



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2)

Научная статья  
УДК 517.9, 535.8  
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207

### Локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью

Е. В. Григорьева<sup>1</sup>, С. А. Кащенко<sup>2</sup> ✉

<sup>1</sup>Белорусский государственный экономический университет, Минск, Республика Беларусь

<sup>2</sup>Региональный научно-образовательный математический центр

при Ярославском государственном университете имени П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: grigorieva@tut.by, ✉kasch@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 10.01.2022, принята к публикации 16.02.2022, опубликована 31.03.2022

**Аннотация.** Цель. Исследуется локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью. Рассматривается система уравнений, описывающая динамику замкнутой цепочки большого числа лазеров с оптоэлектронной запаздывающей связью между элементами. Предложена эквивалентная распределенная интегродифференциальная модель с малым параметром, обратно пропорциональным количеству лазеров в цепочке. Для распределенной модели с периодическими краевыми условиями получено критическое значение коэффициента связи, при котором стационарное состояние в цепочке становится неустойчивым. Показано, что в определенной окрестности точки бифуркации число корней характеристического уравнения с близкой к нулю действительной частью неограниченно возрастает при уменьшении малого параметра. В этом случае в качестве нормальной формы построено двумерное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с конвекцией. Его нелокальная динамика определяет поведение решений исходной краевой задачи. **Методы исследования.** Используются методы изучения локальной динамики, основанные на построении нормальных форм на центральных многообразиях, применительно к критическим случаям (асимптотически) бесконечной размерности. Предложен алгоритм сведения исходной краевой задачи к уравнению для медленно меняющихся амплитуд. **Результаты.** Получены простейшие однородные периодические решения уравнения Гинзбурга–Ландау и соответствующие им неоднородные решения в виде бегущих волн в распределенной модели. Такие решения можно интерпретировать как режимы фазовой синхронизации в цепочке связанных лазеров. Определены частоты и амплитуды колебаний интенсивности излучения каждого лазера и разность фаз между соседними осцилляторами.

**Ключевые слова:** бифуркационный анализ, волновые структуры, запаздывание, динамика лазеров.

**Благодарности.** Работа С. А. Кащенко поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

**Для цитирования:** Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 189–207.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Local dynamics of laser chain model with optoelectronic delayed unidirectional coupling

E. V. Grigorieva<sup>1</sup>, S. A. Kashchenko<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup>Belarus State Economic University, Minsk, Republic of Belarus

<sup>2</sup>Regional Scientific and Educational Mathematical Center  
of the Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

E-mail: grigorieva@tut.by, ✉kasch@uniyar.ac.ru

Received 10.01.2022, accepted 16.02.2022, published 31.03.2022

**Abstract.** *Purpose.* The local dynamics of the laser chain model with optoelectronic delayed unidirectional coupling is investigated. A system of equations is considered that describes the dynamics of a closed chain of a large number of lasers with optoelectronic delayed coupling between elements. An equivalent distributed integro-differential model with a small parameter inversely proportional to the number of lasers in the chain is proposed. For a distributed model with periodic edge conditions, the critical value of the coupling coefficient is obtained, at which the stationary state in the chain becomes unstable. It is shown that in a certain neighborhood of the bifurcation point, the number of roots of the characteristic equation with a real part close to zero increases indefinitely when the small parameter decreases. In this case, a two-dimensional complex Ginzburg–Landau equation with convection is constructed as a normal form. Its nonlocal dynamics determines the behavior of the solutions of the original boundary value problem. *Research methods.* Methods for studying local dynamics based on the construction of normal forms on central manifolds are used as applied to critical cases of (asymptotically) infinite dimension. An algorithm for reducing the original boundary value problem to the equation for slowly varying amplitudes is proposed. *Results.* The simplest homogeneous periodic solutions of Ginzburg–Landau equation and corresponding to them inhomogeneous solutions in the form of traveling waves in a distributed model are obtained. Such solutions can be interpreted as phase locking regimes in the chain of coupled lasers. The frequencies and amplitudes of oscillations of the radiation intensity of each laser and the phase difference between adjacent oscillators are determined.

**Keywords:** bifurcation analysis, wave structures, delay, laser dynamics.

**Acknowledgements.** The work of S. A. Kashchenko was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-30011).

**For citation:** Grigorieva EV, Kashchenko SA. Local dynamics of laser chain model with optoelectronic delayed unidirectional coupling. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(2):189–207.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Кооперативные эффекты в природных сообществах и в технических устройствах являются предметом постоянных активных исследований. Описание разнообразных проявлений синхронизации в ансамблях связанных осцилляторов, базовые модели и классификация функций связей приведены, например, в [1, 2]. Отмечалось, что в процессах функционирования многих сетей неустраняемым фактором может быть запаздывание вследствие конечности скорости распространения и преобразования сигналов между элементами. Особенности динамики сетей, обусловленные наличием временных задержек в линиях связи, обсуждались в обзоре [3]. Многие теоретические результаты были получены на основе локального анализа модели связанных фазовых осцилляторов [4] или метода сведения к отображениям при импульсной функции связи. В том числе были показаны возможность индуцированной запаздыванием мультистабильности синхронных режимов [5], формирование бегущих волн в замкнутом кольце осцилляторов [6, 7], кластерных состояний [8], вымирания колебаний из-за наличия запаздывающих связей [9] при учете амплитудно-фазового взаимодействия.

Особое внимание привлекают системы связанных лазеров в связи с перспективными приложениями таких сетей в фотонике и информационных технологиях [10]. Наиболее детально исследовалась динамика небольшого числа связанных лазеров. Оптическая связь осуществляется посредством взаимной (или однонаправленной) инжекции генерируемого излучения в активную среду лазеров. В этом случае благодаря симметричной связи сообщалось о полной синхронизации генерации двух полупроводниковых лазеров при расстройке их оптических частот [12]. В работе [11] продемонстрирована локализованная синхронизация (с различной амплитудой) колебаний интенсивности излучения двух неидентичных лазеров с несимметричной силой взаимной связи. Задачи надежной стабилизации излучения большого числа оптически связанных лазерных диодов рассматривались в работе [13].

Оптоэлектронная связь обычно осуществляется посредством модуляции тока накачки одного лазера в соответствии с изменениями интенсивности генерируемого излучения другого (других) лазера (лазеров). В работе [14] показано, что в модели двух лазеров, связанных через накачку, наблюдались синхронизация колебаний, резонансные эффекты и динамический хаос даже при отсутствии запаздывания. В работе [15] численно показана возможность синхронизации хаоса в двух лазерах на микрочипах  $\text{Nd:YVO}_4$  или в двухмодовом лазере [16]. Роль запаздывания в цепи связи двух лазерных диодов экспериментально изучалась в работе [17]. В работах [18, 19] рассматривалась модель с двумя взаимно связанными идентичными лазерами при условии различных времен запаздывания в цепях связи. Наблюдался квазипериодический сценарий перехода к хаосу при изменении задержки и показана возможность подавления колебаний в случае наличия собственной запаздывающей обратной связи для каждого лазера. Расширение области устойчивой синхронизации колебаний в малых сетях лазеров при наличии собственной обратной связи отмечалось и в [20]. Рассматривались также модели динамики большого числа связанных лазеров. Численное исследование коллективных эффектов в цепочке, содержащей до 50 связанных полупроводниковых лазеров с насыщающимся поглотителем, работающих в режиме коротких пульсаций под действием аддитивного шума, представлено в работе [21]. Продемонстрирована устойчивая временная синхронизация моментов импульсов и синхронизация по амплитуде импульсов.

В настоящей работе исследуется локальная динамика большого числа связанных лазеров методом построения нормализованной краевой задачи. Определены критические значения параметров, при которых стационарная генерация (состояние равновесия) становится неустойчивой. Установлено соответствие между решениями квазинормальной формы и решениями исходной системы для связанных лазеров в закритической области параметров.

Материал статьи изложен следующим образом.

