбора коэффициентов μ_j мы можем гарантировать существование химеры с заранее запланированными свойствами. Действительно, предположим, что массив индексов $1 \leq j \leq m$ произвольным образом разбит на k , $k \geq 2$ отрезков, то есть

$$\{1, 2, \dots, m\} = [1, m_1] \cup [m_1 + 1, m_2] \cup \dots \cup [m_s + 1, m_{s+1}] \cup \dots \cup [m_{k-1} + 1, m]. \quad (63)$$

Считаем далее, что на каждом из этих отрезков последовательность μ_j либо постоянна, либо нетривиально зависит от j , и такого рода отрезки чередуются. В этом случае Теорема 2 остается в силе при условии, что мы надлежащим образом модифицируем определение канонической химеры. А именно в данном случае таковой уместно назвать химеру, у которой промежутки когерентного и некогерентного поведения осцилляторов совпадают с отрезками из (63) постоянства и непостоянства коэффициентов μ_j .

3. Непрерывные химеры

В данном разделе установленные выше результаты для модельной системы (35) распространяются на ее непрерывный аналог. А именно исследуется эволюционное уравнение вида

$$\dot{z} = z - d_0 |z|^2 z - \nu d_1 \bar{z} \int_0^1 z^2(t, s) ds, \quad (64)$$

получающееся из (35) при $m \rightarrow +\infty$. Здесь, как обычно, точкой обозначена производная по t ,

$$\begin{aligned} z &= x(t, s) + iy(t, s), \quad t \geq 0, \quad s \in [0, 1], \quad x(t, s), y(t, s) \in \mathbb{R}, \quad d_0 = 1 - ic_0, \\ c_0 &= \text{const} > 0, \quad \nu = \text{const} > 0, \quad d_1 = 1 + ic_1, \quad c_1 = \text{const} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (65)$$

Остановимся сначала на вопросе о разрешимости задачи Коши для уравнения (64) с начальным условием из подходящего фазового пространства. В качестве такового возьмем вещественное банахово пространство E , элементами которого являются векторы

$$\xi = (x(s), y(s)) : \quad x(s), y(s) \in L_\infty(0, 1). \quad (66)$$

Что же касается нормы элемента (66), то ее зададим формулой

$$\|\xi\| = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq s \leq 1} \sqrt{x^2(s) + y^2(s)}, \quad (67)$$

где $\operatorname{ess\,sup}$ — существенная точная верхняя грань. Далее, введем в рассмотрение абстрактную функцию $\xi(t) = (x(t, s), y(t, s))$ со значениями в E , где $x(t, s), y(t, s)$ — функции из (65). В результате уравнение (64) записывается в абстрактной форме

$$\dot{\xi} = \mathcal{F}(\xi), \quad (68)$$

где, как нетрудно увидеть, нелинейный оператор $\mathcal{F} : E \rightarrow E$ есть сумма единичного оператора и слагаемого вида $\mathcal{G}(\xi, \xi, \xi)$, где $\mathcal{G}(\cdot, \cdot, \cdot)$ — непрерывная кубическая форма, действующая из $E \times E \times E$ в E .

Элементы общей теории абстрактных уравнений вида (68) с ограниченной и гладкой по Фреше правой частью содержатся, например, в монографии [18]. Из этой теории вытекает, в частности, следующее утверждение.

Лемма 3. По любому фиксированному ограниченному множеству $\Omega \subset E$ можно указать такое $t_0 = t_0(\Omega) > 0$, что при $\forall \xi_0 \in \Omega$ решение $\xi = \xi(t)$ уравнения (68) с начальным условием

$$\xi|_{t=0} = \xi_0 \quad (69)$$

однозначно определено на отрезке $0 \leq t \leq t_0$.

В дальнейшем нам потребуется еще одно стандартное утверждение из теории абстрактных уравнений вида (68). Перед его формулировкой для решения $\xi = \xi(t)$ задачи Коши (68), (69) определим максимальный полуинтервал существования $[0, t_{\max})$, где

$$t_{\max} = \sup \{t_0 : \xi(t) \text{ существует на отрезке } [0, t_0]\}. \quad (70)$$

Согласно Лемме 3, множество значений t_0 , по которому берется \sup в (70), заведомо не пусто. Кроме того, любое решение $\xi(t)$ однозначно продолжается на свой максимальный полуинтервал. Если же оказалось, что $t_{\max} < \infty$, то справедлива следующая

Лемма 4. Предположим, что для некоторого решения $\xi(t)$ уравнения (68) конечна величина (70). Тогда имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max} - 0} \|\xi(t)\| = +\infty, \quad (71)$$

где здесь и далее $\|\cdot\|$ — норма (67).

