



УДК 537.86; 001.891.573; 51.73; 621.376.9

Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсным воздействием

М. А. Мищенко, Н. С. Жукова, В. В. Матросов

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: mischenko@neuro.nnov.ru, natalizhukova29@gmail.com, matrosov@rf.unn.ru
Автор для переписки Мищенко Михаил Андреевич, mischenko@neuro.nnov.ru
Поступила в редакцию 26.02.2018, принята к публикации 11.05.2018

Предмет исследования. Возбудимые динамические системы - системы, которые находясь в состоянии покоя, способны в ответ на достаточно слабое воздействие генерировать колебание большой амплитуды, возвращаясь далее в состояние покоя. Исследование таких динамических систем является на сегодняшний день одной из наиболее интересных и актуальных проблем современной науки. В настоящей работе исследуется динамика модели системы фазовой автоподстройки частоты с полосовым фильтром в цепи управления и при внешнем импульсном воздействии. **Новизна.** Исследована возбудимость фазоуправляемого генератора под воздействием прямоугольных импульсов. Определены параметры импульсного воздействия, необходимые для появления колебаний большой амплитуды (надпорогового отклика). **Методы исследования.** Качественная теория динамических систем и численное моделирование, базирующиеся на методах теории нелинейных колебаний. **Полученные результаты.** Исследована модель фазоуправляемого генератора на основе системы фазовой синхронизации, находящегося в возбудимом состоянии. Проведен анализ состояний равновесия автономной модели; показано, что состояния равновесия существуют только при значении параметра $\gamma = 0$; множество таких состояний – континуум, и все они негрубые. Установлено, что структура поверхности гиперболических переменных зависит от значений фазовой переменной φ ; определен диапазон φ , где эта поверхность устойчива, а состояния равновесия определяют устойчивый стационарный режим генератора. Исследована возбудимость генератора под воздействием прямоугольных импульсов. Установлено, что возникающие колебания качественно похожи на импульсные и пачечные колебания мембранного потенциала нейрона. Определена амплитуда стимула, необходимая для появления на генераторе надпорогового отклика, сопоставимого по амплитуде с известными автоколебательными режимами. Показано, что требуемая амплитуда существенно зависит от начальных условий. Обнаружено, что на появление отклика генератора оказывает влияние не только амплитуда стимулирующего импульса, но и его длительность. При этом ключевым фактором является площадь стимулирующего воздействия, которая может быть результатом

воздействия нескольких импульсов. **Выводы.** Рассматриваемый фазоуправляемый генератор является возбудимой динамической системой, способной демонстрировать отклик на внешнее импульсное воздействие, аналогичный нейроимпульсам. Система фазовой автоподстройки частоты с полосовым фильтром может рассматриваться в качестве модели нейроподобного генератора.

Ключевые слова: фазоуправляемый генератор, возбуждение колебаний, импульсная стимуляция, возбудимая система.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-6-19>

Образец цитирования: Мищенко М.А., Жукова Н.С., Матросов В.В. Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсным воздействием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 5. С. 6–19. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-6-19>

Excitability of neuron-like generator under pulse stimulation

M. A. Mishchenko, N. S. Zhukova, V. V. Matrosov

National research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
23, Gagarin ave., 603950 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: mischenko@neuro.nnov.ru, natalizhukova29@gmail.com, matrosov@rf.unn.ru
Correspondence should be addressed to Mishchenko Mikhail. A., mischenko@neuro.nnov.ru
Received 26.02.2018, accepted for publication 11.05.2018

Subject of the study. Excitable dynamic systems are the systems having a stable equilibrium and capable of generating a large amplitude response to a weak stimulation. Excitable dynamic systems research is one of the most interesting and actual problems of modern nonlinear science. In the present paper dynamics of phase-locked loop with bandpass filter is studied under external pulse stimulation. **Novelty.** Excitability of the phase-controlled generator is studied under external pulse stimulation. The parameters of stimulation to excite a large amplitude response (super-threshold response) are found. **Methods.** Qualitative theory of dynamic systems, numerical simulations based on nonlinear oscillations theory. **Results.** The model of phase-controlled generator based on phase-locked loop is studied in excitable state. The analysis of equilibrium states of the autonomic model shows presence of equilibrium only with $\gamma = 0$. The number of the equilibrium is continuum and all of them are non-robust. The structure of hyperbolic manifold depends on phase variable φ . The diapason of φ is found where the manifold is stable and equilibrium states define a stable stationary state of the generator. Excitability of the phase-controlled generator is studied under external pulse stimulation. The super-threshold responses of the generator are qualitatively similar to spikes and bursts of neuron's membrane potential. The amplitude of stimulus required for the appearance of the super-threshold response is determined. The dependence of this amplitude on initial conditions is shown. Both the amplitude and duration of the stimulus have the effect on response appearance and the key factor is the square of the stimulus that could be a sum of several consecutive pulses. **Discussion.** The phase-controlled oscillator is an excitable dynamic system capable to response on external pulse stimulation. These responses are qualitatively similar to spikes and bursts of neuron's membrane potential. The phase-locked loop with bandpass filter could be considered as a neuron-like generator.

Key words: phase-controlled generator, oscillation excitation, pulse stimulation, excitable system.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-6-19>

Reference: Mishchenko M.A., Zhukova N.S., Matrosov V.V. Excitability of neuron-like generator under pulse stimulation. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 5, p. 6–19. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-5-6-19>

Введение

Возбуждаемые динамические системы, находящиеся в отсутствие внешнего воздействия в состоянии покоя и способные в ответ на достаточно слабое воздействие генерировать колебание большой амплитуды и возвращаться в состояние покоя, представляют важный класс динамических систем. Исследование таких динамических систем является на сегодняшний день одной из наиболее интересных и актуальных проблем современной науки.