В части 1 обсуждается модель замкнутой (в кольцо) цепочки на основе скоростных уравнений для отдельного лазера. Связь предполагается однонаправленной, осуществляется через ток накачки. Выбор оптоэлектронной связи позволяет избежать сложности, связанной с моделированием многократных отражений и динамики фазы электрического поля, которые играют решающую роль при рассмотрении когерентной оптической связи. Число лазеров в цепочке предполагается большим.

Предложена распределенная интегродифференциальная модель, содержащая малый параметр, обратно пропорциональный числу лазеров в цепочке. В части 2 приводятся результаты анализа устойчивости состояния равновесия распределенной модели. Показано, что при стремлении малого параметра к нулю число корней характеристического уравнения с близкой к нулю действительной частью стремится к бесконечности. Получены критические значения коэффициента связи, частоты и волновые числа возникающих бегущих волн в линеаризованной системе.

В части 3 построены решения нелинейной системы в виде рядов по степеням малого параметра. Для амплитуды первого члена разложения получена краевая задача с периодическими граничными условиями — двумерное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с конвекцией. Исходя из решения этой квазинормальной формы находятся последовательно все остальные члены ряда, то есть строится решение исходной нелинейной системы с заданной точностью. Приводится пример простейших периодических решений квазинормальной формы и соответствующих бегущих волн в исходной интегродифференциальной модели.

О методике исследования. Отличительной особенностью рассматриваемых здесь задач является тот факт, что критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия имеют бесконечную размерность. Стандартные методы изучения, основанные на применении теории интегральных инвариантных многообразий и теории нормальных форм, оказываются непосредственно неприменимы. В работах [22–26] был разработан метод построения квазинормальных форм для бесконечномерных критических случаев. В настоящей работе этот метод эффективно применяется при изучении распределенных лазерных систем.

### 1. Модель цепочки лазеров с однонаправленными связями

В качестве базовой модели динамики отдельного элемента цепочки — лазера — выбрана стандартная система скоростных уравнений для плотности фотонов  $u(t)$  и инверсии населенностей активной среды  $y(t)$  в двухуровневом приближении [27],

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vu(y - 1), \\ \dot{y} &= q - y(1 + u), \end{aligned} \quad (1)$$

где точкой обозначена производная функции по времени  $t$ , которое нормировано на время релаксации инверсии населенностей;  $v$  — отношение скорости затухания фотонов в резонаторе к скорости релаксации населенностей; потери резонатора нормированы к единице,  $q$  — нормированная скорость накачки.

Отметим, что при  $q < 1$  (малая скорость накачки) все решения системы (1) стремятся к единственному устойчивому состоянию равновесия с нулевой плотностью излучения,  $u = 0$ , что соответствует режиму отсутствия генерации излучения. С увеличением скорости накачки до значений  $q > 1$  нулевое состояние становится неустойчивым и появляется устойчивое ненулевое состояние равновесия, соответствующее режиму стационарной генерации. При отклонении начальных условий от стационара могут наблюдаться слабо затухающие колебания с частотой  $\omega_R = \sqrt{v(q - 1)} + O(v^{-1})$ , что типично для многих твердотельных и полупроводниковых лазеров при достаточно большом значении  $v$  [27].

Рассмотрим цепочку лазеров, связь между которыми реализуется оптоэлектронными средствами так, что скорость накачки каждого лазера зависит от плотности излучения одного соседнего лазера. Модель цепочки, замкнутой в кольцо, с однонаправленной связью принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= vu_j(y_j - 1), \\ \dot{y}_j &= q - y_j(1 + u_j) - \gamma u_{j+1}(t - T), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$  — номер лазера в цепочке и выполнены условия  $(2N+1)$ -периодичности по индексу  $j$ :  $u_{j \pm (2N+1)} = u_j$ ; слагаемое  $\gamma u_{j+1}(t - T)$  описывает влияние на накачку  $j$ -го лазера в текущий момент времени  $t$  интенсивности излучения соседнего лазера в момент  $(t - T)$ ;

$\gamma$  — коэффициент связи между лазерами, который может принимать как положительные, так и отрицательные небольшие значения  $|\gamma| < 1$ ;  $T > 0$  — время задержки сигнала в оптоэлектронной цепи связи, которое может варьироваться от пренебрежимо малых до больших значений; аргументы других функций  $u_j, y_j$ , если не указаны, соответствуют текущему значению  $t$ .

Модель (2) цепочки с однонаправленными связями можно рассмотреть как частный случай более общей модели ансамбля лазеров, каждый из которых связан со всеми через ток накачки,

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= v u_j (y_j - 1), \\ \dot{y}_j &= q - y_j (1 + u_j) - \gamma \sum_{l=-N}^N (2N + 1)^{-1} g_{lj} u_{j+l} (t - T), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $g_{lj}$  — коэффициенты, определяющие силу связей, причем  $\sum_{l=-N}^N (2N + 1)^{-1} g_{lj} = 1$ . Предполагаем, что  $g_{lj}$  зависят от расстояния между элементами так, что чем больше расстояние, то есть модуль разности индексов  $|l - j|$ , тем меньше сила связи. Тогда для замкнутой цепочки с однонаправленной связью все  $g_{lj}$  близки к нулю, кроме коэффициентов  $g_{1j}$ , и выполнены условия  $(2N + 1)$ -периодичности по индексу  $j$ .

В настоящей работе рассмотрим цепочку, количество элементов в которой является достаточно большим,  $N \gg 1$ , а затем введем параметр  $\varepsilon = 2\pi(2N + 1)^{-1}$ , для которого выполнено условие

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4)$$

Параметр  $\varepsilon$  можно интерпретировать как расстояние между лазерами в цепочке длиной  $2\pi$ . Тогда значение функций  $u_j(t), y_j(t)$  можно ассоциировать со значением функций двух переменных  $u(t, x), y(t, x)$ , соответственно, в точках некоторой окружности с фазовыми координатами  $x_j = \varepsilon j$ . Условие (4) дает основание перейти от системы (3) к непрерывной пространственно распределенной системе для  $u(t, x), y(t, x)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= v u (y - 1), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= q - y(1 + u) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} F(s) u(t - T, x + s) ds \end{aligned} \quad (5)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x), \quad (6)$$

где  $F(s)$  — функция Гаусса,

$$F(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(s - \varepsilon)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(s) ds = 1. \quad (7)$$

Интегральное слагаемое в системе (5) обобщает соответствующие дискретные выражения, описывающие связь между элементами в уравнениях (3). Для модели цепочки с однонаправленной связью с соседним элементом удобно выбрать  $F(s)$  в виде функции Гаусса по нескольким причинам.

Во-первых, функция (7) описывает ситуацию, при которой элемент цепочки в точке  $x$  наиболее сильно связан с элементом в точке  $x + \varepsilon$ , а сила связи между другими элементами

цепочки экспоненциально уменьшается с увеличением расстояния между ними. Действительно, для каждой фиксированной функции  $W(x)$  при  $\sigma \rightarrow 0$  имеет место асимптотическое равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s)W(x+s)ds = W(x+\varepsilon) + o(1). \quad (8)$$

Параметр  $\sigma$  характеризует ширину пространственной области эффективного взаимодействия элементов. Эту область в непрерывной модели естественно выбрать меньше, чем расстояние  $\varepsilon$  между лазерами в дискретной модели цепочки. Поэтому далее вместо  $\sigma$  будем рассматривать параметр  $\varepsilon^2\sigma \ll 1$ . Во-вторых, использование интеграла по бесконечному промежутку для  $2\pi$ -периодической функции удобнее, чем интеграла по периоду  $2\pi$  для более сложных функций. В-третьих, рассматриваемая связь удобна для аналитического исследования, поскольку точно вычисляются соответствующие интегралы от экспоненциальных функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s) \exp(iks) ds = \exp(ik\varepsilon) \exp(-\sigma^2\varepsilon^4 k^2/2). \quad (9)$$

Таким образом, далее будем исследовать решения интегродифференциальной системы (5), (6) с бесконечномерным фазовым пространством  $C_{[0,2\pi]}(R^2) \times C_{[-T,0]}(R^2)$ .

