

## РЕШЕНИЕ ТИПА «БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ» В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПОВОРОТА

Ю. А. Хазова

ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»  
Россия, Республика Крым, 295007 Симферополь, просп. Академика Вернадского, д. 4  
E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

Поступила в редакцию 3.07.2017; после доработки 12.09.2017

Оптические системы с двумерной обратной связью демонстрируют широкие возможности по исследованию процессов зарождения и развития диссипативных структур. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику оптической системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами. Нелинейный интерферометр с зеркальным отражением поля в двумерной обратной связи является одной из наиболее простых оптических систем, в которых реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей.

Математической моделью оптических систем с двумерной обратной связью является нелинейное параболическое уравнение с преобразованием поворота пространственной переменной и условиями периодичности на окружности.

Исследуются вопросы бифуркации рождения стационарных структур типа бегущей волны, эволюции их форм при уменьшении бифуркационного параметра (впервые в качестве бифуркационного параметра был взят коэффициент диффузии) и динамики их устойчивости при отходе от критического значения параметра бифуркации и дальнейшем его уменьшении. В работе используются метод центральных многообразий и метод Галеркина. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании, форме и устойчивости решения типа бегущей волны в окрестности бифуркационного значения коэффициента диффузии. Получено представление первой бегущей волны, рождающейся в результате бифуркации Андронова–Хопфа при переходе бифуркационного параметра через критическое значение. Согласно теореме о центральном многообразии первая бегущая волна рождается орбитально устойчивой.

Поскольку доказанная теорема дает возможность исследовать рожденные решения только в окрестности критического значения бифуркационного параметра, то для изучения динамики изменений решения типа бегущей волны при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности был использован формализм метода Галеркина. В соответствии с методом центральных многообразий составлена галеркинская аппроксимация приближенных решений поставленной задачи. При уменьшении параметра бифуркации и его переходе через критическое значение, нулевое решение задачи теряет устойчивость колебательным образом. В результате от нулевого решения ответвляется периодическое решение типа бегущей волны. Эта волна рождается орбитально устойчивой. При дальнейшем уменьшении параметра и его прохождении через следующее

критическое значение от нулевого решения в результате бифуркации Андронова–Хопфа рождается второе решение типа бегущая волна. Данная волна рождается неустойчивой с индексом неустойчивости два.

Численные расчеты с помощью пакета Mathematica показали, что применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами и могут быть использованы для постановки экспериментов по изучению явлений в оптических системах с обратной связью.

*Ключевые слова:* Параболическая задача, бифуркация, устойчивость, бегущая волна, метод центральных многообразий, метод Галеркина.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69

*Образец цитирования:* Хазова Ю.А. Решение типа «бегущие волны» в параболической задаче с преобразованием поворота // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 57–69. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69

## TRAVELING WAVES SOLUTION IN PARABOLIC PROBLEM WITH A ROTATION

*Yuliya A. Khasova*

V.I. Vernadsky Crimean Federal University  
4 Vernadskogo Prospekt, 295007 Simferopol, Republic of Crimea, Russia  
E-mail: [khasova.yuliya@hotmail.com](mailto:khasova.yuliya@hotmail.com)

*Received 3.07.2017; revised 12.09.2017*

Optical systems with two-dimensional feedback demonstrate wide possibilities for emergence of dissipative structures. Feedback allows to influence on dynamics of the optical system by controlling the transformation of spatial variables performed by prisms, lenses, dynamic holograms and other devices. Nonlinear interferometer with mirror reflection of a field in two-dimensional feedback is one of the simplest optical systems in which the nonlocal interaction of light fields is realized.

A mathematical model of optical systems with two-dimensional feedback is the nonlinear parabolic equation with rotation transformation of a spatial variable and periodicity conditions on a circle. Such problems are investigated: conditions of occurrence the traveling wave solution, how the form of the solution changes as the diffusion coefficient decreases, dynamics of the solution's stability when the value of bifurcation parameter is decrease. As a bifurcation parameter was taken diffusion coefficient.

The method of central manifolds and the Galerkin's method are used in this paper. The method of central manifolds allows to prove the theorem on the existence and form of the traveling wave solution in the neighborhood of the critical bifurcation value. The first traveling wave born as a result of the Andronov–Hopf bifurcation. According to the central manifold theorem, the first traveling wave is born orbitally stable.

The theorem gives the opportunity to explore solutions near the critical values of the bifurcation parameter. The Galerkin's method was used by further research of traveling waves when bifurcation parameter was decrease. If the bifurcation parameter decreases and transition through the critical value, the zero solution of the problem loses stability. As a result, a periodic solution of the traveling wave type branches off from the zero solution. This wave is born orbitally stable. Further, the bifurcation parameter and its passage through the next critical value from the zero solution, the second solution of the traveling wave type is arise as a result of the Andronov–Hopf bifurcation. This wave is born unstable.