Под возбуждаемой системой мы будем понимать динамическую систему, имеющую устойчивое состояние равновесия и периодическую псевдоорбиту большой амплитуды, проходящую в окрестности состояния равновесия [1]. Периодическая псевдоорбита представляет собой траекторию большой амплитуды, которая начинается и заканчивается в окрестности состояния равновесия. Термин «псевдо» при этом подчеркивает, что начало и конец траектории не обязательно совпадают. Бифуркационные механизмы, отвечающие за переход из состояния покоя в колебательный режим и обратно, определяют характеристики наблюдаемых колебаний [2, 3].

Характерным примером возбуждаемой динамической системы является нейрон. С точки зрения нелинейной динамики, нейрон представляет собой нелинейную возбуждаемую динамическую систему, способную в зависимости от параметров внешнего воздействия демонстрировать различные динамические режимы. В качестве внешнего возбудителя нейронной сети мозга обычно рассматриваются сенсорные сигналы, которые позволяют адаптировать нейронную активность под текущие внешние условия. Такие процессы лежат в основе многих функций мозга, таких как ассоциативная память, обучение, восприятие, контроль движений и т.д. То, каким образом нейрон отвечает на внешнее воздействие, во многом определяет его вычислительные особенности.

Исследованию нелинейных динамических процессов, лежащих в основе возбуждаемости нейронов, посвящено достаточно большое количество исследований как теоретических, так и экспериментальных. В работах [4, 5] экспериментально исследована возбуждаемость гигантского аксона кальмара в ответ на периодическую импульсную токовую стимуляцию и изучены бифуркационные механизмы перехода от фазовой синхронизации к квазирегулярным и хаотическим откликам. Подобные исследования по импульсной стимуляции проводились и для различных математических моделей нейрона, таких как модель Бонхоффера-ван дер Поля [6, 7], модель ФитцХью-Нагумо [8, 9], модель Ижикевича [10] и модель со сложно-пороговым возбуждением [11, 12]. Для всех моделей исследовались как механизмы возникновения колебаний, так и особенности синхронизации с периодической стимуляцией. Для модели со сложно-пороговым возбуждением также было показано возникновение нескольких откликов в ответ на одиночное воздействие, а также преобразование последовательности из M входных импульсов в N выходных откликов, в том числе и на аналоговой электронной модели [12].

Поскольку нервные клетки большую часть времени находятся в состоянии покоя и генерируют отклик в ответ на входное импульсное воздействие, поступившее от других клеток, то большой интерес представляет подробное изучение механизмов возбуждения колебаний в нейроне, находящемся под импульсным воздействием.

В настоящей работе исследуется динамика фазоуправляемого генератора на основе системы фазовой автоподстройки частоты, предложенного в работе [13] в качестве модели нейроподобного генератора. Наблюдаемые в такой системе импульсные колебания качественно похожи на колебания мембранного потенциала нейрона.

Основное внимание уделено исследованию воздействия прямоугольных импульсов на невозбужденный генератор. Изучены механизмы возникновения отклика генератора на воздействие, влияние параметров импульсной стимуляции и начального состояния генератора.

1. Модель фазоуправляемого генератора

Динамика рассматриваемой модели фазоуправляемого генератора на основе системы фазовой автоподстройки частоты описывается следующей системой дифференциальных уравнений, определенной в цилиндрическом фазовом пространстве ($\varphi \bmod 2\pi, y, z$):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - (1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y, \end{aligned} \quad (1)$$

где φ – текущая разность фаз опорного и подстраиваемого генераторов системы фазовой автоподстройки частоты, y – текущая разность частот, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – параметры инерционности фильтра в цепи управления, γ – начальная частотная расстройка.

Подробное исследование динамики модели (1) представлено в работе [13]. В такой системе при $\gamma \neq 0$ отсутствует состояние равновесия, но существует предельный цикл, который при изменении параметров системы может менять период, кратность и превращаться в хаотический аттрактор. Как установлено в [13], реализующиеся в такой системе режимы качественно отображают некоторые режимы изменения мембранного потенциала нейрона, например, регулярную импульсную активность и пачечные разряды с различным числом импульсов в пачке, а также хаотические импульсные колебания.

Различные режимы в модели (1) можно получить путем изменения параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и γ , в результате чего есть возможность регулировки количества импульсов в пачке, интервалов между пачками, амплитуды импульсов. Разбиение пространства параметров модели (1) на области с различным динамическим поведением представлено в работах [13, 14].

Как указано выше, в модели (1) при $\gamma \neq 0$ отсутствуют состояния равновесия, поскольку производные нигде не обращаются в ноль. Однако при $\gamma = 0$ состояние равновесия возможно. Рассмотрим данный случай подробнее.

2. Состояния равновесия фазоуправляемого генератора

Найдем состояния равновесия системы (1). Приравнивая производные к нулю, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ z &= 0, \\ \frac{\gamma}{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z}{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \frac{(1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y}{\varepsilon_1\varepsilon_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Из системы уравнений (2) при $\gamma = 0$ получаем, что в системе (1) существует непрерывное множество состояний равновесия $(\varphi, 0, 0)$, то есть равновесие возможно при любых значениях φ . Исследуем устойчивость данного множества состояний равновесия, определив значения корней характеристического уравнения.

$$-\lambda \left(\lambda^2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \lambda + \frac{1 + \varepsilon_1 \cos \varphi}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) = 0 \quad (3)$$

Из (3) получаем следующие значения собственных чисел:

$$\lambda_0 = 0,$$

$$\lambda_- = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right)^2 - \frac{4(1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}},$$

$$\lambda_+ = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right)^2 - \frac{4(1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}.$$