Доказательство сформулированной леммы проводится от противного. Действительно, предположим, что соотношение (71) не выполняется. В этом случае существуют такая последовательность моментов времени $t_n, t_n \nearrow t_{\max}$ при $n \rightarrow +\infty$, и такая постоянная $M > 0$, что $\|\xi(t_n)\| \leq M$. Далее, в условиях Леммы 3 в качестве ограниченного множества Ω возьмем $\{\xi(t_n), n \geq 1\}$. Тогда, очевидно, решение $\xi(t)$ будет определено на отрезках вида $[t_n, t_n + t_0], n \geq 1$, где $t_0 = t_0(\Omega) > 0$. Ясно также, что при достаточно больших n выполняется включение $t_{\max} \in (t_n, t_n + t_0)$. Последнее же противоречит определению t_{\max} (см. (70)). \square

Перейдем теперь к вопросу о диссипативности уравнения (68). Как оказывается, в отличие от дискретного случая (35), где условие диссипативности имеет вид (37), непрерывная система (64) диссипативна при каждом $\nu > 0$. Точнее говоря, справедлива очередная

Лемма 5. Существует постоянная $R_0 > 0$ со следующими свойствами. По любому ограниченному множеству $\Omega \subset E$ найдется такое $t_* = t_*(\Omega) > 0$, что при каждом $\xi_0 \in \Omega$ решение $\xi(t)$ соответствующей задачи Коши (68), (69) определено на полуоси $t \geq 0$, а при всех $t \geq t_*$ удовлетворяет неравенству

$$\|\xi(t)\| \leq R_0. \quad (72)$$

Доказательство. Фиксируем произвольно ограниченное множество Ω из E и элемент $\xi_0 \in \Omega$. Далее, обозначим через $\xi(t)$ решение задачи Коши (68), (69), определенное на своем максимальном полуинтервале $[0, t_{\max})$, где t_{\max} — величина (70). В последующем нам потребуется также представление

$$\xi(t) = (x(t, s), y(t, s)) : x(t, s), y(t, s) \in L_\infty(0, 1) \text{ по } s \text{ при } \forall t \in [0, t_{\max}) \quad (73)$$

и связанная с ним функция $z(t, s) = x(t, s) + iy(t, s)$, удовлетворяющая при всех значениях $t \in [0, t_{\max})$ уравнению (64) (почти при всех $s \in [0, 1]$).

Обоснование Леммы разбивается на два этапа. На первом из них будет установлена оценка сверху для функции

$$V(t) = \int_0^1 |z(t, s)|^2 ds, \quad 0 \leq t < t_{\max}. \quad (74)$$

Получение требуемой оценки проводится следующим образом. Сначала дополним уравнение (64) комплексно сопряженным уравнением. Умножим затем первое из этих уравнений на \bar{z} , а второе — на z . В результате после сложения получившихся выражений и последующего интегрирования по $s \in [0, 1]$ приходим к равенству

$$\dot{V} = 2 \left(V(t) - \int_0^1 |z(t, s)|^4 ds - \left| \int_0^1 z^2(t, s) ds \right|^2 \right). \quad (75)$$

Далее, из соотношения (75) и из формулы (74) очевидным образом следует, что

$$\dot{V} \leq 2 \left(V(t) - \int_0^1 |z(t, s)|^4 ds \right) \leq 2(V(t) - V^2(t)), \quad V(0) \leq V_0,$$

где

$$V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\xi_0 \in \Omega} \|\xi_0\|^2 > 0$$

(случай $V_0 = 0$ тривиален, поскольку тогда $\Omega = \{0\}$ и $\xi(t) \equiv 0$). А отсюда, в свою очередь имеем

$$V(t) \leq V_*(t), \quad 0 \leq t < t_{\max}, \quad (76)$$

где $V_*(t), t \geq 0$ — решение задачи Коши

$$\dot{V} = 2(V - V^2), \quad V|_{t=0} = V_0. \quad (77)$$

Добавим еще, что

$$V_*(t) \leq R_1 \quad \forall t \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} V_*(t) = 1, \quad (78)$$

где $R_1 = R_1(\Omega)$ — некоторая положительная постоянная.

Второй этап обоснования Леммы связан с получением при почти всех значениях $s \in [0, 1]$ оценки сверху на функцию

$$W(t, s) = |z(t, s)|^2, \quad 0 \leq t < t_{\max}. \quad (79)$$

Для этого привлечем аналогичное (75) равенство

$$\dot{W}(t, s) = 2(W(t, s) - W^2(t, s)) - 2\nu \operatorname{Re} [d_1 \alpha(t) \bar{z}^2(t, s)], \quad (80)$$

где, как обычно, точка — дифференцирование по t , а функция $\alpha(t)$ имеет вид

$$\alpha(t) = \int_0^1 z^2(t, s) ds, \quad 0 \leq t < t_{\max}.$$

Далее, объединяя формулы (79), (80) с очевидным фактом $|\alpha(t)| \leq V(t)$ и уже установленной оценкой (76), приходим к выводу, что (почти всюду по s)

$$\begin{aligned} \dot{W}(t, s) &\leq 2[(1 + \nu |d_1| V_*(t))W(t, s) - W^2(t, s)], \quad 0 \leq t < t_{\max}, \\ W(0, s) &\leq W_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\xi_0 \in \Omega} \|\xi_0\|^2. \end{aligned} \quad (81)$$

И наконец, из (81) в силу теоремы о дифференциальных неравенствах при почти всех $s \in [0, 1]$ имеем

$$W(t, s) \leq W_*(t), \quad 0 \leq t < t_{\max}, \quad (82)$$

где $W_*(t), t \geq 0$ — решение аналогичной (77) задачи Коши

$$\dot{W} = 2[(1 + \nu |d_1| V_*(t))W - W^2], \quad W|_{t=0} = W_0.$$

Отметим еще, что в силу (78) решение $W_*(t)$ этой задачи обладает свойствами

$$W_*(t) \leq R_2 \quad \forall t \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} W_*(t) = 1 + \nu |d_1|, \quad (83)$$

где $R_2 = R_2(\Omega) > 0$.