Numerical calculations have shown that the application of the Galerkin's method leads to correct results. The results can be used by experiments on the study of phenomena in optical systems with feedback.

*Keywords:* Parabolic problem, bifurcation, stability, traveling wave, method of central manifolds, Galerkin's method.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69

*References:* Khazova Yu.A. Traveling waves solution in a parabolic problem with a rotation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 6. P. 57–69. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69

## Введение

В оптических системах с обратной связью реализуются два типа взаимодействия поля: локальное, связанное с диффузией частиц нелинейной среды и с самовоздействием поля, и крупномасштабное, вызванное преобразованием поперечных пространственных аргументов поля внутри резонатора, например, поворотом на угол  $h$ , сжатием или отражением пространственной переменной в контуре обратной связи [1–4]. Как следует из эксперимента, описанного в работах [5, 6], наличие крупномасштабного взаимодействия существенно обогащает пространственно-временную динамику фазовой модуляции. Варьированием угла поворота  $h$  аргументов в контуре обратной связи можно добиться визуализации различных типов вращающихся пространственно неоднородных структур, наблюдать изменение их количества и при определенных условиях – переход к оптическому хаосу. Для исследования наблюдаемых явлений могут быть использованы различные подходы. Одним из них является метод, основанный на анализе динамики семейства траекторий, выходящих из некоторого ограниченного в том или ином пространстве множества начальных данных. Отметим, что к глобальному аттрактору притягиваются множества траекторий динамической системы при больших значениях времени. Однако глобальный аттрактор динамических систем шире множества физически реализующихся при больших временах предельных режимов. Поэтому наряду с глобальным анализом поведения системы важно выделить характерные типы наблюдаемых решений, а также выяснить причины возникновения того или иного типа решений. Один из подходов к решению намеченной проблемы – локальный анализ [7, 8], основанный на линеаризации задачи в окрестности какого-либо известного решения, например пространственно однородного стационарного решения. Такие автоколебания при определенных условиях возбуждались из стационарного состояния при изменении параметров модели, что свидетельствует о бифуркационной природе их возникновения. Для исследования бифуркационных автоколебаний может быть использована методика, основанная на построении иерархии упрощенных математических моделей в окрестности точки бифуркации. Построение разложений периодических решений в такого рода задачах основано на методах центрального многообразия [9, 10] и методе Галеркина [1–4]. Для описания различных автоволновых процессов, протекающих в нелинейном интерферометре (то есть в нелинейной оптической системе, состоящей из тонкого слоя

нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура обратной связи), может быть использована одномерная по пространству модель

$$v_t + v = \mu \Delta v + K(1 + \gamma \cos Qv(\varphi, t)), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$v(\varphi + 2\pi, t) = v(\varphi, t). \quad (2)$$

Краевая задача (1)–(2) моделирует динамику фазовой модуляции  $v(\varphi, t)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $t > 0$ , световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием поворота координат в контуре обратной связи в одномерном приближении. Здесь  $\mu$  – коэффициент диффузии нелинейной среды; положительный коэффициент  $K$  пропорционален интенсивности входного поля;  $\gamma$  – видность (контрастность) интерференционной картины,  $0 < \gamma < 1$ ;  $Qv(\varphi) = v(\varphi + h)$  – оператор поворота на угол  $h$ .

Особенностью данной задачи является наличие пространственно однородного решения, описывающего невозмущенное распределение фазовой модуляции. При изменении параметров модели, например, уменьшении коэффициента диффузии нелинейной среды и, соответственно, изменении коэффициента  $\mu$ , это решение теряет устойчивость. Наличие поворота координат позволяет промоделировать ситуацию, когда такая потеря устойчивости происходит колебательным образом. В результате возбуждается бегущая волна, скорость вращения которой и ее пространственный масштаб могут быть предсказаны и проанализированы на основе теории бифуркаций. При определенных условиях на параметры задачи будут рассмотрены вопросы существования, единственности и устойчивости периодического пространственно неоднородного решения, ответвляющегося от пространственно однородного стационарного решения в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Это пространственно однородное решение  $v(\varphi, t) = \omega$  определяется из уравнения

$$\omega = K(1 + \gamma \cos \omega). \quad (3)$$

С ростом  $K$  количество корней этого уравнения неограниченно растет, причем при  $K \rightarrow \infty$  их состав постоянно меняется: возникают новые состояния равновесия и исчезают старые. Поэтому фиксируем гладкую ветвь решений

$$\omega = \omega(K, \gamma), \quad 1 + K\gamma \sin \omega(K, \gamma) \neq 0 \quad (4)$$

уравнения (3). Затем линеаризуем (1)–(2) на выбранном  $\omega(K, \gamma)$ :  $v = u + \omega$ .