Наличие среди корней характеристического уравнения нулевого говорит о том, что существующие состояния равновесия являются негрубыми. Определим знаки действительной части оставшихся корней характеристического уравнения. По теореме Виета, для уравнения (3) корни λ_+ и λ_- будут действительными и иметь разные знаки при условии

$$1 + \varepsilon_1 \cos \varphi < 1.$$

То есть при $\varepsilon_1 > 1$ негрубые состояния равновесия из интервала

$$\pi - \arccos 1/\varepsilon_1 < \varphi < \pi + \arccos 1/\varepsilon_1$$

имеют двумерное седловое многообразие, что соответствует негрубому состоянию равновесия седло-седло, возникающему при слиянии двух седловых состояний. В противном случае корни λ_+ и λ_- будут иметь одинаковый знак действительной части. Поскольку параметры ε_1 и ε_2 строго положительные по их физическому смыслу [13], то выражение $-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/(2\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ принимает только действительные значения и строго отрицательно. Таким образом, действительная часть λ_- и λ_+ будет строго отрицательна, что, учитывая $\lambda_0 = 0$, соответствует негрубому состоянию равновесия, возникающему при слиянии устойчивого фокуса и седло-фокуса с двумерным устойчивым многообразием, или при слиянии устойчивого узла и седла с двумерным устойчивым многообразием.

Таким образом, при $\gamma = 0$ фазоуправляемый генератор, описываемый системой дифференциальных уравнений (1), имеет континуум негрубых состояний равновесия $(\varphi, 0, 0)$, часть из которых, удовлетворяющая условию $-\pi + \arccos 1/\varepsilon_1 < \varphi < \pi - \arccos 1/\varepsilon_1$, имеет двумерное устойчивое многообразие («устойчивый диапазон» φ), а другая часть, удовлетворяющая условию $\pi - \arccos 1/\varepsilon_1 < \varphi < \pi + \arccos 1/\varepsilon_1$, – двумерное седловое многообразие («неустойчивый диапазон» φ). При отсутствии внешнего воздействия по завершении переходных процессов система (1) приходит в одно из негрубых состояний равновесия из устойчивого диапазона φ .

На рис. 1 представлены проекции на плоскость $(\varphi \bmod 2\pi, y)$ фазовых траекторий, соответствующих переходным процессам системы (1) из различных начальных условий, а также осциллограммы $y(\tau)$, соответствующие приведенным фазовым траекториям.

На рис. 1, а траектории, начинающиеся на интервале $\pi - \arccos 1/\varepsilon_1 < \varphi < \pi + \arccos 1/\varepsilon_1$ ($y_0 = 0.01, z_0 = 0$), покидают данный интервал вдоль сепаратрис негрубых седловых состояний, асимптотически приближаясь к негрубым состояниям из устойчивого диапазона φ . Траектории с начальными условиями $\varphi = 0, z_0 = 0, y_0 = 0.15 + 0.125 \cdot N$ ($N = 0 : 4$), изображенные пунктирными кривыми, приближаются к оси φ . При этом, если траектория приближается к оси φ на интервале $\pi - \arccos 1/\varepsilon_1 < \varphi < \pi + \arccos 1/\varepsilon_1$, то она продолжает движение до попадания на устойчивый диапазон, порождая колебание по переменной y .

Проведем численное моделирование процесса возбуждения генератора под воздействием одиночного прямоугольного импульса. Для численного моделирования использовался самостоятельно разработанный программный пакет в среде Matlab. Численное интегрирование дифференциальных уравнений осуществлялось методом Рунге–Кутты 4 порядка с постоянным шагом интегрирования $\Delta\tau = 0.01$.

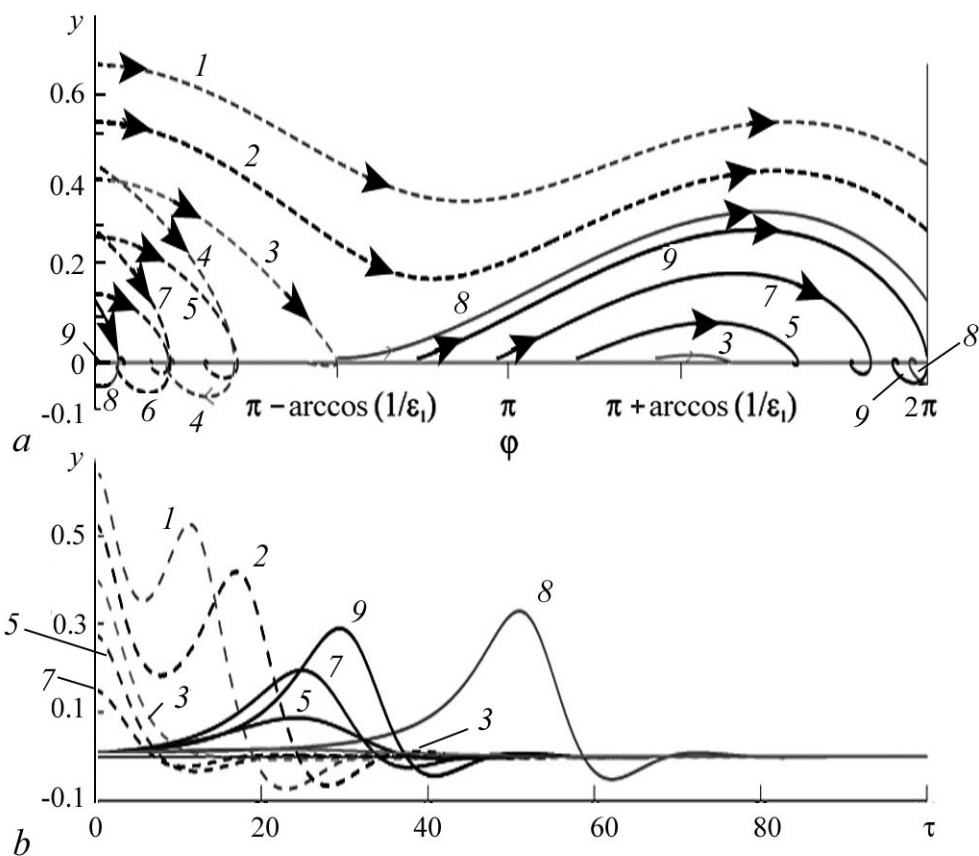


Рис. 1. а – проекции фазовых траекторий переходных процессов системы (1) из различных начальных условий на плоскость $(\varphi \bmod 2\pi, y)$; б – осциллограммы $y(\tau)$, соответствующие приведенным фазовым траекториям