Подводя итог, перейдем в неравенстве (82) к существенной точной верхней грани по $s \in [0, 1]$. В результате, принимая во внимание способ задания нормы в пространстве E (см. (67)), для функции (73) получаем оценку

$$\|\xi(t)\|^2 \leq W_*(t), \quad 0 \leq t < t_{\max}. \quad (84)$$

Далее, из (84) автоматически следует, что $t_{\max} = +\infty$ (в противном случае имеет место предельное равенство (71), противоречащее оценке (84)). Остается отметить, что в силу (83), (84) все траектории системы (68) при увеличении t втекают в шар $\{\xi \in E : \|\xi\| \leq R_0\}$ при любом фиксированном $R_0 > \sqrt{1 + \nu |d_1|}$. Тем самым, при подходящем выборе $t_* = t_*(\Omega) > 0$ требуемое неравенство (72) заведомо выполняется на полуоси $t \geq t_*$. Лемма 5 доказана. \square

Вопросы о существовании и устойчивости у уравнения (64) периодических режимов двухкластерной синхронизации требуют отдельного рассмотрения. Отметим сразу, что как и в дискретном случае (35), непрерывная модель (64) имеет однородный цикл

$$z = \xi_0 \exp(i\omega_0 t), \quad (85)$$

где

$$\xi_0 = 1/\sqrt{1 + \nu}, \quad \omega_0 = (c_0 - \nu c_1)\xi_0^2. \quad (86)$$

Как оказывается, этот цикл порождает целое семейство циклов уравнения (64).

Действительно, опираясь на представление

$$[0, 1] = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \quad (87)$$

где \mathcal{A}, \mathcal{B} — произвольные измеримые по Лебегу непересекающиеся подмножества отрезка $[0, 1]$ положительной меры, рассмотрим функцию

$$I_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s \in \mathcal{A}, \\ -1 & \text{при } s \in \mathcal{B}. \end{cases} \quad (88)$$

Заметим далее, что поскольку уравнение (64) инвариантно относительно замены

$$I_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(s)z \rightarrow z, \quad (89)$$

то наряду с циклом (85), (86) оно допускает цикл

$$z(t, s) = I_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(s)\xi_0 \exp(i\omega_0 t), \quad (90)$$

который и будем называть периодическим режимом двухкластерной синхронизации. Все циклы (90), отвечающие любым разбиениям вида (87), а также однородный цикл (85), (86), объединим в семейство \mathcal{U} (отождествляя, естественно, циклы, отличающиеся друг от друга по s лишь на множестве нулевой меры). Аналогом Леммы 2 в данном случае является следующее утверждение.

Лемма 6. *При условиях (62) каждый цикл семейства \mathcal{U} экспоненциально орбитально устойчив. При выполнении же хотя бы одного неравенства $\nu > 1$ или $c_0 c_1 < 1$ все циклы данного семейства неустойчивы.*

Доказательство. Как и при обосновании Леммы 2, сначала обратим внимание на тот факт, что любые два цикла семейства \mathcal{U} переходят друг в друга под действием некоторой замены из класса (88), (89). Те самым, свойства их устойчивости одинаковы, а значит, мы можем ограничиться рассмотрением лишь однородного цикла (85), (86). Добавим еще, что поскольку для абстрактного уравнения (68) очевидным образом справедлива теорема Андронова–Витта об устойчивости цикла по первому приближению, то проблема устойчивости упомянутого периодического режима сводится к анализу соответствующей системы в вариациях.

Полагая в (64) $z = \xi_0(1 + h(t, s)) \exp(i\omega_0 t)$, где

$$h(t, s) = h_1(t, s) + ih_2(t, s), \quad h_1(t, s), h_2(t, s) \in \mathbb{R},$$

и отбрасывая нелинейные по h, \bar{h} слагаемые, приходим к выводу, что интересующее нас уравнение в вариациях имеет вид

$$\dot{h} = -d_0 \xi_0^2 (h + \bar{h}) + \nu d_1 \xi_0^2 (h - \bar{h}) - 2\nu d_1 \xi_0^2 \int_0^1 h(t, s) ds. \quad (91)$$

Заметим, далее, что фазовое пространство E уравнения (91), состоящее из пар

$$(h_1(s), h_2(s)) : \quad h_j(s) \in L_\infty(0, 1), \quad j = 1, 2,$$

раскладывается в прямую сумму замкнутых линейных подпространств E_1, E_2 . Первое из них двумерно и задается равенством

$$E_1 = \{(h_1(s), h_2(s)) : \quad h_j(s) \equiv h_j, \quad h_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2\}, \quad (92)$$

а второе имеет вид

$$E_2 = \left\{ (h_1(s), h_2(s)) : \quad \int_0^1 h_j(s) ds = 0, \quad j = 1, 2 \right\}. \quad (93)$$

Кроме того, нетрудно проверить, что подпространства (92), (93) инвариантны для траекторий уравнения (91).