В результате получаем уравнение с краевыми условиями на окружности  $S^1$

$$u_t = \mu \Delta u - u - \Lambda Qu + \frac{\Lambda}{6} Qu^3, \quad (5)$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t), \quad (6)$$

где  $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) = -K\gamma \sin \omega$ ,  $Qu(\varphi) = u(\varphi + 2\pi/3)$  – оператор поворота на угол  $h = 2\pi/3$ . Здесь  $\mu$  – бифуркационный параметр,  $\Delta$  – одномерный оператор Лапласа ( $\Delta u = u_{\varphi\varphi}$ ).

**Лемма.** Собственными функциями оператора  $L(\mu)u = \mu\Delta u - u - \Lambda Qu$ , рассматриваемого в качестве линейного оператора на пространстве  $L_2(S^1)$  и областью определения в  $H^2(S^1)$  (норма задается формулой  $\|u\|_2^2 = \langle (-\Delta)^2 u, u \rangle + \langle u, u \rangle$ ), являются функции  $e^{ik\varphi}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  с соответствующими собственными числами  $\lambda_k(\mu) = -1 - k^2\mu - \Lambda e^{ik\frac{2\pi}{3}}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Интерес представляет случай, когда при уменьшении бифуркационного параметра  $\mu$  знак собственных чисел  $\lambda_k(\mu)$  может измениться. Поэтому фиксируем условие:  $\Lambda > 1$ .

Существует такое значение параметра  $\mu = \mu^*$ , что при  $\mu > \mu^*$  нулевое решение задачи (5)–(6) экспоненциально устойчиво. При уменьшении  $\mu$  и его прохождении через  $\mu^*$  нулевое решение задачи (5)–(6) теряет устойчивость. Пара комплексно-сопряженных точек спектра проходит через мнимую ось с ненулевой скоростью. В результате от нулевого решения бифурцирует однопараметрическое семейство периодических решений типа бегущих волн.

### 1. Использование метода центральных многообразий

Вспользуемся для построения бегущих волн и их представлений методом центральных многообразий [11, 12]. Построим решение (5)–(6) в виде

$$u(\varphi, t) = ze^{i\varphi} + \bar{z}e^{-i\varphi} + \sigma_3(ze^{i\varphi}, \bar{z}e^{-i\varphi}) + \dots, \quad (7)$$

где  $z = z(t)$ ,  $\bar{z} = \bar{z}(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\dot{z} = (\lambda_1(\mu) + c_3|z|^2 + \dots)z, \quad (8)$$

$$\dot{\bar{z}} = (\bar{\lambda}_1(\mu) + \bar{c}_3|\bar{z}|^2 + \dots)\bar{z} \quad (9)$$

(черта над символом обозначает комплексное сопряжение). Слагаемое  $\sigma_3(ze^{i\varphi}, \bar{z}e^{-i\varphi})$  – форма 3-й степени относительно  $z, \bar{z}$ . Обозначим  $z(t, \mu) = z(\mu)$ ,  $\bar{z}(t, \mu) = \bar{z}(\mu)$ . Подставим (7), (9) в (5) и затем в полученном равенстве сделаем замену  $ze^{i\varphi} \rightarrow z$ . В результате относительно  $\sigma_3$  приходим к уравнению

$$(c_3z + \bar{c}_3\bar{z})|z|^2 + B(\mu)\sigma_3 = \tilde{Q}(z + \bar{z})^3. \quad (10)$$

Здесь  $\tilde{Q}z^\alpha z^{-\beta} = z^\alpha z^{-\beta} e^{i(\alpha-\beta)(2\pi)/3}$ . Оператор  $B(\mu)$  на пространстве многочленов относительно  $z, \bar{z}$  является диагональным оператором

$$B(\mu)z^\alpha z^{-\beta} = (\lambda_1\alpha + \bar{\lambda}_1\beta - \lambda_{\alpha-\beta})z^\alpha z^{-\beta}, \quad (11)$$

$\lambda_{-s} = \bar{\lambda}_s$ ,  $s > 0$ . Из условия разрешимости уравнения (10) следует, что

$$c_3 = \frac{\Lambda}{2} e^{i(2\pi)/3}, \quad \bar{c}_3 = \frac{\Lambda}{2} e^{-i(2\pi)/3}. \quad (12)$$

Очевидно, что  $\text{Re } c_3 < 0$ ,  $\text{Re } \bar{c}_3 < 0$ . Уравнение (10) разрешимо следующим образом:

$$\sigma_3 = \frac{\Lambda}{6} \left( \frac{z^3(\mu)e^{3i\varphi}}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\bar{z}^3(\mu)e^{-3i\varphi}}{3\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3} \right). \quad (13)$$