Fig. 1. а – projections onto the $(\varphi \bmod 2\pi, y)$ plane of phase trajectories of system (1) transient processes from different initial conditions; б – oscillograms of $y(\tau)$ of the processes

3. Возбуждение фазоуправляемого генератора

Для того, чтобы траектория покинула состояние равновесия из устойчивого диапазона φ , необходимо оказать воздействие на генератор. Данное воздействие может быть направлено на изменение устойчивости состояния равновесия, что может быть осуществлено путем изменения значений параметров ε_1 или ε_2 , либо на исчезновение данного состояния равновесия, что легко достигается изменением значения параметра γ на отличное от нуля. Далее мы будем рассматривать именно этот способ воздействия.

Положим в качестве модели внешнего воздействия на рассматриваемый генератор временную зависимость параметра γ

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} A_{st}, & \text{если } \tau_0 \leq \tau < \tau_0 + w, \\ 0, & \text{в остальное время,} \end{cases}$$

где A_{st} – амплитуда стимулирующего импульса, τ_0 – момент подачи импульса, w – длительность импульса. То есть для системы (1) $\gamma(\tau)$ всюду равна нулю, кроме промежутка времени $\tau_0 \leq \tau < \tau_0 + w$, где $\gamma = A_{st}$, что соответствует подаче одиночного прямоугольного импульса на невозбужденный генератор.

Исследуем, как влияют параметры стимула на возбуждение генератора (1), а именно, какой должна быть амплитуда и длительность стимулирующего импульса для получения отклика. Надпороговым откликом генератора будем называть одиночное колебание, сравнимое по амплитуде с известными автоколебательными режимами модели (1) и связанное с оборотом траектории вокруг фазового цилиндра. Иллюстрация подпорогового и надпорогового откликов представлена на рис. 2.

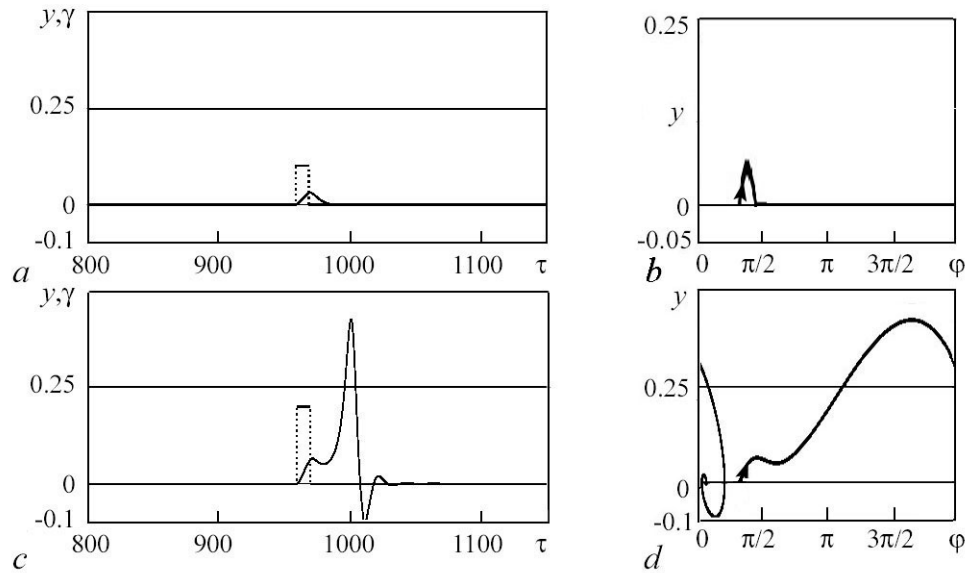


Рис. 2. Иллюстрация подпорогового (a,b) и надпорогового (c,d) отклика системы (1) на стимуляцию одиночным импульсом

Fig. 2. Illustration of sub-threshold (a,b) and supra-threshold (c,d) responses of the system (1) on single pulse stimulation

Здесь показана динамика системы (1) при значении параметров $\varepsilon_1 = 5$ и $\varepsilon_2 = 10$ в ответ на стимуляцию одиночным прямоугольным импульсом $\gamma(\tau)$ длительностью 10 единиц модельного времени. В качестве начальных условий для модели (1) была выбрана точка из устойчивого диапазона негрубых состояний равновесия $(\pi/3, 0, 0)$.