## 2. Анализ устойчивости состояния равновесия

Система (5), (6) при  $q > 1$  имеет однородное ненулевое состояние равновесия  $u(x, t) \equiv u_s$ ,  $y(x, t) \equiv y_s$ , где

$$u_s = \frac{q-1}{1+\gamma}, \quad y_s = 1. \quad (10)$$

Для исследования устойчивости состояния равновесия (10) удобно в системе (5), (6) перейти к малым отклонениям от равновесных значений  $\Delta u = u - u_s$  и  $\Delta y = y - y_s$ . В результате, опуская префикс « $\Delta$ », переходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= vy(u_s + u), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -y(1 + u_s + u) - u - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t-T, x+s)ds \end{aligned} \quad (11)$$

с периодическими граничными условиями

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t, x), \quad y(t, x+2\pi) \equiv y(t, x). \quad (12)$$

Рассмотрим далее задачу о локальной динамике системы (11), (12) при  $t \rightarrow \infty$  и при малых  $\varepsilon$  с начальными условиями из некоторой достаточно малой и независимой от  $\varepsilon$  окрестности нуля. Поведение решений этой краевой задачи во многом определяется поведением решений линеаризованной системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= vu_s y, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -y(1 + u_s) - u - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t-T, x+s)ds. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом граничных условий (12) решения линейной системы (13) ищем в виде

$$u = u_k \exp(ikx + \lambda_k t), \quad y = y_k \exp(ikx + \lambda_k t), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогда для нахождения значений  $\lambda = \lambda_k$  получим характеристическое уравнение

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & vu_s \\ -1 - \gamma g(z) \exp(-\lambda T) & -1 - u_s - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 + (1 + u_s)\lambda + vu_s [1 + \gamma g(z) \exp(-\lambda T)] = 0, \quad (14)$$

где  $g(z) = \exp(iz - \sigma^2 \varepsilon^2 z^2 / 2)$ ,  $z = \varepsilon k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Справедливы следующие утверждения общего характера.

**Утверждение 1.** Пусть при всех  $z \in (-\infty, \infty)$  все корни уравнения (14) имеют отрицательные вещественные части. Тогда все решения краевой задачи (12), (13) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и независимой от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

При этом условии задача о локальной динамике нелинейной системы (11), (12) тривиальна.

**Утверждение 2.** Пусть найдется такое  $z_0$ , что при  $z = z_0$  уравнение (14) имеет корень с положительной вещественной частью. Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  нулевое решение в (12), (13) неустойчиво и в малой его окрестности не существует аттракторов этой краевой задачи.

В условии этого Утверждения задача о динамике системы (11), (12) становится нелокальной.

**2.1. Критический случай при  $\sigma = 0$ .** Рассмотрим критический случай в задаче об устойчивости периодического состояния равновесия. Пусть характеристическое уравнение (14) при всех  $z \in (-\infty, \infty)$  не имеет корней с положительной вещественной частью и пусть существует такое  $z_0$ , что при  $z = z_0$  это уравнение имеет корень с нулевой вещественной частью.

Положив сначала в (14) формально  $\sigma = 0$ , приходим к уравнению

$$\lambda^2 + (1 + u_s)\lambda + vu_s = vu_s \gamma \exp(iz - \lambda T). \quad (15)$$

Выделим для (15) критический случай, когда есть корень  $\lambda = i\omega$  и нет корней с положительной вещественной частью. Введем многочлен

$$P(\omega) = -\omega^2 + i\omega(1 + u_s) + vu_s,$$

и пусть

$$\min_{\omega} |P(\omega)|^2 = |P(\omega_0)|^2.$$

При нахождении минимума  $|P(\omega)|^2$  приходим к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно  $\gamma$ ,

$$(q + \gamma)^2 [4v(q - 1)(1 + \gamma) - (q + \gamma)^2] - 4[v(q - 1)\gamma(1 + \gamma)]^2 = 0. \quad (16)$$

Действительный корень  $\gamma_0$  уравнения (16) определяет коэффициент связи, при котором стационарное решение теряет устойчивость. Расчеты показывают, что существуют два таких корня  $\gamma_0^{\pm}$ ,



положительный и отрицательный, удовлетворяющие физическому требованию для коэффициента связи  $|\gamma_0^\pm| < 1$ . Далее будем указывать верхние индексы  $\pm$  критических параметров в случае необходимости и опускать их в общем случае.

Значение  $\gamma_0$  определяет частоту колебаний  $\omega_0 = \omega(\gamma_0)$ , где

$$\omega_0^2 = v u_0 - \frac{(1 + u_0)^2}{2}, \quad u_0 = \frac{q - 1}{1 + \gamma_0}. \quad (17)$$

Обозначим фазу  $P(\omega_0)$  в точке экстремума

$$\phi_0 = \arctan \frac{\omega_0(1 + u_0)}{v u_0 - \omega_0^2} \quad (18)$$

и заметим, что из уравнения (15) следует  $\phi_0^+ + \pi(2n + 1) = z - \omega_0^+ T$  при  $\gamma_0^+ > 0$  или  $\phi_0^- + 2\pi n = z - \omega_0^- T$  при  $\gamma_0^- < 0$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Следующее утверждение определяет условия возникновения критических случаев для характеристического уравнения (14).

**Лемма 1.** *Характеристическое уравнение (14) имеет решение  $\lambda = i\omega_0^+$  при  $\gamma = \gamma_0^+$  и  $z = z_n^+ = \phi_0^+ + \pi(2n + 1) + \omega_0^+ T$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а также решение  $\lambda = i\omega_0^-$  при  $\gamma = \gamma_0^-$  и  $z = z_n^- = \phi_0^- + 2\pi n + \omega_0^- T$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*

Поскольку значения параметра  $z = \varepsilon k$  связаны с волновыми числами  $k$  решений вида  $\exp(ikx + i\omega t)$  линеаризованной системы, то критическое значение  $z$  определяет «центральное» волновое число  $k \sim z_n \varepsilon^{-1}$  тех мод, которые возбуждаются при потере устойчивости стационарного состояния. Волновые числа  $k$  должны быть целыми в силу периодических краевых условий, поэтому введем поправку  $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ , которая дополняет величину  $z_0 \varepsilon^{-1}$  до целого числа. Тогда в закритической области линейная система имеет решения вида  $\exp(ik_{mn}x + i\omega_0 t)$  с волновыми числами  $k_{mn}$  из множества целых чисел  $K_\varepsilon$ , которые можно представить в виде:

$$K_\varepsilon = \{z_0 \varepsilon^{-1} + \theta + 2\pi n \varepsilon^{-1} + m, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (19)$$

где  $2\pi n \varepsilon^{-1} = (2N + 1)n$  — целое число,  $z_0 = \phi_0^+ + \pi + \omega_0^+ T$  при  $\gamma = \gamma_0^+ > 0$  или  $z_0 = \phi_0^- + \omega_0^- T$  при  $\gamma = \gamma_0^- < 0$ .

Введение поправки  $\theta$ , дополняющей волновое число до целого, влечет за собой отклонение параметра  $z$  от критического  $z_0$  и частоты  $\omega$  от  $\omega_0$  в критическом случае. Соответствующие поправки приведены в следующем пункте.

**2.2. Критический случай при  $\sigma \neq 0$ .** Здесь получим асимптотическое представление корней характеристического уравнения (14), которым отвечают собственные функции  $\exp(ik_{mn}x + \lambda t)$  линеаризованной системы с волновыми числами из множества целых чисел  $K_\varepsilon$ , определенных в (19).

Учтем также  $\sigma \neq 0$  и малое отклонение параметра связи от критического значения  $\gamma_0$  на величину порядка  $\varepsilon^2$ , то есть положим в уравнении (14)

$$\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_1, \quad (20)$$

при этом в (14) значение  $u_s$  представляется в виде  $u_s = u_0 - \varepsilon^2 \gamma_1 u_0 (1 + \gamma_0)^{-1} + O(\varepsilon^4)$ .