Подставим теперь в (9) найденные, согласно (12), значения  $c_3$  и опустим затем остальные слагаемые. Тогда периодическим решением, ответвляющимся от нуля при переходе через критическое бифуркационное значение  $\mu^*$ :  $\operatorname{Re} \lambda_1(\mu^*) = 0$ , является

$$z_1 = \rho_1(\mu) e^{i\omega_1(\mu)t},$$

где  $\rho_1(\mu) > 0$  – непрерывная ветвь решений уравнения

$$\operatorname{Re} \lambda_1(\mu) + \operatorname{Re} c_3 \rho_1^2(\mu) = 0,$$

$$\omega_1(\mu) = \operatorname{Im} \lambda_1(\mu) + \operatorname{Im} c_3 \rho_1^2(\mu).$$

В результате приближенным периодическим решением исходной задачи, ответвляющимся от нуля при прохождении параметра  $\mu$  через  $\mu^*$ , является

$$u(\varphi, t) = \rho_1(\mu) e^{i\omega_1(\mu)t} e^{i\varphi} + \rho_1(\mu) e^{-i\omega_1(\mu)t} e^{-i\varphi} + \\ + \frac{\Lambda \rho_1^3(\mu) e^{3i\omega_1(\mu)t} e^{3i\varphi}}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\Lambda \rho_1^3(\mu) e^{-3i\omega_1(\mu)t} e^{-3i\varphi}}{3\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3} + \dots$$

Таким образом сформулируем **теорему**.

*Пусть выполнено условие  $\Lambda > 1$ . Тогда существует такое  $\delta_0 > 0$ , что, если  $0 < \mu^* - \mu < \delta_0$ , где  $\operatorname{Re} \lambda_1(\mu^*) = 0$ , то задача (5)–(6) имеет решение типа бегущей волны вида:*

$$u(\varphi, t) = \rho_1(\mu) e^{i\omega_1(\mu)t} e^{i\varphi} + \rho_1(\mu) e^{-i\omega_1(\mu)t} e^{-i\varphi} + \\ + \frac{\Lambda \rho_1^3(\mu) e^{3i\omega_1(\mu)t} e^{3i\varphi}}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\Lambda \rho_1^3(\mu) e^{-3i\omega_1(\mu)t} e^{-3i\varphi}}{3\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3} + \dots,$$

$\rho_1(\mu) > 0$  является положительным корнем уравнения

$$\operatorname{Re} \lambda_1(\mu) + \operatorname{Re} c_3 \rho_1^2(\mu) = 0,$$

а  $\omega_1(\mu)$  находится из уравнения

$$\omega_1(\mu) = \operatorname{Im} \lambda_1(\mu) + \operatorname{Im} c_3 \rho_1^2(\mu).$$

Решения  $u(\varphi, t)$  – экспоненциально орбитально устойчивы.

## 2. Аппроксимация решения параболической задачи с преобразованием поворота пространственной переменной

Поскольку теорема дает возможность исследовать рожденные решения только в окрестности критического значения бифуркационного параметра  $\mu$ , то для изучения динамики изменений решения типа бегущей волны при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности, воспользуемся формализмом метода Галеркина.

В соответствии с методом центральных многообразий будем использовать галеркинскую аппроксимацию в таком виде:

$$u = \sum_{k=1}^N (x_k e^{ik\varphi} + \bar{x}_k e^{-ik\varphi}). \quad (14)$$

Подставим (14) в (5) и затем в полученном равенстве приравняем коэффициенты при  $e^{\pm ik\varphi}$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \lambda_k z_k + g_k(z, \bar{z}), \\ \dot{\bar{x}}_k &= \bar{\lambda}_k \bar{z}_k + \bar{g}_k(z, \bar{z}), \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $z = (z_1, \dots, z_N)$ ,  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N)$ ,  $g_k$ ,  $\bar{g}_k$  – формы 3-й степени относительно  $(z, \bar{z})$ ,  $\lambda_k = \lambda_k(\mu)$ .

При уменьшении параметра  $\mu$  и его переходе через критическое значение  $\mu_1^*$  такое, что  $\operatorname{Re} \lambda_1(\mu_1^*) = 0$ , нулевое решение (5)–(6) теряет устойчивость колебательным образом. В результате от нулевого решения (5)–(6) отщепляется периодическое решение типа бегущей волны. Для построения указанного решения (5)–(6) воспользуемся системой (15), в которой нулевое решение теряет устойчивость при уменьшении  $\mu$  и его прохождении через  $\mu_1^*$ . Построим это решение в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad x_3 = \rho_3 e^{i(3\varphi_1 + \alpha_3)}, \quad x_5 = \rho_5 e^{i(5\varphi_1 + \alpha_5)} \\ \rho_k &= \rho_k(t, \mu), \quad \varphi_k = \varphi_k(t, \mu) \end{aligned} \quad (16)$$

и соответствующие им комплексные переменные  $\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_5$ . Остальные компоненты в (15) положим нулевыми. В полученной после подстановки (16) в (15) системе находим стационарные  $\rho_k > 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $\alpha_3, \alpha_5$  и  $\dot{\varphi}_1 = \omega_1(\mu)$ . Следовательно, система (15) имеет периодическое решение