При $\gamma = 0$ система остается в состоянии равновесия до поступления внешнего стимула в момент времени $\tau_0 = 950$. В момент поступления стимула значение параметра γ становится отличным от нуля, что приводит к исчезновению всех состояний равновесия и рождению вращательного аттрактора в фазовом пространстве системы (1), к которому стремится фазовая траектория [13]. Поскольку стимулирующий импульс ограничен по длительности, то по его окончании параметр γ снова обращается в ноль, что приводит к исчезновению вращательного аттрактора и восстановлению континуума негрубых состояний равновесия. Положение изображающей точки в момент окончания стимула определяет дальнейшее поведение фазовой траектории: если изображающая точка находится на устойчивом многообразии негрубого состояния равновесия из устойчивого диапазона (рис. 1), то траектория вернется в состояние равновесия. В этом случае в генераторе наблюдается подпороговый отклик, осциллограмма которого изображена на рис. 2, *a*, полученный при стимуляции прямоугольным импульсом с амплитудой $A_{st} = 0.1$ (пунктирная кривая на рис. 2, *a*). Проекция фазового портрета системы (1) на плоскость $(\varphi \bmod 2\pi, y)$ в случае подпорогового отклика представлена на рис. 2, *b*. В результате действия стимула изображающая точка системы сместилась вправо, ближе к границе устойчивого диапазона негрубых состояний равновесия.

Если по окончании стимула изображающая точка оказалась вне области притяжения состояний равновесия из устойчивого диапазона, то фазовая траектория продолжает движение вдоль неустойчивого многообразия негрубого состояния равновесия типа седло-седло (рис. 1), совершая оборот вокруг цилиндра до тех пор, пока не достигнет состояния равновесия из устойчивого диапазона. В данном случае на выходе генератора наблюдается надпороговый отклик, осциллограмма которого в ответ на стимул с амплитудой $A_{st} = 0.1$ представлена на рис. 2, *c*. Соответствующая проекция фазового пространства на плоскость $(\varphi \bmod 2\pi, y)$ изображена на рис. 2, *d*.

Поскольку при воздействии стимула положительной амплитуды на генератор (1) изображающая точка в фазовом пространстве движется в направлении увеличения переменной φ , от значения которой зависит появление надпорогового отклика, то очевидно, что на возбудимость генератора влияет начальное значение переменной $\varphi(0) = \varphi_0$. Для различных значений φ_0 будет необходима различная амплитуда стимула, позволяющая получить надпороговый отклик. Зависимость минимальной амплитуды A_{st} стимула, вызывающего надпороговый отклик генератора, от координаты φ_0 начального состояния равновесия представлена на рис. 3.

Поскольку появлению надпорогового отклика соответствует попадание фазовой траектории на неустойчивый диапазон переменной φ , где одно из собственных чисел негрубых состояний равновесия имеет положительную действительную часть, то минимальная амплитуда стимула для появления надпорогового отклика тем больше, чем дальше координата начального состояния φ от верхней (на интервале $[-\pi, \pi]$) границы устойчивого диапазона. При $\varepsilon_1 = 5$ и $\varepsilon_2 = 10$ верхняя граница устойчивого диапазона располагается в точке $\varphi \approx 1.773$, что соответствует обращению в ноль корня характеристического уравнения λ_+ . С учетом симметрии устойчивого диапазона негрубых состояний равновесия относительно $\varphi = 0$, максимальная

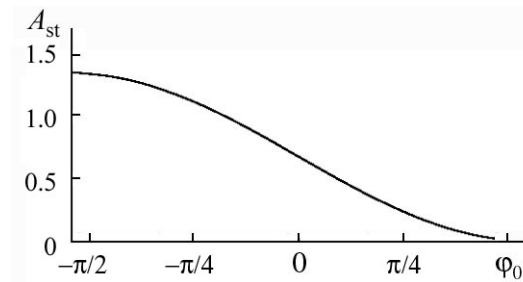


Рис. 3. Зависимость минимальной амплитуды A_{st} стимула, вызывающего надпороговый отклик, от координаты начального состояния равновесия φ_0 при $\varepsilon_1 = 5$ и $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 3. Minimal stimulus amplitude A_{st} causing supra-threshold response depending on initial state φ_0 with $\varepsilon_1 = 5$ and $\varepsilon_2 = 10$

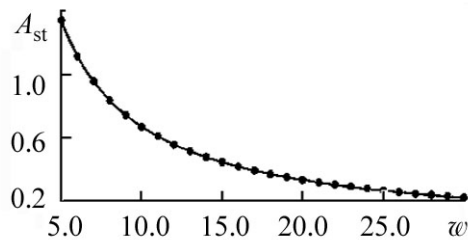


Рис. 4. Зависимость минимальной амплитуды A_{st} стимула, вызывающего надпороговый отклик, от его длительности w при $\varphi_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0, \varepsilon_1 = 5$ и $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 4. Minimal stimulus amplitude A_{st} causing supra-threshold response depending on pulse duration w with $\varphi_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0, \varepsilon_1 = 5$ and $\varepsilon_2 = 10$

(точки на рис. 4), укладываются на предполагаемой гиперболе, то указанная гипотеза о связи амплитуды и длительности стимула справедлива. Таким образом, обнаружено, что при стимуляции фазоуправляемого генератора (1) одиночным прямоугольным импульсом появление отклика определяется не амплитудой или длительностью импульса по отдельности, а их произведением, то есть площадью стимулирующего импульса.

Требуемая для получения отклика амплитуда является большой по сравнению с амплитудой самого отклика фазоуправляемого генератора (0.5). Большие амплитуды внешнего воздействия в биологических нейронных сетях практически не встречаются, поскольку они соответствуют либо чрезвычайно сильному сенсорному входу, опасному для нормального функционирования нейронов, либо синхронному воздействию от очень большого количества других нейронов, что также является редким явлением в рамках нормального функционирования нейронных сетей мозга. Поэтому те начальные состояния φ_0 , для которых требуются значительные амплитуды стимула для получения отклика, в ряде случаев не позволяют получить отклик в ответ на одиночный стимул. Решением данного ограничения является либо увеличение

амплитуда стимула, необходимая для получения отклика в ответ на одиночную импульсную стимуляцию, будет соответствовать начальному состоянию вблизи нижней границы устойчивого диапазона ($\varphi_0 = -\pi + \arccos 1/\varepsilon_1$). В то же время, чем ближе начальное состояние к верхней границе устойчивого диапазона, тем меньше требуемая амплитуда стимула, что можно увидеть из рис. 3, где минимальная требуемая амплитуда асимптотически стремится к нулю при φ_0 , стремящемся к значению $\pi - \arccos 1/\varepsilon_1$.