Обозначим через $L : E \rightarrow E$ линейный ограниченный оператор, порожденный правой частью уравнения (91) и действующий по правилу:

$$(h_1(s), h_2(s)) \mapsto (\operatorname{Re} \mathcal{L}(h, \bar{h}), \operatorname{Im} \mathcal{L}(h, \bar{h})),$$

где

$$\mathcal{L}(h, \bar{h}) = -d_0 \xi_0^2 (h + \bar{h}) + \nu d_1 \xi_0^2 (h - \bar{h}) - 2\nu d_1 \xi_0^2 \int_0^1 h(s) ds, \quad h(s) = h_1(s) + i h_2(s).$$

Из приведенных выше фактов следует, что, во-первых, $LE_j \subset E_j$, $j = 1, 2$; во-вторых, спектры сужений $L|_{E_j}$, $j = 1, 2$ совпадают с собственными значениями матриц B_1 и B_2 , соответственно, где

$$B_1 = -\xi_0^2 \begin{pmatrix} d_0 + \nu d_1 & d_0 + \nu d_1 \\ \bar{d}_0 + \nu \bar{d}_1 & \bar{d}_0 + \nu \bar{d}_1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = -\xi_0^2 \begin{pmatrix} d_0 - \nu d_1 & d_0 + \nu d_1 \\ \bar{d}_0 + \nu \bar{d}_1 & \bar{d}_0 - \nu \bar{d}_1 \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Остается добавить, что первая из матриц (94) имеет собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, а вторая при условиях (62) является гурвицевой. В случае же $\nu > 1$ или $c_0 c_1 < 1$ у B_2 существует собственное значение с положительной действительной частью. Лемма 6 доказана. \square

В связи с установленной Леммой обратим внимание на следующий чисто бесконечномерный эффект: хотя семейство \mathcal{U} имеет мощность континуума, но в фазовом пространстве E любые два различных цикла этого семейства располагаются друг от друга на положительном расстоянии, равном $2\xi_0$. В конечномерном случае и даже в случае бесконечномерного сепарабельного фазового пространства такая ситуация заведомо невозможна.

Перейдем теперь к несимметричной непрерывной сети

$$\dot{z} = (1 + i\varepsilon\mu(s))z - d_0|z|^2 z - \nu d_1 \bar{z} \int_0^1 z^2(t, s) ds, \quad (95)$$

получающейся из (49) при условиях (61) и при $m \rightarrow +\infty$. Здесь, как и в дискретном случае, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \ll 1$. Далее, по аналогии с требованиями (50), (51) предполагаем существование таких $s_1, s_2 : 0 < s_1 < s_2 < 1$, что непрерывная вещественная функция $\mu(s)$ постоянна на отрезках $[0, s_1]$ и $[s_2, 1]$, а на отрезке $[s_1, s_2]$ нетривиально зависит от s . Последнее означает, что при $\forall c \in \mathbb{R}$ множество $\{s \in [s_1, s_2] : \mu(s) = c\}$ имеет нулевую меру Лебега.

Как и в случае системы (49), для уравнения (95) можно сформулировать определение непрерывной канонической химеры. В данной ситуации канонической химерой назовем периодическое решение $z = z(t, s)$ этого уравнения, удовлетворяющее соотношениям (почти всюду по s)

$$z(t, s) \equiv z_1(t) \text{ при } s \in [0, s_1], \quad z(t, s) \equiv z_2(t) \text{ при } s \in [s_2, 1], \quad (96)$$

где $z_1(t), z_2(t)$ — некоторые комплекснозначные функции. В случае же отрезка $s_1 \leq s \leq s_2$ предполагаем, что для $\forall c \in \mathbb{C}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ множество значений $\{s \in [s_1, s_2] : z(t, s) = c\}$ имеет меру ноль. Если рассматривать $z = z(t, s)$ как континуальный массив нелинейных осцилляторов, то в силу (96) промежутки $0 \leq s \leq s_1$ и $s_2 \leq s \leq 1$ естественно назвать зонами когерентности. Что же касается отрезка $s_1 \leq s \leq s_2$, то его назовем зоной некогерентности.

Аналогом Теоремы 2 для непрерывной модели (95) является следующая

Теорема 3 (о непрерывной канонической химере). При выполнении сформулированных выше ограничений на функцию $\mu(s)$, при условиях (62) и при всех достаточно малых по модулю значениях ε уравнение (95) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$z = \rho(s, \varepsilon) \exp[i\varphi(s, \varepsilon) + i\omega(\varepsilon)t], \quad \int_0^1 \varphi(s, \varepsilon) ds \equiv 0, \quad (97)$$

являющийся при $\varepsilon \neq 0$ канонической химерой. Здесь непрерывные по своим переменным и аналитические по ε вещественные функции $\rho(s, \varepsilon)$, $\varphi(s, \varepsilon)$, $\omega(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ допускают асимптотику:

$$\begin{aligned} \rho(s, \varepsilon) &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1(s) + O(\varepsilon^2), & \varphi(s, \varepsilon) &= \varepsilon \varphi_1(s) + O(\varepsilon^2), \\ \omega(\varepsilon) &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (98)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \xi_0, & \rho_1(s) &= \frac{\operatorname{Re} \kappa(s)}{\xi_0}, & \varphi_1(s) &= \frac{\operatorname{Im} \kappa(s)}{\xi_0^2}, & \omega_1 &= \int_0^1 \mu(s) ds, \\ \kappa(s) &= \frac{\nu c_1 - i}{2\nu(c_0 c_1 - 1)} (\omega_1 - \mu(s)), \end{aligned} \quad (99)$$

а ξ_0 , ω_0 — величины (86).