Для тех корней  $\lambda = \lambda_{mn}(\varepsilon)$ ,  $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , выполнено асимптотическое равенство:

$$\begin{aligned}\lambda_{mn} &= i\omega_0 + \varepsilon\lambda_{mn1} + \varepsilon^2\lambda_{mn2} + \dots, \\ \lambda_{mn1} &= i\delta(\theta + m), \\ \lambda_{mn2} &= -\delta_2(\theta + m)^2 - \delta\sigma^2(z_0 + 2\pi n)^2/2 - \gamma_1\delta_3,\end{aligned}\tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1 + u_0}{2 + T(1 + u_0)}, \quad \delta > 0, \\ \delta_2 &= \delta[(1 - \delta T)^2/2 + \delta^2(vu_0\gamma_0)^{-1}e^{-i\phi_0}], \\ \delta_3 &= \delta[(1 + i\omega_0v^{-1})e^{-i\phi_0} - 1](\gamma_0 + \gamma_0^2)^{-1}.\end{aligned}$$

Для последующей интерпретации результатов нужно отметить, что  $\varepsilon\lambda_{mn1}$  — чисто мнимая величина, которая является поправкой к основной частоте  $\omega_0$  при волновом числе  $k_{mn}$ .

Из разложения (21) следует, что при  $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2\gamma_1$  существует бесконечно много корней характеристического уравнения (14), вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Таким образом, специфика рассматриваемой задачи состоит в том, что критические случаи имеют бесконечную размерность.

**2.3. Решения линеаризованной системы (13).** Каждому характеристическому корню  $\lambda_{mn}(\varepsilon)$  отвечает частное решение линеаризованной системы (13)

$$\begin{pmatrix} u_{mn} \\ y_{mn} \end{pmatrix} = [a_0 + \varepsilon(m + \theta)a_1]\xi_{mn} \exp(ik_{mn}x + \lambda_{mn}t),\tag{22}$$

где  $\xi_{mn}$  — амплитуда моды, определяемая начальными условиями, и

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ r(1 + \delta\omega_0^{-1}) \end{pmatrix}, \quad r = \frac{i\omega_0}{vu_0}.$$

Общим решением линейной краевой задачи (12), (13) является совокупность найденных частных решений,

$$\begin{pmatrix} u(t, x, \varepsilon) \\ y(t, x, \varepsilon) \end{pmatrix} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} [a_0 + \varepsilon(m + \theta)a_1]\xi_{mn} \exp(ik_{mn}x + \lambda_{mn}t).\tag{23}$$

Это решение можно записать в следующем виде, учитывая разложения (21) для характеристических корней  $\lambda_{mn} = i\omega_0 - \varepsilon i\delta(\theta + m) + O(\varepsilon^2)$  и выражения для волновых чисел  $k_{mn}$ ,

$$\begin{pmatrix} u(t, x, \varepsilon) \\ y(t, x, \varepsilon) \end{pmatrix} = e^{iR} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} [(a_0 + \varepsilon\theta a_1) + \varepsilon m a_1] \xi_{mn} e^{(imX + inY + O(\varepsilon^2)t)},\tag{24}$$

где использованы обозначения:  $R = \kappa x + \Omega t$  — бегущая переменная,  $\kappa = z_0\varepsilon^{-1} + \theta$  — главное волновое число,  $\Omega = \omega_0 + \varepsilon\delta\theta$  — основная частота, и введены переменные  $X = x + \varepsilon\delta t$  и  $Y = 2\pi\varepsilon^{-1}x$ .

Заметим, что выражение

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \xi_{mn} e^{(imX+inY)}$$

можно рассматривать как разложение Фурье для функции  $\xi(X, Y)$ , которая  $2\pi$ -периодична по обоим “квази”пространственным переменным,  $\xi(X, Y) = \xi(X + 2\pi, Y)$ ,  $\xi(X, Y) = \xi(X, Y + 2\pi)$ . Учитывая, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} im \xi_{mn} e^{(imX+inY)},$$

решение (24) линеаризованной системы можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \left[ (a_0 + \varepsilon a_1 \theta) \xi - \varepsilon i a_1 \frac{\partial \xi}{\partial X} \right] e^{iR} e^{O(\varepsilon^2)t} + c.c. \quad (25)$$

### 3. Асимптотики решений нелинейной системы (11)

Решение нелинейной краевой задачи (11), (12) при  $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_1$  будем искать, используя решение (25) линеаризованной системы и предполагая, что амплитуды  $\xi_{mn}$  медленно меняются со временем.

Введем функцию  $\xi(\tau, X, Y)$ , которая зависит от медленной временной переменной  $\tau = \varepsilon^2 t$  и которая  $2\pi$ -периодична по пространственным переменным  $X, Y$ . Тогда решение  $u(t, x, \tau, X, Y)$  и  $y(t, x, \tau, X, Y)$  нелинейной краевой задачи (11), (12) представим в виде ряда по степеням  $\varepsilon$

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \left[ (a_0 + \varepsilon a_1 \theta) \xi - \varepsilon i a_1 \frac{\partial \xi}{\partial X} \right] e^{iR} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} u_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \dots + c.c. \quad (26)$$

Здесь функции

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_2 &= \varepsilon^2 (u_{20} + u_{22} e^{i2R} + c.c.), \quad \varepsilon^2 y_2 = \varepsilon^2 (y_{20} + y_{22} e^{i2R} + c.c.), \\ \varepsilon^3 u_3 &= \varepsilon^3 (u_{31} e^{iR} + u_{32} e^{i2R} + u_{33} e^{i3R} + c.c.), \quad \dots \end{aligned}$$

обозначают величины второго, третьего и т.д. порядка по степеням  $\varepsilon$  и амплитуды  $u_{2j}(\tau, X, Y)$ ,  $y_{2j}(\tau, X, Y)$ , ... гармоник основной частоты так же, как и  $\xi(\tau, X, Y)$ , медленно зависят от времени и являются  $2\pi$ -периодичными по пространственным переменным  $X, Y$ .

Подставим (20) и ряды (26) в нелинейную систему (11). Вспомогательные ряды для производных и интегрального слагаемого приведены в приложении. Собираем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и гармониках основной частоты. При этом последовательно находятся медленные амплитуды:

$$u_{20} = 0, \quad y_{20} = 0, \quad (27)$$

$$u_{22} = C \frac{r}{u_0} \xi^2, \quad y_{22} = (2rC - 1) \frac{r}{u_0} \xi^2, \quad (28)$$

где

$$C = \frac{1 + 2i\omega_0}{4i\omega_0 r + 2r(1 + u_0) + 1 + \gamma_0 e^{2i\phi_0}}.$$

Для разрешимости соответствующей системы относительно  $u_{31}, y_{31}$  должно быть выполнено условие существования. Последнее приводит к следующему комплексному уравнению для функции  $\xi(\tau, X, Y)$ :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \alpha \xi + L \xi |\xi|^2 + v_X \frac{\partial \xi}{\partial X} + v_Y \frac{\partial \xi}{\partial Y} + D_X \frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + D_Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial Y^2}, \quad (29)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, X, Y) = \xi(\tau, X + 2\pi, Y), \quad \xi(\tau, X, Y) = \xi(\tau, X, Y + 2\pi), \quad (30)$$

где

$$\alpha = \gamma_1 \delta_3, \quad L = \frac{i\omega_0(i\omega_0 + 1)(rC - 1)}{u_0^2(2i\omega_0 + 1 + u_0 - T\gamma_0 v u_0 e^{i\phi_0})}$$

$$v_X = -2i\delta_2\theta, \quad v_Y = -2i\delta_2\pi\sigma^2, \quad D_X = \delta_2, \quad D_Y = \delta\sigma^2 2\pi^2$$

и выражения для  $\delta, \delta_2, \delta_3$  приведены в (21). Отметим, что коэффициент  $\alpha$  при линейном члене уравнения (29) определяется величиной параметра надкритичности  $\gamma_1$ , причем  $\text{Re } \alpha > 0$ , если  $\gamma_0^+ > 0$  и  $\gamma_1 > 0$  ( $\gamma_0^- < 0$  и  $\gamma_1 < 0$ ). Коэффициенты переноса  $v_X$  и диффузии  $D_X$  при пространственных производных в уравнении (29) являются комплексными и определяются только критическими значениями параметров. Коэффициенты  $v_Y$  и  $D_Y$  определяются параметром  $\sigma$ , который описывает ширину области эффективной связи между элементами кольца лазеров. Используя выражения для  $\delta$  и  $\delta_2$ , можно показать, что коэффициенты диффузии имеют положительную действительную часть:

$$\text{Re } D_X = \delta \frac{8\omega_0^2}{(2 + T(1 + u_0))^2(\omega_0^2 + (1 + u_0)^2/2)} > 0, \quad \text{Re } D_Y = 2\pi^2\sigma^2\delta > 0,$$

поэтому уравнение (29) описывает диссипативную систему.