Рассмотрим влияние длительности стимулирующего импульса w на его минимальную амплитуду A_{st} , требуемую для появления отклика, при фиксированном значении начальной координаты состояния равновесия $\varphi_0 = 0$.

На рис. 4 точками отмечены значения амплитуды стимула A_{st} , полученные в результате численного моделирования системы (1) под воздействием одиночного импульса $\gamma(\tau)$. Замечено, что между длительностью импульса и его минимальной амплитудой для получения отклика существует зависимость: их произведение постоянно. Для проверки данной гипотезы представлен график функции $A_{st} \cdot w = 6.68$ (сплошная линия на рис. 4). Поскольку все значения A_{st} , полученные из численного моделирования

длительности импульса в соответствии с зависимостью, представленной на рис. 4, либо последовательное воздействие нескольких импульсов меньшей амплитуды.

Исследовано воздействие нескольких последовательных идентичных прямоугольных стимулов на генератор (1). Пример динамики генератора (1) в ответ на последовательную стимуляцию тремя импульсами длительностью 10, разделенными межимпульсными интервалами так же в 10 единиц модельного времени, представлен на рис. 5.

На рис. 5, *a* представлена осциллограмма переменной y модели (1) под воздействием последовательности из трех импульсов $\gamma(\tau)$ со следующими параметрами: длительность каждого импульса $w = 10$, межимпульсный интервал $\delta w = 10$, амплитуда $A_{st} = 0.24$, начальное состояние $\varphi_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 5$ и $\varepsilon_2 = 10$. Как можно увидеть из зависимости минимальной амплитуды одиночного импульса длительностью $w = 10$ от начального состояния φ_0 , представленной на рис. 3, для получения надпорогового отклика из начального состояния $\varphi_0 = 0$ необходима амплитуда стимула $A_{st} = 0.668$, то есть каждый импульс из представленной последовательности по отдельности не способен вызвать отклик генератора. Из осциллограммы на рис. 5, *d* можно увидеть, что отклик появляется в ответ на третий импульс последовательности, в то время как первые два дают лишь подпороговый отклик. Проекция фазового портрета на плоскость $(\varphi \bmod 2\pi, y)$ для описываемого случая, представленная на рис. 5, *b*, раскрывает механизм возникновения отклика. Каждый из стимулов порождает подпороговый отклик, который переводит начальное состояние $(\varphi_0, 0, 0)$ в новое негрубое состояние равновесия $(\varphi_0^1, 0, 0)$, $(\varphi_0^2, 0, 0)$ и так далее, до тех пор, пока координата негрубого состояния равновесия φ_0^i не окажется такой, что амплитуда стимула будет достаточной для возникновения надпорогового отклика в соответствии с зависимостью, приведенной на рис. 3.

Исследуем влияние количества импульсов в последовательности N_{st} на их амплитуду A_{st} , необходимую для появления надпорогового отклика генератора (1). Результаты численного моделирования при следующих значениях параметров: длительность каждого импульса $w = 10$, межимпульсный интервал $\delta w = 10$, начальное состояние $\varphi_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 5$ и $\varepsilon_2 = 10$, представлены на рис. 6.

Аналогично зависимости, представленной на рис. 4, на рис. 6 точками отмечены значения, полученные в результате численного моделирования системы (1). Также было обнаружено, что при увеличении количества импульсов амплитуда

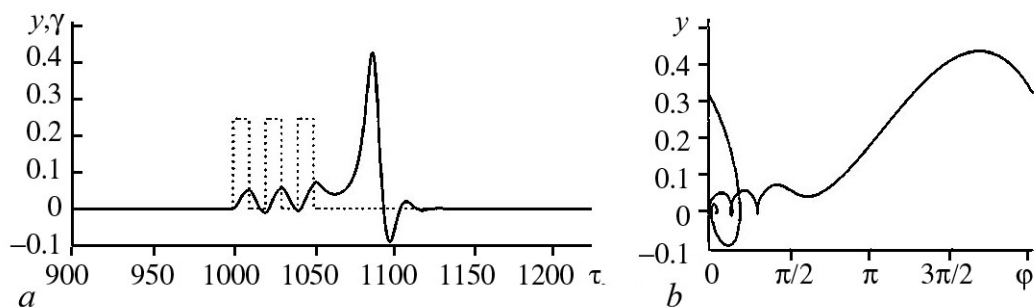


Рис. 5. Иллюстрация отклика системы (1) на стимуляцию последовательностью из трех импульсов. Длительность каждого импульса $w = 10$, межимпульсный интервал $\delta w = 10$, амплитуда $A_{st} = 0.24$, начальное состояние $\varphi_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 5$ и $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 5. Illustration of the system (1) response on three consecutive pulses stimulation. Each pulse duration is $w = 10$, inter-stimulus interval $\delta w = 10$, initial state $\varphi_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 5$ and $\varepsilon_2 = 10$

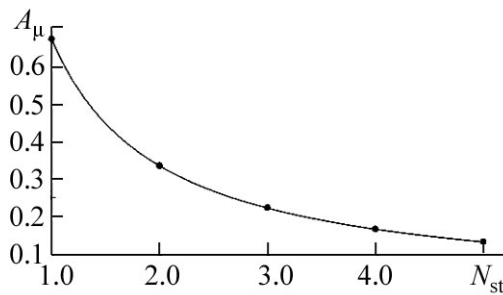


Рис. 6. Зависимость минимальной амплитуды A_{st} стимула, вызывающего надпороговый отклик, от количества импульсов в последовательности N_{st} при $w = 10$, межимпульсный интервал $\delta w = 10$, $\varphi_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 5$ и $\varepsilon_2 = 10$

Fig. 6. Minimal stimulus amplitude A_{st} causing supra-threshold response depending on the number of consecutive stimulus pulses N_{st} with $w = 10$, $\delta w = 10$, $\varphi_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 5$ and $\varepsilon_2 = 10$

снижается пропорционально, то есть сохраняется суммарная амплитуда импульсов, что подтверждается расположением рассчитанных точек на гиперболле $N_{st} \cdot A_{st} = 0.668$ (сплошная линия на рис. 6).