На доказательстве Теоремы 3 не останавливаемся, поскольку в своей идейной части оно идентично обоснованию Теоремы 2. Отметим только, что аналог этой теоремы справедлив и в случае, когда функция $\mu(s)$ имеет несколько чередующихся участков постоянства и нетривиальной зависимости от s . Необходимо только надлежащим образом скорректировать определение канонической химеры.

Завершая рассмотрение непрерывной модели (95), заметим, что при $\varepsilon \neq 0$ она по-прежнему инвариантна по отношению к заменам переменных (88), (89). Поэтому каноническая химера (97) порождает континуальное семейство \mathcal{U} экспоненциально орбитально устойчивых циклов, получающихся из (97) под действием указанных замен. Как и в дискретном случае, эти периодические режимы уместно назвать химероподобными структурами.

Заключение

В данном разделе приводятся результаты численного анализа системы (49). Цель этого анализа — выявление возможных типов химероподобных режимов, существующих в указанной системе при фиксированных параметрах ν , c_1 , c_2 , удовлетворяющих условиям (62), и при различных значениях управляющего параметра $\varepsilon > 0$.

Прежде чем перейти непосредственно к описанию численных экспериментов, остановимся на характерных особенностях изучаемой системы. Назовем два ее цикла эквивалентными, если они переходят друг в друга под действием замены переменных вида (45). Ясно, что свойства их устойчивости и происходящие с ними возможные бифуркации одинаковы. В связи с этим все эквивалентные между собой циклы уместно объединить в соответствующие семейства. Одним из таких семейств является множество химероподобных структур \mathcal{U} , количество которых равно $2^m - 1$ (что при $m = 100$ имеет порядок 10^{30}). Напомним, что эти химеры получаются из канонической химеры (55) под действием замен (45). Существуют и другие семейства эквивалентных периодических режимов, отличные от \mathcal{U} и также состоящие не менее чем из $2^m - 1$ элементов. Все это приводит к реализации так называемого феномена флуктуационного хаоса. Суть упомянутого феномена состоит в том, что ввиду узости бассейнов притяжений отдельно

взятых устойчивых циклов система «скользит» по устойчивым режимам — при незначительном изменении начальных условий происходит переход от одного аттрактора к другому. Понятно, что в такой ситуации проследить за эволюцией по параметру ε какого-либо одного цикла или даже отдельно взятого семейства эквивалентных циклов не представляется возможным. В связи с этим ниже мы ограничиваемся лишь некоторой классификацией реализующихся в системе (49) химероподобных структур.

Перед численным интегрированием системы (49) в ней был осуществлен переход к полярным координатам

$$z_j = \rho_j \exp(i\varphi_j), \quad \rho_j > 0, \quad \varphi_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Далее, при фиксированных параметрах $c_0 = 1$, $c_1 = 3$, $v = 0.5$, $m = 100$, при

$$\mu_j = \mu(s)|_{s=j/m}, \quad \mu(s) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq s \leq 1/3, \\ 3(2s - 1) & \text{при } 1/3 \leq s \leq 2/3, \\ 1 & \text{при } 2/3 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

и при различных значениях $\varepsilon > 0$ вычислялся отрезок траектории получившейся системы для ρ_j , φ_j , отвечающий промежутку времени $0 \leq t \leq 1000000$ и начальным условиям

$$\rho_j(0) = 0.2 \left(1 + 0.01 \cdot \frac{j}{j+1} \right), \quad \varphi_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

На этом пути удалось выявить следующие типы химероподобных структур.

При $0 < \varepsilon \lesssim 0.077$ наблюдаются устойчивые циклы химерного типа, являющиеся продолжениями по параметру ε циклов семейства \mathcal{U} . На рис. 1, *a* и *b* при $\varepsilon = 0.07$ для одного из химерных циклов представлены зависимости переменных $\rho_j(t)$ и $\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)$ от индекса $1 \leq j \leq m$. Подчеркнем, что поскольку данный цикл имеет автомодельный вид

$$z_j = z_j^0 \exp(i\omega t), \quad z_j^0 = \text{const} \in \mathbb{C}, \quad \omega = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (100)$$

то упомянутые переменные не зависят от времени. Такую химеру уместно назвать стационарной. Добавим еще, что при указанных ε стационарными являются все химеры из \mathcal{U} .