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1(\mu) e^{i\omega_1(\mu)t}, \quad x_3 = \rho_3(\mu) e^{i(3\omega_1(\mu)t + \alpha_3)}, \quad x_5 = \rho_5(\mu) e^{i(5\omega_1(\mu)t + \alpha_5)}, \\ \bar{x}_1 &= \rho_1(\mu) e^{-i\omega_1(\mu)t}, \quad \bar{x}_3 = \rho_3(\mu) e^{-i(3\omega_1(\mu)t + \alpha_3)}, \quad \bar{x}_5 = \rho_5(\mu) e^{-i(5\omega_1(\mu)t + \alpha_5)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив (17) в (14) получим приближенное периодическое решение (14) типа «бегущая волна». Это решение рождается орбитально устойчивым периодическим решением.

При уменьшении  $\mu$  и его прохождении через следующее значение  $\mu_2^*$ :  $\operatorname{Re} \lambda_2(\mu_2^*) = 0$  от нулевого решения (5)–(6) в результате бифуркации типа Андронова–Хопфа рождается второе решение типа «бегущая волна». Для построения указанного периодического решения вновь переходим к (15) и строим эти решения в виде

$$\begin{aligned} x_2 &= \rho_2 e^{i2\varphi_2}, \quad x_6 = \rho_6 e^{i(6\varphi_2 + \beta_3)}, \quad x_{10} = \rho_{10} e^{i(10\varphi_2 + \beta_5)}, \\ \rho_k &= \rho_k(t, \mu), \quad \varphi_2 = \varphi_2(t, \mu) \end{aligned} \quad (18)$$

и соответствующие им комплексные переменные  $\bar{x}_2, \bar{x}_6, \bar{x}_{10}$ . Остальные компоненты в (15) полагаются нулевыми. В полученной системе относительно  $\rho_2, \rho_6, \rho_{10}$  находим стационарные  $\rho_k = \rho_k(\mu) > 0, k = 2, 6, 10; \beta_3, \beta_5$  и  $\dot{\varphi}_2 = \omega_2(\mu)$ . Следовательно, система (15) имеет периодическое решение при  $\mu < \mu_2^*$  вида

$$\begin{aligned} x_2 &= \rho_2(\mu)e^{i2\omega_2(\mu)t}, & x_6 &= \rho_6(\mu)e^{i(6\omega_2(\mu)t+\beta_3)}, & x_{10} &= \rho_{10}(\mu)e^{i(10\omega_2(\mu)t+\beta_5)}, \\ \bar{x}_2 &= \rho_2(\mu)e^{-i2\omega_2(\mu)t}, & \bar{x}_6 &= \rho_6(\mu)e^{-i(6\omega_2(\mu)t+\beta_3)}, & \bar{x}_{10} &= \rho_{10}(\mu)e^{-i(10\omega_2(\mu)t+\beta_5)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение (19) системы (15) рождается неустойчивым с индексом неустойчивости 2.

Обратимся к вопросу о динамике устойчивости решения (19) при уменьшении  $\mu$ . Для этого перейдем к анализу линеаризованной в окрестности периодического решения (19) системе (15). Для получения этой линеаризованной системы линеаризуем исходное уравнение (5)–(6) на найденном периодическом решении (19). В результате получим

$$\dot{u} = \mu\Delta u - u - \Lambda Qu + \frac{\Lambda}{2}Qu_2^2 \cdot Qu. \quad (20)$$

где  $u_2$  – вторая бегущая волна.

Отметим, что ключевую роль в анализе динамики устойчивости играют переменные  $x_1, x_3, x_5$  и им сопряженные  $\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_5$ . Проведенная линеаризация приводит относительно этих переменных к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + \left( (6\rho_2^2 + 6\rho_6^2 + 6\rho_{10}^2)x_1 + 3\rho_2^2 e^{i2\omega_2 t} \bar{x}_3 + 6\rho_2 \rho_6 e^{i(2\omega_2 t + \beta_3)} \bar{x}_3 + \right. \\ &\quad \left. + 6\rho_6 \rho_{10} e^{i(2\omega_2 t + \beta_5 - \beta_3)} \bar{x}_3 + 6\rho_6 \rho_{10} e^{i(-2\omega_2 t - \beta_5 + \beta_3)} x_5 \right) e^{i\frac{2\pi}{3}}, \\ \dot{x}_3 &= \lambda_3 x_3 + \left( (6\rho_2^2 + 6\rho_6^2 + 6\rho_{10}^2)x_3 + 3\rho_2^2 e^{i2\omega_2 t} \bar{x}_1 + 6\rho_2 \rho_6 e^{i(2\omega_2 t + \beta_3)} x_1 + \right. \\ &\quad \left. + 6\rho_6 \rho_{10} e^{i(2\omega_2 t + \beta_5 - \beta_3)} x_1 + 6\rho_2 \rho_{10} e^{i(-4\omega_2 t - \beta_5)} x_5 \right) e^{3i\frac{2\pi}{3}}, \\ \dot{x}_5 &= \lambda_5 x_5 + \left( (6\rho_2^2 + 6\rho_6^2 + 6\rho_{10}^2)x_5 + 3\rho_2^2 e^{i2\omega_2 t} x_1 + 6\rho_2 \rho_6 e^{i(2\omega_2 t + \beta_3)} x_1 + \right. \\ &\quad \left. + 6\rho_6 \rho_{10} e^{i(4\omega_2 t + \beta_5)} y_3 \right) e^{5i\frac{2\pi}{3}}, \end{aligned}$$