Таким образом, обобщая результаты представленные на рис. 4 и рис. 6, ключевым фактором, влияющим на появление надпорогового отклика генератора (1) при воздействии прямоугольным импульсом, является площадь импульса, которая может быть разделена между несколькими импульсами. Требуемая интенсивность воздействия в зависимости от начального состояния может быть определена из рис. 3, полученного для одиночного стимула длительностью $w = 10$.

Заключение

Исследована модель фазоуправляемого генератора на основе системы фазовой синхронизации, находящегося в возбужденном состоянии. Проведен анализ состояний равновесия системы и показано, что состояния равновесия в такой системе существуют только при значении параметра $\gamma = 0$. При этом существует континуум состояний равновесия при любых значениях координаты φ . Проведенный анализ собственных чисел состояний равновесия показал, что данные состояния равновесия являются негрубыми. Существует интервал значений циклической фазовой переменной φ , названный «устойчивым диапазоном», на котором два оставшихся собственных числа отрицательны, что говорит о наличии двумерного устойчивого многообразия. При отсутствии внешнего воздействия генератор находится в одном из состояний устойчивого диапазона.

Исследована возбудимость генератора под воздействием прямоугольных импульсов $\gamma(\tau)$. Определена амплитуда стимула, необходимая для появления на генераторе надпорогового отклика, сопоставимого по амплитуде с известными автоколебательными режимами. Показано, что требуемая амплитуда существенно зависит от начальных условий нейроподобного генератора – его расположения на устойчивом диапазоне переменной φ . Обнаружено, что на появление отклика генератора оказывает влияние не только амплитуда стимулирующего импульса, но и его длительность. При этом ключевым фактором является площадь стимулирующего воздействия, которая может быть разделена на несколько импульсов.

Исследованный фазоуправляемый генератор может рассматриваться в качестве модели нейроподобного генератора, поскольку наблюдаемые в нем колебания качественно похожи на импульсные и пачечные колебания мембранного потенциала нейрона [13, 14]. Проводя аналогию с динамикой нейрона, переменную y в системе (1) можно интерпретировать как описывающую изменение мембранного потенциала, параметры ε_1 и ε_2 позволяют задавать необходимый динамический режим, а параметр γ оказывает воздействие, сходное с воздействием внешнего тока на нейрон.

Использование фазовых моделей для описания динамики нейрона не является новым. В качестве известных моделей могут быть рассмотрены «каноническая модель Ermentrout-Kopell» [15] и модель VCON [16]. Преимуществом рассматриваемой модели над указанными является возможность генерации пачечных колебаний с различным количеством импульсов в пачке, а также хаотических импульсных колебаний [14]. При этом области существования указанных динамических режимов в пространстве параметров модели (1) являются достаточно большими, что позволяет легко переключаться между динамическими режимами при изменении параметров. Подтверждением этого является экспериментальное наблюдение аналогичных колебаний в аппаратной модели рассматриваемой системы [17].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 16-31-60080 мол_а_дк, а также при поддержке Гранта Президента МК-2726.2017.2.

Библиографический список

1. *Izhikevich E.M.* Neural excitability, spiking and bursting // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2000. Vol. 10, № 6. Pp. 1171–1266.
2. *Izhikevich E.M.* *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting.* Cambridge: The MIT Press, 2007.
3. *Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I.* Dynamical principles in neuroscience // *Rev. Mod. Phys.* 2006. Vol. 78, № 4. Pp. 1213–1265.
4. *Takahashi N., Hanyu Y., Musha T., Kubo R., Matsumoto G.* Global bifurcation structure in periodically stimulated giant axons of squid // *Phys. D: Nonlinear Phenom.* 1990. Vol. 43, № 2–3. P. 318–334.
5. *Kaplan D.T., Clay J.R., Manning T., Glass L., Guevara M.R., Shrier A.* Subthreshold dynamics in periodically stimulated squid giant axons // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 21. Pp. 4074–4077.
6. *Sato S., Doi S.* Response characteristics of the BVP neuron model to periodic pulse inputs // *Math. Biosci.* 1992. Vol. 112. Pp. 243–259.
7. *Doi S., Sato S.* The global bifurcation structure of the BVP neuronal model driven by periodic pulse trains // *Math. Biosci.* 1995. Vol. 125, № 2. Pp. 229–250.
8. *Yoshino K., Nomura T., Pakdaman K., Sato S.* Synthetic analysis of periodically stimulated excitable and oscillatory membrane models // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 59, № 1. Pp. 956–969.
9. *Croisier H.* Continuation and bifurcation analyses of a periodically forced slow-fast system. Diss. Phd thesis, Academie Wallonie-Europe, Universit de Liege, 2009.
10. *Farokhniaee A.A., Large E.W.* Mode-locking behavior of Izhikevich neurons under periodic external forcing // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 95, № 6. Pp. 1–9.
11. *Kazantsev V.B., Tchakoutio A.S., Jacquir S., Binczak S., Bilbault J.M.* Active spike transmission in the neuron model with a winding threshold manifold // *Neurocomputing.* 2012. Vol. 83. Pp. 205–211.
12. *Tchakoutio A.S., Binczak S., Kazantsev V.B., Jacquir S., Bilbault J.M.* Experimental active spike responses of analog electrical neuron: Beyond «integrate-and-fire» transmission // *Nonlinear Dyn.* 2015. Vol. 82, № 3. Pp. 1595–1604.

13. Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нейроподобная динамика в системе фазовой синхронизации // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4. С. 122.
14. Matrosov V.V., Mishchenko M.A., Shalfeev V.D. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2013. Vol. 222, № 10. Pp. 2399–2405.
15. Ermentrout B. Ermentrout–Kopell canonical model // Scholarpedia. 2008. 3(3):1398, revision 122128
16. Hoppensteadt F. Voltage-controlled oscillations in neurons // Scholarpedia. 2006. 1(11):1599, revision 129939
17. Мищенко М.А., Большаков Д.И., Матросов В.В. Аппаратная реализация нейроподобного генератора с импульсной и пачечной динамикой на основе системы фазовой синхронизации // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, № 13. С. 10.

References

1. Izhikevich E.M. Neural excitability, spiking and bursting. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 2000, vol. 10, iss. 6, pp. 1171–1266.
2. Izhikevich E.M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. Cambridge, The MIT Press, 2007.
3. Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I. Dynamical principles in neuroscience. *Rev. Mod. Phys.*, 2006, vol. 78, iss. 4, pp. 1213–1265.
4. Takahashi N., Hanyu Y., Musha T., Kubo R., Matsumoto G. Global bifurcation structure in periodically stimulated giant axons of squid. *Phys. D: Nonlinear Phenom.*, 1990, vol. 43, iss. 2–3, pp. 318–334.
5. Kaplan D.T., Clay J.R., Manning T., Glass L., Guevara M.R., Shrier A. Subthreshold dynamics in periodically stimulated squid giant axons. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, iss. 21, pp. 4074–4077.
6. Sato S., Doi S. Response characteristics of the BVP neuron model to periodic pulse inputs. *Math. Biosci.*, 1992, vol. 112, pp. 243–259.
7. Doi S., Sato S. The global bifurcation structure of the BVP neuronal model driven by periodic pulse trains. *Math. Biosci.*, 1995, vol. 125, iss. 2, pp. 229–250.
8. Yoshino K., Nomura T., Pakdaman K., Sato S. Synthetic analysis of periodically stimulated excitable and oscillatory membrane models. *Phys. Rev. E*, 1999, vol. 59, iss. 1, pp. 956–969.
9. Croisier H. Continuation and bifurcation analyses of a periodically forced slow-fast system. Diss. Phd thesis, Academie Wallonie-Europe, University de Liege, 2009.
10. Farokhniaee A.A., Large E.W. Mode-locking behavior of Izhikevich neurons under periodic external forcing. *Phys. Rev. E*, 2017, vol. 95, iss. 6, pp. 1–9.
11. Kazantsev V.B., Tchakoutio A.S., Jacquir S., Binczak S., Bilbault J.M. Active spike transmission in the neuron model with a winding threshold manifold. *Neurocomputing*, 2012, vol. 83, pp. 205–211.
12. Tchakoutio A.S., Binczak S., Kazantsev V.B., Jacquir S., Bilbault J.M. Experimental active spike responses of analog electrical neuron: Beyond «integrate-and-fire» transmission. *Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 82, iss. 3, pp. 1595–1604.

13. Mischenko M.A., Shalfeev V.D., Matrosov V.V. Neuron-like dynamics in phase-locked loop. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 20, iss. 4, pp. 122 (in Russian).
14. Matrosov V.V., Mishchenko M.A., Shalfeev V.D. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2013, vol. 222, iss. 10, pp. 2399–2405.
15. Ermentrout B. Ermentrout–Kopell canonical model. *Scholarpedia*, 2008, 3(3):1398, revision 122128
16. Hoppensteadt F. Voltage-controlled oscillations in neurons. *Scholarpedia*, 2006, 1(11):1599, revision 129939
17. Mishchenko M.A., Bolshakov D.I., Matrosov V.V. Instrumental implementation of a neuronlike generator with spiking and bursting dynamics based on a phase-locked loop. *Tech. Phys. Lett. Pleiades Publishing*, 2017, vol. 43, iss. 7, pp. 596–599.



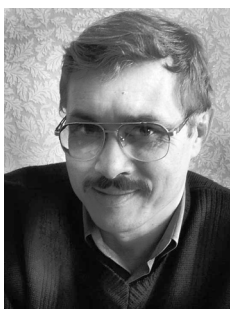
Мищенко Михаил Андреевич родился в городе Горький (1987). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2010). Кандидат физико-математических наук (2013). Научный сотрудник и старший преподаватель кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Область научных интересов – нейродинамика, нелинейная динамика и синхронизация.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
 E-mail: mischenko@neuro.nnov.ru



Жукова Наталья Сергеевна родилась в Нижнем Новгороде (1994). Окончила радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2016) по направлению «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Выпускник кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета (2018). Область научных интересов – нелинейная динамика, нейродинамика, математическое моделирование.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
 E-mail: natalizhukova29@gmail.com



Матросов Валерий Владимирович родился в 1960 году, окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982) по специальности «Прикладная математика». Защитил диссертации на соискание ученых степеней кандидата физико-математических наук (1994), доктора физико-математических наук (2007). С 1999 года работает на радиофизическом факультете ННГУ, в настоящее время – декан радиофизического факультета и заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух монографий и трех учебных пособий.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
 E-mail: matrosov@rf.unn.ru