Краевая задача (29), (30) играет роль нормальной формы: ее нелокальная динамика определяет, при достаточно малых  $\varepsilon$ , поведение всех решений нелинейного уравнения (11) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия. По самому построению краевой задачи (29), (30) следует связь между ее решениями и решениями уравнения (11), что устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие  $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2\gamma_1$  и пусть краевая задача (29), (30) имеет решение  $\xi_0(\tau, X, Y)$ , ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty$  и  $X \in (0, 2\pi], Y \in (0, 2\pi]$ . Тогда функции

$$u(t, x) = \varepsilon \xi_0(\varepsilon^2 t, x + \varepsilon \delta t, 2\pi \varepsilon^{-1} x) e^{i(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta)x + i\omega_0 t} + c.c.,$$

$$y(t, x) = \varepsilon r \xi_0(\varepsilon^2 t, x + \varepsilon \delta t, 2\pi \varepsilon^{-1} x) e^{i(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta)x + i\omega_0 t} + c.c. \quad (31)$$

удовлетворяют уравнению (11) с точностью до  $O(\varepsilon^2)$ .

**3.1. Периодические решения краевой задачи (29), (30).** Краевая задача (29), (30) является двумерным комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау с конвекцией [28].

Здесь рассмотрим простейшие решения при типичных для лазеров класса В значениях параметров.

В квазинормальной форме (29), (30) имеются слагаемые с коэффициентами, зависящими от параметра  $\sigma$ . Последний характеризует размер области эффективного пространственного

взаимодействия между элементами распределенной модели кольца (5). Дискретной модели (3) цепочки лазеров с однонаправленной связью наиболее естественно будет соответствовать квазинормальная форма (29), (30) с параметром  $\sigma \rightarrow 0$ , тогда коэффициенты  $v_Y, D_Y \rightarrow 0$  и приходим к квазинормальной форме для функции  $\xi(\tau, X)$ , зависящей от одной пространственной переменной,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \alpha \xi + L \xi |\xi|^2 + v_X \frac{\partial \xi}{\partial X} + D_X \frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2}, \\ \xi(\tau, X) &= \xi(\tau, X + 2\pi). \end{aligned} \quad (32)$$

Простейшим решением квазинормальной формы (32) является однородное в пространстве и периодическое во времени решение

$$\xi_0(\tau, X) = \rho e^{i\omega_2 \tau + i\psi}, \quad (33)$$

где

$$\rho^2 = -\frac{\operatorname{Re} \alpha}{\operatorname{Re} L}, \quad \omega_2 = \operatorname{Im} \alpha + \rho^2 \operatorname{Im} L$$

и  $\psi$  — начальная фаза колебаний, определяемая начальными условиями. Коэффициент при нелинейном слагаемом в уравнении (32) является ляпуновской величиной, определяющей направление бифуркации. Известно, что при  $\operatorname{Re} L < 0$  имеет место суперкритическая бифуркация, в результате которой возникает устойчивый цикл малой амплитуды в закритической области  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ . При  $\operatorname{Re} L > 0$  имеет место субкритическая бифуркация, в результате которой образуется неустойчивый цикл в докритической области  $\operatorname{Re} \alpha < 0$ . Тогда в исходной системе возможно наблюдение бистабильности режимов: при малых отклонениях начальных условий от стационара система остается устойчивой или, при достаточно больших отклонениях, уходит к другому аттрактору.

Однородному по пространственной переменной решению (33) уравнения (32) соответствует неоднородное решение уравнения (13) в виде устойчивой бегущей волны с волновым числом  $\kappa = z_0 \varepsilon^{-1} + \theta$ :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= 2\varepsilon \rho \cos(\kappa x + (\omega_0 + \varepsilon \delta \theta + O(\varepsilon^2))t) + O(\varepsilon^2), \\ y(t, x) &= 2\varepsilon \frac{\omega_0}{v u_0} \rho \sin(\kappa x + (\omega_0 + \varepsilon \delta \theta + O(\varepsilon^2))t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (34)$$

причем в силу целого значения  $\kappa$  удовлетворены условия  $u(t, x) = u(t, x + 2\pi)$  и  $y(t, x) = y(t, x + 2\pi)$ .

В свою очередь, неоднородное решение (34) соответствует устойчивому режиму фазовой синхронизации цепочки связанных лазеров. Каждый элемент цепочки (лазер) испытывает колебания интенсивности излучения с одинаковой для всех элементов амплитудой и частотой со сдвигом фазы на величину  $z_0 + O(\varepsilon)$  относительно соседнего элемента,  $u_j(t) = u(t, \varepsilon j)$ .

Приведем пример расчета решений в виде бегущей волны при следующих значениях параметров: скорость накачки  $q = 1.5$ , скорость затухания фотонов в резонаторе  $v = 100$ , запаздывание в цепи оптоэлектронной связи  $T = 0.2$  и пусть в цепочке связаны 63 лазера, тогда  $\varepsilon = 2\pi/63 = 0.09973$ . Отметим, что значение  $\varepsilon$  нужно вычислять с высокой точностью, чтобы при большом волновом числе были удовлетворены периодические граничные условия. Учитывая, что параметр  $v$  принимает достаточно большие значения в случае лазеров класса В, можно использовать оценочные формулы для коэффициентов квазинормальной формы (32). Из уравнения (16) находим критические значения коэффициента связи между лазерами:

$$\gamma_0^\pm = \pm \frac{q}{\sqrt{v(q-1)}} + O(v^{-1}). \quad (35)$$

Этим значениям коэффициентов связи соответствуют частоты возникающих бегущих волн, сопоставимые с частотой затухающих колебаний  $\omega_R = \sqrt{v(q-1)}$  для уединенного лазера,

$$\omega_0^\pm = \omega_R \pm \frac{q}{2} + O(v^{-1}) \quad (36)$$

в окрестности (неустойчивого) стационарного состояния

$$u_0^\pm = q - 1 \pm \frac{q\sqrt{q-1}}{\sqrt{v}} + O(v^{-1}). \quad (37)$$

Комплексный коэффициент диффузии представляется как

$$D_X^\pm = \frac{2(1 + u_0^\pm) - 4i(1 + u_0^\pm)^2/\omega_0^\pm}{[2 + T(1 + u_0^\pm)]^3} + O(v^{-1}), \quad (38)$$

откуда следует, что коэффициент диффузии всегда имеет положительную действительную часть и уменьшается по модулю с увеличением запаздывания в цепи связи  $T$ . Для ляпуновской величины, определяющей направление бифуркации, получаем

$$L^\pm = \frac{-5q \pm i(\sqrt{v}q \pm 6\sqrt{v(q-1)})}{18(u_0^\pm)^2[2 + T(1 + u_0^\pm)]^3} + O(v^{-1/2}), \quad (39)$$

откуда следует, что  $\text{Re } L^\pm < 0$  в случае большого  $v$ , что справедливо для лазеров класса В.