плюс соответствующие выражения для сопряженной части. Анализ матрицы коэффициентов полученной системы и ей сопряженной дает возможность ответить на вопросы об устойчивости решения (19).

### 3. Численные результаты анализа параболической задачи

Для численных расчетов использовалась модельная задача (условие  $\cos \omega = 0$ )

$$u_t = \mu\Delta u - u - \Lambda Qu + \frac{\Lambda}{6}Qu^3, \quad t > 0,$$



с условием на окружности

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t),$$

где  $L = L(\mu) = -1 - \mu\Delta - \Lambda Q$ ,  $Qu(\varphi) = u(\varphi + 2\pi/3)$ .

Зафиксируем следующие переменные  $K = 8$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\omega = -0.675132$ ,  $\Lambda = 3$ .

Численный анализ показал, что первая бегущая волна, рождающаяся в результате бифуркации Андронова–Хопфа, при переходе бифуркационного параметра  $\mu$  через  $\mu_1^* = 0.5$ , рождается орбитально устойчивой. Данное решение возникает, когда собственное значение нулевого решения переходит через ноль колебательным образом. Используя формализм метода Галеркина, была проанализирована динамика изменений решения при уменьшении параметра  $\mu$ . Так, при отходе бифуркационного параметра от критического значения в область надкритичности амплитуда решения незначительно возрастает, точки отрицательного спектра возрастают и приближаются к нулю, но не переходят на положительную полуось. Максимальной точкой спектра на всем промежутке изменения параметра  $(0, \mu_1^*)$  является 0. Это в свою очередь позволяет сделать вывод, что первая бегущая волна сохраняет устойчивость на всем промежутке изменения параметра  $(0, \mu_1^*)$ .

Вторая бегущая волна, рождающаяся в результате бифуркации Андронова–Хопфа, при переходе бифуркационного параметра  $\mu$  через  $\mu_2^* = 0.125$ . Решение рождается неустойчивым с индексом неустойчивости два, так как две комплексно-сопряженные точки спектра имеют положительную действительную часть.

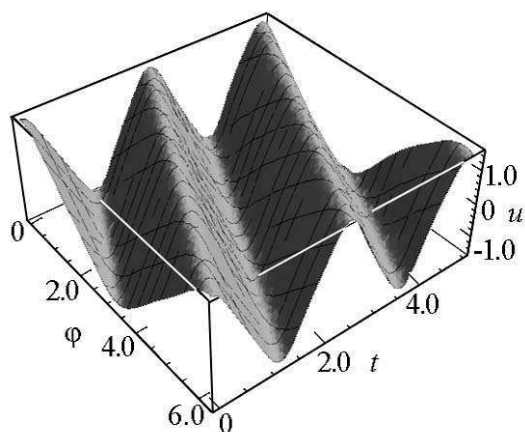


Рис. 1. Первая бегущая волна при фиксированном значении  $N = 6$ , рождающаяся орбитально устойчивой в результате бифуркации Андронова–Хопфа при переходе бифуркационного параметра  $\mu$  через значение  $\mu_1^* = 0.5$ , здесь  $\varphi$  – пространственная переменная,  $t$  – переменная времени,  $u$  – значение функции  $u(\varphi, t)$

Fig.1. The first traveling wave at a fixed value  $N = 6$ , born orbitally stable as a result of the Andronov–Hopf bifurcation in the transition of the bifurcation parameter  $\mu$  through the value  $\mu_1^* = 0.5$ , here  $\varphi$  – spatial variable,  $t$  – time variable,  $u$  – function value  $u(\varphi, t)$