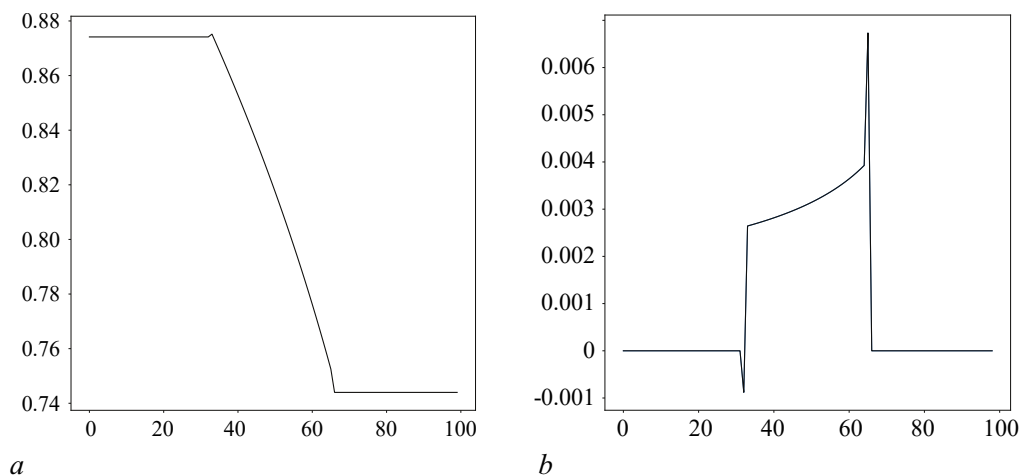


Рис. 1. *a* — ρ_j , *b* — $\varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.07$

Fig. 1. *a* — ρ_j , *b* — $\varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.07$

При последующем увеличении параметра ε удается обнаружить так называемые двумерные автомодельные торы, имеющие вид

$$z_j = z_j^0(t) \exp(i\omega t), \quad z_j^0(t) \in \mathbb{C}, \quad \omega = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (101)$$

где $z_j^0(t)$ — некоторые периодические с периодом $T > 0$ комплекснозначные функции. Добавим еще, что торы (101) заведомо не приводятся к виду (100). Такого типа химероподобные структуры будем называть квазипериодическими. На рис. 2, *a*, *b* изображены зависимости от $1 \leq j \leq m$ отвечающих одному из этих торов функций $\rho_j(t)$ и $\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)$ при $\varepsilon = 0.08$ и при фиксированном $t = 1000000$. Подчеркнем, что в отличие от предыдущего случая этот химерный режим уже не является стационарным. В частности, в силу (101) отвечающие ему полярные радиусы $\rho_j(t)$ периодичны по t с периодом T . График зависимости от t на промежутке $999500 \leq t \leq 1000000$ одного из этих радиусов, а именно $\rho_5(t)$, представлен на рис. 3 (точке ноль на горизонтальной оси соответствует значение $t = 999500$).

Дальнейшее увеличение параметра ε приводит к очередному усложнению динамики. А именно появляются устойчивые химероподобные режимы с непериодической зависимостью компонент

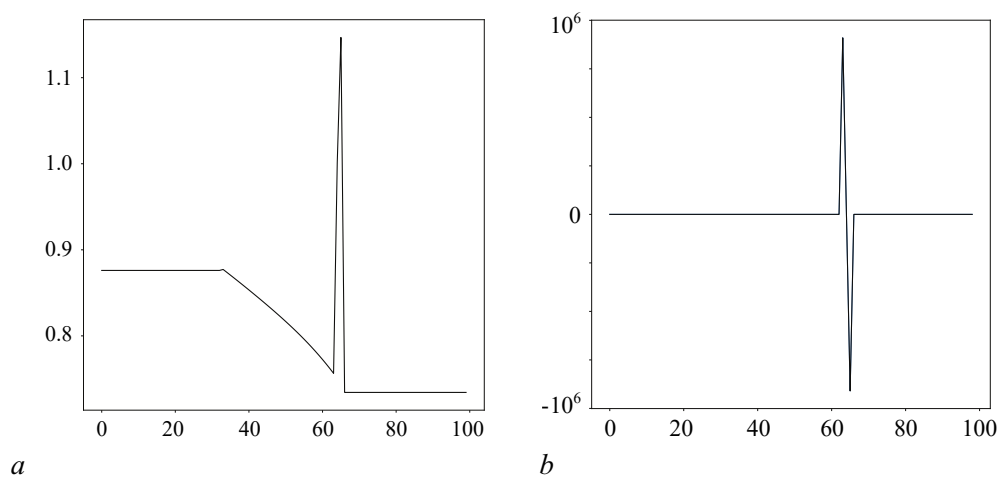


Рис. 2. *a* — ρ_j , *b* — $\varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.08$, $t = 1000000$

Fig. 2. *a* — ρ_j , *b* — $\varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.08$, $t = 1000000$