Получаем для положительного значения критического уровня коэффициента связи  $\gamma_0^+ = 0.219$ , частота  $\omega_0^+ = 6.327$ , параметр  $\theta^+ = 0.332$ , центральное волновое число  $\kappa^+ = 59$ , коэффициент диффузии  $D_X^+ = 0.234 + 0.026i$ , ляпуновская величина  $L^+ = -1.059 - 6.274i$ , параметр надкритичности  $\alpha^+ = 2.719 - 2.286i$  при  $\gamma_1 = 1$ , амплитуда цикла  $\rho^+ = 0.764$ , частота возникающих колебаний с учетом поправки на целое волновое число  $\omega^+ = 6.347$ . На рис. 1 показано мгновенное распределение интенсивности излучения  $u_j$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots, 31$  лазеров в цепочке относительно равновесного уровня  $u_s$ , где  $u_j = u(\varepsilon j, 0)$  согласно формуле (34). Разность фаз между соседними элементами цепочки составляет  $z_0^+ + O(\varepsilon) \approx 5.87$ . С течением времени по кольцу циркулирует бегущая волна.

Для отрицательного значения критического уровня коэффициента связи  $\gamma_0^- = -0.204$ , частота возникающих колебаний равна  $\omega_0^- = 7.843$ , разность фаз между соседними элементами цепочки  $z_0^- = 3.04$ , параметр  $\theta^- = 0.64$ , центральное волновое число  $\kappa^- = 31$ , коэффициент диффузии  $D_X^- = 0.256 + 0.027i$ , ляпуновская величина  $L^- = -0.484 - 2.436i$ , параметр надкритичности  $\alpha^- = -3.526 - 4249i$  при  $\gamma_1 = 1$ , амплитуда цикла  $\rho^- = 1.202$ , частота колебаний с учетом поправки на целое волновое

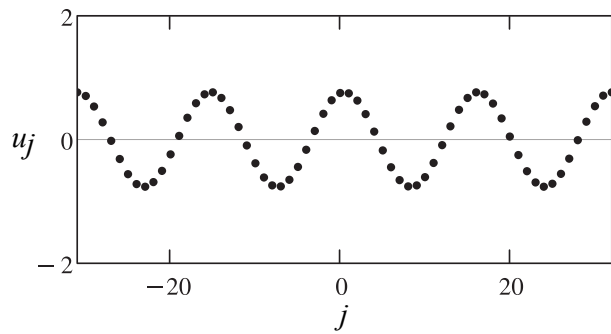


Рис. 1. Мгновенное распределение интенсивности излучения  $u_j$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots, 31$  лазеров в цепочке относительно равновесного уровня  $u_s$  при  $\gamma = \gamma_0^+ - \varepsilon^2 = 0.229$ . Разность фаз между колебаниями соседних элементов цепочки  $z_0^+ = 5.87$

Fig. 1. Instantaneous distribution of radiation intensity  $u_j$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots, 31$  of lasers in the chain with respect to the equilibrium level  $u_s$  at  $\gamma = \gamma_0^+ - \varepsilon^2 = 0.229$ . Phase difference between oscillations of adjacent elements of the chain  $z_0^+ = 5.87$

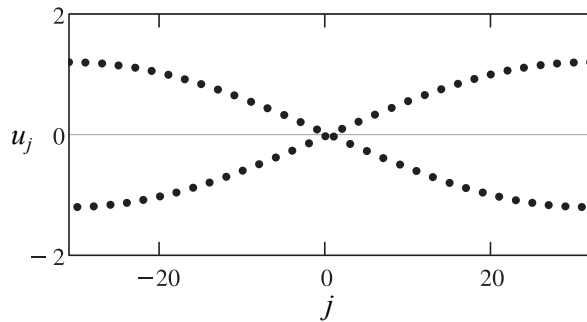


Рис. 2. Мгновенное распределение интенсивности излучения  $u_j$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots, 31$  лазеров в цепочке относительно равновесного уровня  $u_s$  при  $\gamma = \gamma_0^- + \varepsilon^2 = -0.214$ . Разность фаз между колебаниями соседних элементов цепочки  $z_0^- = 3.04$

Fig. 2. Instantaneous distribution of radiation intensity  $u_j$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots, 31$  of lasers in the chain with respect to the equilibrium level  $u_s$  at  $\gamma = \gamma_0^- - \varepsilon^2 = -0.214$ . Phase difference between oscillations of adjacent elements of the chain  $z_0^- = 3.04$

число  $\omega^- = 7.89$ . На рис. 2 показано мгновенное распределение интенсивности излучения  $u_j$ ,  $j=0, \pm 1, \dots, 31$  лазеров в цепочке относительно равновесного уровня  $u_s$ . Поскольку разность фаз колебаний интенсивности соседних лазеров близка к  $\pi$ , то можно наблюдать живущие некоторое время полосатые структуры.

Отметим, что комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау может иметь и другие нестационарные неоднородные решения, включая диффузионный хаос, которые рассматривались ранее во многих работах, например в [28]. Тогда и решения распределенной модели цепочки могут быть существенно сложнее. Требуются дополнительные исследования с учетом конвекции, присутствующей в нормализованном уравнении, устойчивости возможных режимов, что представляется предметом отдельного исследования.

### Заключение

В настоящей работе предложена распределенная интегродифференциальная модель с запаздывающим аргументом для описания динамики цепочки лазеров в случае, если число элементов является достаточно большим.

В результате линейного анализа распределенной модели с учетом малого параметра, обратно пропорционального числу лазеров в цепочке, получены критические значения коэффициента связи, при которых стационарное состояние в цепочке становится неустойчивым. Показано, что в определенной окрестности точки бифуркации число корней характеристического уравнения с близкой к нулю действительной частью неограниченно возрастает при уменьшении малого параметра. Предложен алгоритм сведения исходной краевой задачи к уравнению для медленно меняющихся амплитуд применительно к критическим случаям (асимптотически) бесконечной размерности. Получено двумерное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с конвекцией и с периодическими граничными условиями в качестве нормальной формы. Его нелокальная динамика определяет поведение решений исходной краевой задачи.

Получены простейшие однородные периодические решения уравнения Гинзбурга–Ландау и соответствующие им неоднородные решения в виде бегущих волн в распределенной модели. Такие решения можно интерпретировать как режимы фазовой синхронизации в цепочке связанных лазеров. Определены частоты и амплитуды колебаний интенсивности излучения каждого лазера и разность фаз между соседними осцилляторами.

### Приложение

#### Вспомогательные ряды для построения нормальной формы

Приведем вспомогательные выражения для слагаемых в уравнении (11). Поскольку  $\tau = \varepsilon^2 t$  и  $X = x - \varepsilon \delta t$ , то  $\xi'_t = \varepsilon^2 \xi'_\tau - \varepsilon \delta \xi'_X$ . Далее, принимая во внимание выражения для  $a_0$  и  $a_1$ ,

получаем разложения в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$  для производных по времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \varepsilon e^{iR} i \omega_0 \xi + \varepsilon^2 \left[ e^{iR} (\omega_0 + \delta) (\xi'_X + i \theta \xi) + e^{i2R} (i 2 \omega_0) u_{22} \right] + \\ & + \varepsilon^3 e^{iR} \left[ (\xi'_\tau + i \delta \xi''_{XX} + 2 \delta \theta \xi'_X + i \delta \theta^2 \xi) + i \omega_0 u_{31} \right] + \\ & + \varepsilon^3 i \delta (u_{20})'_X + \varepsilon^3 e^{i2R} i \delta [(2 \theta u_{22} + (u_{22})'_X)] + \varepsilon^4 \dots + c.c. \end{aligned} \quad (40)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} = & \varepsilon e^{iR} r i \omega_0 \xi + \varepsilon^2 \left[ e^{iR} r (i \theta (\omega_0 + 2 \delta) \xi \omega_0 \xi'_X) + e^{i2R} (2 i \omega_0) y_{22} \right] + \\ & + \varepsilon^3 e^{iR} \left[ -i \delta (1 + \delta \omega^{-1}) (i \omega_0 \xi'_\tau + \xi''_{XX} - \theta^2 \xi) + i \omega_0 y_{31} \right] + \\ & + \varepsilon^3 i \delta (y_{20})'_X + \varepsilon^3 e^{i2R} i \delta [(2 \theta y_{22} + (y_{22})'_X)] + \varepsilon^4 \dots + c.c. \end{aligned} \quad (41)$$