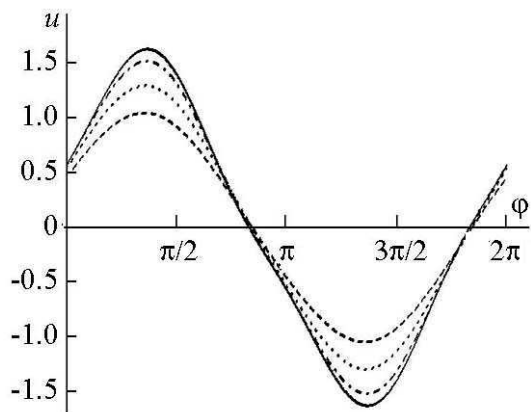


Рис. 2. График роста амплитуды первой бегущей волны при фиксированном  $N = 6$  в зависимости от уменьшения бифуркационного параметра  $\mu = 0.3; 0.2; 0.1; 0.05$ , здесь  $\varphi$  – пространственная переменная,  $u$  – значение функции  $u(\varphi, t)$

Fig.2. Growth of the amplitude of the first traveling wave with a fixed  $N = 6$  depending on the decrease of the bifurcation parameter  $\mu = 0.3; 0.2; 0.1; 0.05$ , here  $\varphi$  – spatial variable,  $u$  – function value  $u(\varphi, t)$

Исследование динамики спектра при уменьшении параметра  $\mu$  показывает поведение максимальных точек спектра. При уменьшении  $\mu$  и прохождении через  $\mu_2^*$  положительная пара комплексно-сопряженных точек спектра переходит на отрицательную полуось и остается там при дальнейшем уменьшении бифуркационного параметра. Приведем в качестве примера полученные численные результаты при фиксированных  $N = 6$ ,  $\Lambda = 3$ , а именно три максимальные точки спектра  $\sigma(\mu)$  (комплексно-сопряженная часть не приводится для упрощения):

$$\sigma(0.09) = (\dots, -4.2289 + 0.0177I, -2.0319 + 2.1080I, 0.1431 - 2.1080I),$$

$$\sigma(0.07) = (\dots, -3.6864 + 0.0347I, -1.6943 + 1.8196I, 0.02593 - 1.8196I),$$

$$\sigma(0.066) = (\dots, -3.574 + 0.0370I, -1.6268 + 1.7606I, 0.00420 - 1.7606I),$$

$$\sigma(0.065) = (\dots, -3.5463 + 0.0375I, -1.6099 + 1.7458I, -0.00113 - 1.7458I),$$

$$\sigma(0.04) = (\dots, -2.3687 - 1.5242I, -1.1839 + 1.3570I, -0.1211 - 1.3570I),$$

$$\sigma(0.005) = (\dots, -1.1713 - 0.8822I, -0.5256 + 0.5994I, -0.2993 - 0.5994I).$$

Здесь  $I$  – мнимая единица.

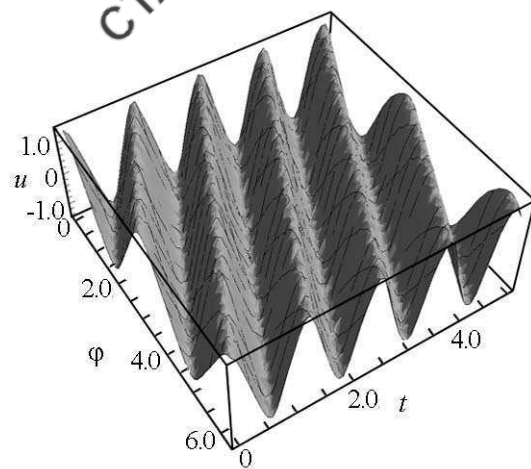


Рис. 3. Вторая бегущая волна при фиксированном значении  $N = 6$ , рождающаяся неустойчивой с индексом неустойчивости два в результате бифуркации Андронова–Хопфа при переходе бифуркационного параметра  $\mu$  через значение  $\mu_2^* = 0.125$ , здесь  $\varphi$  – пространственная переменная,  $t$  – переменная времени,  $u$  – значение функции  $u(\varphi, t)$

Fig.3. The second traveling wave at fixed value  $N = 6$ , is born unstable with an instability index of two as a result of the Andronov–Hopf bifurcation in the transition of the bifurcation parameter  $\mu$  through the value  $\mu_2^* = 0.125$ , here  $\varphi$  – spatial variable,  $t$  – time variable,  $u$  – function value  $u(\varphi, t)$

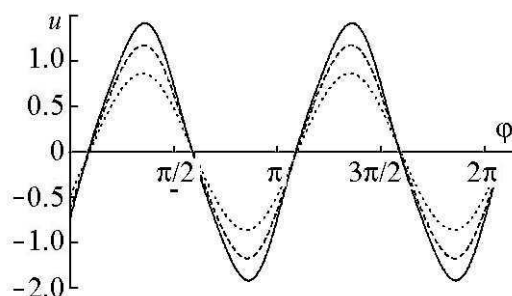


Рис. 4. График роста амплитуды второй бегущей волны при фиксированном  $N = 6$  в зависимости от уменьшения бифуркационного параметра  $\mu = 0.09$ ;  $0.06$ ;  $0.03$ , здесь  $\varphi$  – пространственная переменная,  $u$  – значение функции  $u(\varphi, t)$

Fig.4. Growth of the amplitude of the second traveling wave with a fixed  $N = 6$  depending on the decrease of the bifurcation parameter  $\mu = 0.09$ ;  $0.06$ ;  $0.03$ , here  $\varphi$  – spatial variable,  $u$  – function value  $u(\varphi, t)$

Такое поведение точек спектра дает возможность сделать вывод, что в системе реализуется бифуркация рождения семейства двухпараметрических торов. Дальнейший анализ поведения рожденных торов является более сложной задачей и оставлена автором для дальнейшего исследования.