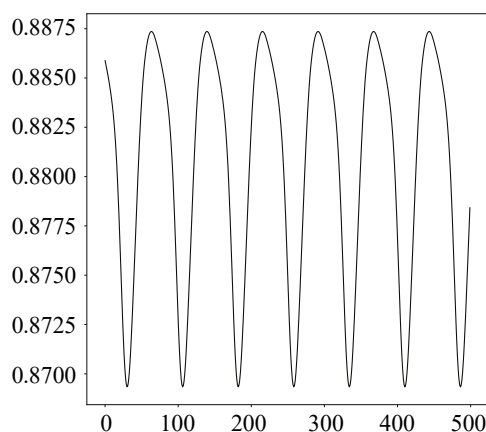


Рис. 3. График $\rho_5(t)$ при $\varepsilon = 0.08$

Fig. 3. Graph of $\rho_5(t)$ for $\varepsilon = 0.08$

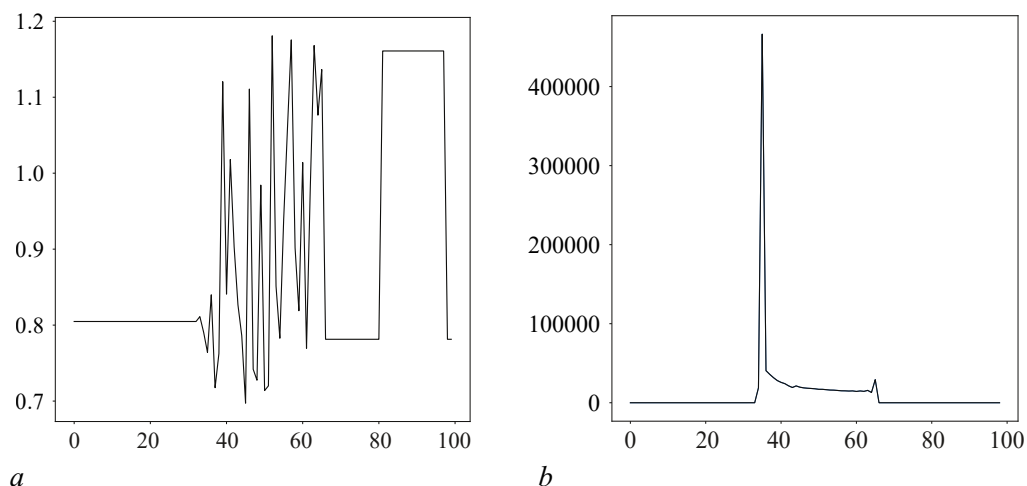


Рис. 4. $a - \rho_j$, $b - \varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.18$, $t = 1000000$

Fig. 4. $a - \rho_j$, $b - \varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.18$, $t = 1000000$

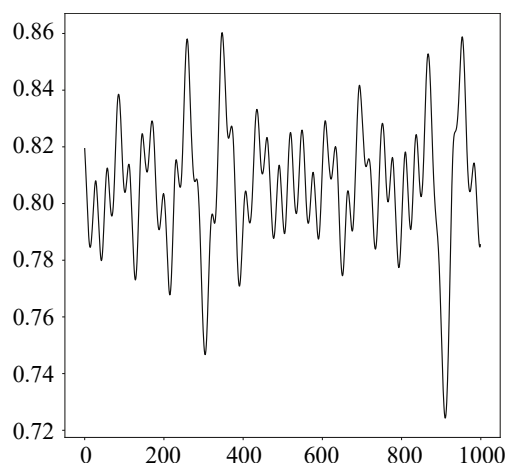


Рис. 5. График $\rho_5(t)$ при $\varepsilon = 0.18$

Fig. 5. Graph of $\rho_5(t)$ for $\varepsilon = 0.18$

$\rho_j(t)$ от t . Такого рода химеры назовем турбулентными. На рис. 4, a , b для одной из турбулентных химер в случае $\varepsilon = 0.18$ приведены зависимости $\rho_j(t)$ и $\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)$ от j при $t = 1000000$, а на рис. 5 представлен график $\rho_5(t)$ на промежутке $999000 \leq t \leq 1000000$ (точке ноль на горизонтальной оси соответствует значение $t = 999000$).

В заключение добавим, что все перечисленные выше характерные особенности динамики, связанные с усложнением химерных режимов при увеличении параметра ε , сохраняются и для непрерывной модели (95).

Список литературы

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002. Vol. 5, no. 4. P. 380–385.
2. Abrams D.M., Strogatz S.H. Chimera states for coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93, no. 17. P. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.

3. *Panaggio M. J., Abrams D. M.* Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // *Nonlinearity*. 2015. Vol. 28, no. 3. P. R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67.
4. *Sethia G. C., Sen A.* Chimera states: The existence criteria revisited // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112, no. 14. P. 144101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144101.
5. *Schmidt L., Krischer K.* Clustering as a prerequisite for chimera states in globally coupled systems // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114, no. 3. P. 034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.034101.
6. *Laing C. R.* Chimeras in networks with purely local coupling // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 92, no. 5. P. 050904. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.050904.
7. *Laing C. R.* Chimeras in networks of planar oscillators // *Phys. Rev. E*. 2010. Vol. 81, no. 6. P. 066221. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.066221.
8. *Zakharova A., Kapeller M., Schöll E.* Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112, no. 15. P. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101.
9. *Omelchenko I., Zakharova A., Hövel P., Siebert J., Schöll E.* Nonlinearity of local dynamics promotes multi-chimeras // *Chaos*. 2015. Vol. 25, no. 8. P. 083104. DOI: 10.1063/1.4927829.
10. *Omelchenko I., Omelchenko O. E., Hövel P., Schöll E.* When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: Patched synchrony or multichimera states // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110, no. 22. P. 224101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.224101.
11. *Sakaguchi H.* Instability of synchronized motion in nonlocally coupled neural oscillators // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73, no. 3. P. 031907. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.031907.
12. *Hizanidis J., Kanas V., Bezerianos A., Bountis T.* Chimera states in networks of nonlocally coupled Hindmarsh–Rose neuron models // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014. Vol. 24, no. 3. P. 1450030. DOI: 10.1142/S0218127414500308.
13. *Zakharova A.* Chimera Patterns in Networks: Interplay between Dynamics, Structure, Noise, and Delay. Berlin: Springer, 2020. 233 p. DOI: 10.1007/978-3-030-21714-3.
14. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // *УМН*. 2015. Т. 70, № 3(423). С. 3–76. DOI: 10.4213/rm9659.
15. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Периодические режимы двухкластерной синхронизации в полносвязных генных сетях // *Дифференциальные уравнения*. 2016. Т. 52, № 2. С. 157–176. DOI: 10.1134/S0374064116020035.
16. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004. 408 с.
17. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2010. 400 с.
18. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 535 с.