Нелинейные слагаемые в системе представляются в виде ряда

$$\begin{aligned} uv = & \varepsilon^2 e^{2iR} r \xi^2 + \varepsilon^3 \delta (|\xi|^2)'_X + \\ & + \varepsilon^3 e^{iR} [\xi (y_{20} + r u_{20}) + \bar{\xi} (y_{22} - r u_{22})] + \\ & + \varepsilon^3 e^{2iR} (\delta + 2 \omega_0) (\xi \xi'_X + i \theta \xi^2) + \varepsilon^3 e^{3iR} \dots + c.c. \end{aligned} \quad (42)$$

Для разложения в ряд интегрального слагаемого в системе (11) воспользуемся равенством (9) и разложением функции

$$\begin{aligned} u(t - T, x + s) = & \sum_{m,n} \varepsilon (1 + \varepsilon (m + \theta)) \xi_{mn} e^{ik_{mn}(x+s) + i(\omega_0 + \varepsilon \delta (m + \theta))(t - T)} + \\ & + \varepsilon^2 (u_{20} + e^{i2R} u_{22}) + \varepsilon^3 (e^{iR} u_{31} + \dots) + c.c. \end{aligned}$$

Учтем, что значения амплитуд гармоник, зависящих от медленного времени  $\tau = \varepsilon^2 t$ , берем в момент  $\varepsilon^2 (t - T)$ , тогда

$$\xi_{mn}(\tau - \varepsilon^2 T) = \xi_{mn} - \varepsilon^2 T (\xi_{mn})'_\tau + \dots$$

Получаем разложение

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) u(t - T, x + s) ds = & \varepsilon e^{iR} r \xi + \\ & + \varepsilon^2 e^{iR} e^{i\phi_0} (r_1 \xi + r_2 \xi'_X) + \varepsilon^2 u_{20} + \varepsilon^2 e^{2iR} e^{2i\phi_0} u_{22} (1 + \varepsilon^2 \dots) + \\ & + \varepsilon^3 e^{iR} e^{i\phi_0} (-T \xi'_\tau + r_3 \xi'_X + r_4 \xi'_Y + r_5 \xi + r_6 \xi''_{XX} + r_7 \xi''_{YY}) + \\ & + \varepsilon^3 e^{iR} e^{i\phi_0} u_{31} + \dots + c.c., \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\phi_0 = z_0 - \omega_0 T$  и

$$\begin{aligned} r_1 = & i \theta (1 + T \delta - i), \quad r_2 = (1 + T \delta - i), \\ r_3 = & i \theta (1 + T \delta) (1 + T \delta - 2i), \quad r_4 = 2i \pi \sigma^2 z_0, \\ r_5 = & -[z_0^2 \sigma^2 + \theta^2 (1 + T \delta) (1 + T \delta - 2i)] / 2, \\ r_6 = & (1 + T \delta) (1 + T \delta - 2i) / 2, \quad r_7 = 2\pi^2 \sigma^2. \end{aligned}$$



Подставим (20) и ряды (40)–(43) в нелинейную систему (11) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и гармониках основной частоты.

Коэффициенты при  $\varepsilon e^{iR}$  в первом и втором уравнении системы (11) дают верные равенства при критических значениях параметров,

$$\xi \left( \omega^2 - (1 + u_0) i \omega_0 - v u_0 \xi - \gamma_0 v u_0 \exp(i\phi_0) \right) = 0.$$

На втором шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^2 e^{iR}$  в первом уравнении также получаем верные равенства при критических параметрах, которые приводить не будем. Собирая коэффициенты при  $\varepsilon^2 e^0$ , приходим к системе,

$$0 = v u_0 y_{20}, \quad 0 = -(1 + u_0) y_{20} - u_{20} - \gamma_0 u_{20},$$

откуда имеем  $y_{20} = 0$ ,  $u_{20} = 0$ .

Собирая коэффициенты при  $\varepsilon^2 e^{2iR}$ , приходим к системе, из которой находим  $u_{22} = C(r/u_0) \xi^2$ ,  $y_{22} = (2rC - 1)(r/u_0) \xi^2$ , где

$$C = \frac{1 + 2i\omega_0}{4i\omega_0 r + 2r(1 + u_0) + 1 + \gamma_0 e^{2i\phi_0}}.$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^3 e^0$ , приходим к системе, из которой можно исключить амплитуды  $u_{31}$ ,  $y_{31}$ , умножая первое уравнение на  $(i\omega_0 + 1 + u_0)$  и второе на  $v u_0$ , затем складывая эти уравнения. Для разрешимости системы необходимо, чтобы функция  $\xi$  удовлетворяла уравнению (29) для функции  $\xi(\tau, X, Y)$ .

## Список литературы

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. *Stankovski T., Pereira T., McClintock P. V. E., Stefanovska A.* Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms // *Rev. Mod. Phys.* 2017. Vol. 89, no. 4. P. 045001. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.045001.
3. *Клиньшов В. В., Некоркин В. И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // *УФН.* 2013. Т. 183, № 12. С. 1323–1336. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323.
4. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
5. *Schuster H. G., Wagner P.* Mutual entrainment of two limit cycle oscillators with time delayed coupling // *Progress of Theoretical Physics.* 1989. Vol. 81, no. 5. P. 939–945. DOI: 10.1143/PTP.81.939.
6. *Perlikowski P., Yanchuk S., Popovych O. V., Tass P. A.* Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 82, no. 3. P. 036208. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.036208.
7. *Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Wolfrum M., D’Huys O., Nekorkin V.* Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, no. 4. P. 042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
8. *Dahms T., Lehnert J., Schöll E.* Cluster and group synchronization in delay-coupled networks // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 86, no. 1. P. 016202. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016202.
9. *Ramana Reddy D. V., Sen A., Johnston G. L.* Experimental evidence of time-delay induced death in coupled limit-cycle oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, no. 16. P. 3381–3384. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3381.

10. Soriano M. C., García-Ojalvo J., Mirasso C. R., Fischer I. Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductor lasers // *Rev. Mod. Phys.* 2013. Vol. 85, no. 1. P. 421–470. DOI: 10.1103/RevModPhys.85.421.
11. Hohl A., Gavrielides A., Erneux T., Kovanis V. Localized synchronization in two coupled nonidentical semiconductor lasers // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, no. 25. P. 4745–4748. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4745.
12. Wünsche H.-J., Bauer S., Kreissl J., Ushakov O., Korneyev N., Henneberger F., Wille E., Erzgräber H., Peil M., Elsässer W., Fischer I. Synchronization of delay-coupled oscillators: A study of semiconductor lasers // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94, no. 16. P. 163901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.163901.
13. Otten J., Müller J., Mönningmann M. Bifurcation-aware optimization and robust synchronization of coupled laser diodes // *Phys. Rev. E.* 2018. Vol. 98, no. 6. P. 062212. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.062212.
14. Carra T. W., Taylor M. L., Schwartz I. B. Negative-coupling resonances in pump-coupled lasers // *Physica D.* 2006. Vol. 213, no. 2. P. 152–163. DOI: 10.1016/j.physd.2005.10.015.
15. Uchida A., Matsuura T., Kinugawa S., Yoshimori S. Synchronization of chaos in microchip lasers by using incoherent feedback // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65, no. 6. P. 066212. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.066212.
16. Uchida A., Mizumura K., Yoshimori S. Chaotic dynamics and synchronization in microchip solid-state lasers with optoelectronic feedback // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 74, no. 6. P. 066206. DOI: 10.1103/PhysRevE.74.066206.
17. Kim M.-Y., Roy R., Aron J. L., Carr T. W., Schwartz I. B. Scaling behavior of laser population dynamics with time-delayed coupling: Theory and experiment // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94, no. 8. P. 088101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.088101.
18. Vicente R., Tang S., Mulet J., Mirasso C. R., Liu J.-M. Dynamics of semiconductor lasers with bidirectional optoelectronic coupling: Stability, route to chaos, and entrainment // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70, no. 4. P. 046216. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.046216.
19. Vicente R., Tang S., Mulet J., Mirasso C. R., Liu J.-M. Synchronization properties of two self-oscillating semiconductor lasers subject to delayed optoelectronic mutual coupling // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73, no. 4. P. 047201. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.047201.
20. Schwartz I. B., Shaw L. B. Isochronal synchronization of delay-coupled systems // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, no. 4. P. 046207. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.046207.
21. Perego A. M., Lamperti M. Collective excitability, synchronization, and array-enhanced coherence resonance in a population of lasers with a saturable absorber // *Phys. Rev. A.* 2016. Vol. 94, no. 3. P. 033839. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.033839.
22. Каценко С. А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // Доклады Академии наук СССР. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1052.
23. Kaschenko S. A. Normalization in the systems with small diffusion // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
24. Каценко С. А. Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31, № 3. С. 467–473.
25. Grigorieva E. V., Haken H., Kaschenko S. A. Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // *Optics Communications.* 1999. Vol. 165, no. 4–6. P. 279–292. DOI: 10.1016/S0030-4018(99)00236-9.
26. Kashchenko S. A. Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain // *Chaos.* 2021. Vol. 31, no. 3. P. 033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
27. Ханнин Я. И. Основы динамики лазеров. М.: Наука, 1999. 368 с.