### Заключение

Для параболического уравнения с поворотом пространственной переменной на окружности рассмотрены вопросы о существовании, форме и устойчивости решений типа бегущих волн. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании решения типа бегущих волн. Используя формализм метода Галеркина исследована динамика изменений рожденных решений, их форма и устойчивость. Для анализа устойчивости решения типа бегущей волны использовалась линеаризация в окрестности периодического решения. Численные расчеты с помощью пакета Mathematica показали, что применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

*Исследование выполнено при поддержке Программы развития федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» на 2015–2024 годы по проекту Сеть академической мобильности «Академическая мобильность молодых ученых России» в 2016 году на базе ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений.*

### Библиографический список

1. Белан Е.П., Хазова Ю.А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4(32), № 1–2. С. 43–57.
2. Хазова Ю.А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4(32), № 3–4. С. 245–257.
3. Хазова Ю.А. Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 3(28). С. 82–95.
4. Хазова Ю.А. Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3, № 8–4 (19–4). С. 3–16.
5. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // в кн. Новые физические принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. С. 263–325.

6. Воронцов М.А., Железных Н.И. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью // *Мат. моделирование*. 1990. Т. 2, № 2. С. 31–38.
7. Разгулин А.В. *Нелинейные модели оптической синергетики*. М.: МАКС Пресс, 2008. 203 с.
8. Скубачевский А.Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // *Дифференциальные уравнения*. 1998. Т. 34, № 10. С. 1394–1401.
9. Белан Е.П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // *Дифференциальные уравнения*. 2004. Т. 40, № 5. С. 645–654.
10. Белан Е.П., Лыкова О.Б. Бифуркации вращающихся структур в параболическом уравнении с преобразованием поворота пространственной переменной // *Динамические системы*. 2009. Т. 27. С. 3–16.
11. Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и её приложения*. М.: Мир, 1980. 368 с.
12. Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*. М.: Мир, 1985. 376 с.

## References

1. Belan E.P., Khazova Yu.A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dinamicheskie Sistemy*. 2014. Vol. 4(32), No. 1–2. S. 43–57 (in Russian).
2. Khazova Yu.A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a segment. *Dinamicheskie Sistemy*. 2014. Vol. 4(32), No. 3–4. S. 245–257 (in Russian).
3. Khazova Yu.A. Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. *Tavrisheskiy Vestnik Matematiki i Informatiki*. 2015. No. 3 (28). S. 82–95 (in Russian).
4. Khazova Yu.A. Stacionarniye strukturi v parabolicheskoy zadache s otrazheniem prostranstvinnoy peremennoi. *Aktualniye napravleniya nauchnih issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika*. 2015. Vol. 3. S. 3–16 (in Russian).
5. Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics generations of spatiotemporal structures. *J. Optical Soc. Amer. Ser. B*. 1992. V. 9., No. 1. P. 78–90.
6. Vorontsov M.A., Zheleznykh N.I. Poperechnaya bistabilnost i multistabilnost v nelineynih opticheskikh sistemah s obratnoi svyazyu. *Matematicheskoe Modelirovanie*. 1990. Vol. 2, No. 2. S. 31–38 (in Russian).
7. Razgulin A.V. *Nelineynie Modeli Opticheskoi Sinergetiki* M.: MAKS Press, 2008. 203 s. (in Russian)
8. Skubachevskii A.L. On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation // *Differential Equations*. 1998. V. 34., No. 10. P. 1395–1402.

9. Belan E.P. On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation. *Differential Equations*. 2004. Vol. 40, No. 5. P. 692–702.
10. Belan E.P. Bifurkacii vrashayushihhsya struktur v parabolicheskom uravnenii s preobrazovaniem povorota prostranstvennoy peremennoy. *Dinamicheskie Sistemy*. 2009. Vol. 27. S. 3–16 (in Russian).
11. Marsden J., McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications. *Applied Mathematical Sciences*. 1976. No. 19.
12. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin etc., 1981.



*Хазова Юлия Александровна* – родилась в Севастополе (1989), окончила Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (2011) по специальности математика. Работает ассистентом кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение), Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского. Опубликовала 5 научных статей по направлениям нелинейная оптика, параболические уравнения с преобразованиями пространственной переменной.

295007, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4, факультет математики и информатики, ауд. 319В  
 Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского  
 E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com