References

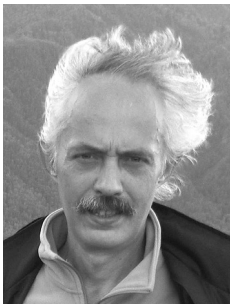
1. Kuramoto Y, Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002;5(4):380–385.
2. Abrams DM, Strogatz SH. Chimera states for coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2004;93(17):174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
3. Panaggio MJ, Abrams DM. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*. 2015;28(3):R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67.

4. Sethia GC, Sen A. Chimera states: The existence criteria revisited. *Phys. Rev. Lett.* 2014;112(14):144101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144101.
5. Schmidt L, Krischer K. Clustering as a prerequisite for chimera states in globally coupled systems. *Phys. Rev. Lett.* 2015;114(3):034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.034101.
6. Laing CR. Chimeras in networks with purely local coupling. *Phys. Rev. E.* 2015;92(5):050904. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.050904.
7. Laing CR. Chimeras in networks of planar oscillators. *Phys. Rev. E.* 2010;81(6):066221. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.066221.
8. Zakharova A, Kapeller M, Schöll E. Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks. *Phys. Rev. Lett.* 2014;112(15):154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101.
9. Omelchenko I, Zakharova A, Hövel P, Siebert J, Schöll E. Nonlinearity of local dynamics promotes multi-chimeras. *Chaos.* 2015;25(8):083104. DOI: 10.1063/1.4927829.
10. Omelchenko I, Omelchenko OE, Hövel P, Schöll E. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: Patched synchrony or multichimera states. *Phys. Rev. Lett.* 2013;110(22):224101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.224101.
11. Sakaguchi H. Instability of synchronized motion in nonlocally coupled neural oscillators. *Phys. Rev. E.* 2006;73(3):031907. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.031907.
12. Hizanidis J, Kanas V, Bezerianos A, Bountis T. Chimera states in networks of nonlocally coupled Hindmarsh–Rose neuron models. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2014;24(3):1450030. DOI: 10.1142/S0218127414500308.
13. Zakharova A. *Chimera Patterns in Networks: Interplay between Dynamics, Structure, Noise, and Delay.* Berlin: Springer; 2020. 233 p. DOI: 10.1007/978-3-030-21714-3.
14. Glyzin SD, Kolesov AY, Rozov NK. Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons. *Russian Mathematical Surveys.* 2015;70(3):383–452. DOI: 10.1070/RM2015v070n03ABEH004951.
15. Glyzin SD, Kolesov AY, Rozov NK. Periodic two-cluster synchronization modes in completely connected genetic networks. *Differential Equations.* 2016;52(2):157–176. DOI: 10.1134/S0012266116020038.
16. Kolesov AY, Rozov NK. *Invariant Tori of Nonlinear Wave Equations.* Moscow: Fizmatlit; 2004. 408 p. (in Russian).
17. Mishchenko EF, Sadovnichii VA, Kolesov AY, Rozov NK. *Autowave Processes in Nonlinear Media with Diffusion.* Moscow: Fizmatlit; 2010. 400 p. (in Russian).
18. Daleckiĭ JL, Krein MG. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space.* Providence: American Mathematical Society; 2002. 386 p.



Глызин Дмитрий Сергеевич — родился в Ярославле (1983), окончил Ярославский государственный университет (2004). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2006). Область научных интересов: нелинейная динамика, математическое моделирование.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
 Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
 E-mail: glyzin@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-0701-622X
 AuthorID: 749418



Глызин Сергей Дмитриевич — родился в Новгородской области (1957), окончил Ярославский государственный университет (1979). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ВГУ (1991) и доктора физико-математических наук в НИЯУ МИФИ (2009) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей. Опубликовал более 100 научных работ. Приказом Министерства образования и науки награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования». Зам. главного редактора научного журнала «Моделирование и анализ информационных систем».

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, glyzin.s@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6403-4061
AuthorID: 35140



Колесов Андрей Юрьевич — родился в городе Старый Оскол Белгородской области (1961), окончил Ярославский государственный университет (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1988) и доктора (1991) физико-математических наук в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН в области дифференциальных уравнений и динамических систем. Профессор кафедры дифференциальных уравнений. Опубликовал более 200 научных работ, среди которых 6 монографий.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru
ORCID: 0000-0001-5066-0881
AuthorID: 5544