28. *Akhromeyeva T. S., Kurdyumov S. P., Malinetskii G. G., Samarskii A. A.* Nonstationary dissipative structures and diffusion-induced chaos in nonlinear media // *Phys. Rep.* 1989. Vol. 176, no. 5–6. P. 189–370. DOI: 10.1016/0370-1573(89)90001-X.

## References

1. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. Stankovski T, Pereira T, McClintock PVE, Stefanovska A. Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms. *Rev. Mod. Phys.* 2017;89(4):045001. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.045001.
3. Klinshov VV, Nekorkin VI. Synchronization of delay-coupled oscillator networks. *Phys. Usp.* 2013;56(12):1217–1229. DOI: 10.3367/UFNe.0183.201312c.1323.
4. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag; 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
5. Schuster HG, Wagner P. Mutual entrainment of two limit cycle oscillators with time delayed coupling. *Progress of Theoretical Physics.* 1989;81(5):939–945. DOI: 10.1143/PTP.81.939.
6. Perlikowski P, Yanchuk S, Popovych OV, Tass PA. Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators. *Phys. Rev. E.* 2010;82(3):036208. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.036208.
7. Klinshov V, Shchapin D, Yanchuk S, Wolfrum M, D’Huys O, Nekorkin V. Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring. *Phys. Rev. E.* 2017;96(4):042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
8. Dahms T, Lehnert J, Schöll E. Cluster and group synchronization in delay-coupled networks. *Phys. Rev. E.* 2012;86(1):016202. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016202.
9. Ramana Reddy DV, Sen A, Johnston GL. Experimental evidence of time-delay induced death in coupled limit-cycle oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2000;85(16):3381–3384. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3381.
10. Soriano MC, García-Ojalvo J, Mirasso CR, Fischer I. Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductor lasers. *Rev. Mod. Phys.* 2013;85(1):421–470. DOI: 10.1103/RevModPhys.85.421.
11. Hohl A, Gavrielides A, Erneux T, Kovanis V. Localized synchronization in two coupled nonidentical semiconductor lasers. *Phys. Rev. Lett.* 1997;78(25):4745–4748. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4745.
12. Wünsche HJ, Bauer S, Kreissl J, Ushakov O, Korneyev N, Henneberger F, Wille E, Erzgräber H, Peil M, Elsässer W, Fischer I. Synchronization of delay-coupled oscillators: A study of semiconductor lasers. *Phys. Rev. Lett.* 2005;94(16):163901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.163901.
13. Otten J, Müller J, Mönnigmann M. Bifurcation-aware optimization and robust synchronization of coupled laser diodes. *Phys. Rev. E.* 2018;98(6):062212. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.062212.
14. Carra TW, Taylor ML, Schwartz IB. Negative-coupling resonances in pump-coupled lasers. *Physica D.* 2006;213(2):152–163. DOI: 10.1016/j.physd.2005.10.015.
15. Uchida A, Matsuura T, Kinugawa S, Yoshimori S. Synchronization of chaos in microchip lasers by using incoherent feedback. *Phys. Rev. E.* 2002;65(6):066212. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.066212.
16. Uchida A, Mizumura K, Yoshimori S. Chaotic dynamics and synchronization in microchip solid-state lasers with optoelectronic feedback. *Phys. Rev. E.* 2006;74(6):066206. DOI: 10.1103/PhysRevE.74.066206.
17. Kim MY, Roy R, Aron JL, Carr TW, Schwartz IB. Scaling behavior of laser population dynamics with time-delayed coupling: Theory and experiment. *Phys. Rev. Lett.* 2005;94(8):088101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.088101.

18. Vicente R, Tang S, Mulet J, Mirasso CR, Liu JM. Dynamics of semiconductor lasers with bidirectional optoelectronic coupling: Stability, route to chaos, and entrainment. *Phys. Rev. E.* 2004;70(4):046216. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.046216.
19. Vicente R, Tang S, Mulet J, Mirasso CR, Liu JM. Synchronization properties of two self-oscillating semiconductor lasers subject to delayed optoelectronic mutual coupling. *Phys. Rev. E.* 2006;73(4):047201. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.047201.
20. Schwartz IB, Shaw LB. Isochronal synchronization of delay-coupled systems. *Phys. Rev. E.* 2007;75(4):046207. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.046207.
21. Perego AM, Lamperti M. Collective excitability, synchronization, and array-enhanced coherence resonance in a population of lasers with a saturable absorber. *Phys. Rev. A.* 2016;94(3):033839. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.033839.
22. Kashchenko SA. On quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion. *Soviet Mathematics. Doklady.* 1988;37(2):510–513.
23. Kaschenko SA. Normalization in the systems with small diffusion. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1996;6(6):1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
24. Kashchenko SA. Asymptotic form of spatially non-uniform structures in coherent nonlinear optical systems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1991;31(3):97–102.
25. Grigorieva EV, Haken H, Kaschenko SA. Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback. *Optics Communications.* 1999;165(4–6):279–292. DOI: 10.1016/S0030-4018(99)00236-9.
26. Kashchenko SA. Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain. *Chaos.* 2021;31(3): 033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
27. Khanin YI. *Fundamentals of Laser Dynamics.* Cambridge: Cambridge International Science Publishing; 2006. 361 p.
28. Akhromeyeva TS, Kurdyumov SP, Malinetskii GG, Samarskii AA. Nonstationary dissipative structures and diffusion-induced chaos in nonlinear media. *Phys. Rep.* 1989;176(5–6):189–370. DOI: 10.1016/0370-1573(89)90001-X.



*Григорьева Елена Викторовна* — родилась в 1957 году, окончила Белорусский государственный университет (1979). Работала в институте физики АН БССР, БГУ, в настоящий момент работает в БГЭУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в БГУ (2004) в области нелинейной динамики лазерных систем. Опубликовала более 100 научных и научно-методических трудов.

Республика Беларусь, 220070 Минск, Партизанский пр., 26  
 Белорусский государственный экономический университет  
 E-mail: grigorieva@tut.by  
 AuthorID: 24668



*Кащенко Сергей Александрович* — родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, первый проректор ЯрГУ. Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В. В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е. В. Григорьевой). Опубликовал более 250 научных работ и 8 монографий.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14  
 Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова  
 E-mail: kasch@uniyar.ac.ru  
 ORCID: 0000-0002-8777-4302  
 AuthorID: 8238