



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1)

Научная статья
УДК 517.96

DOI: 10.18500/0869-6632-003023
EDN: CKLLWX

Эффективные алгоритмы решения функциональных уравнений с суперпозицией на примере уравнения Фейгенбаума

А. А. Полуновский

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

E-mail: arap2009@yandex.ru

*Поступила в редакцию 30.08.2022, принята к публикации 9.11.2022,
опубликована онлайн 19.01.2023, опубликована 31.01.2023*

Аннотация. *Цель.* Рассмотреть новые алгоритмы решения функциональных уравнений на примере уравнения Фейгенбаума. Данное уравнение представляет большой интерес в теории детерминированного хаоса и является хорошим показательным примером в классе функциональных уравнений с суперпозицией. *Методы.* В статье предлагаются три новых эффективных метода решения функциональных уравнений — метод последовательных приближений, метод последовательных приближений с применением быстрого преобразования Фурье и численно-аналитический метод с применением малого параметра. *Результаты.* Были приведены три новых метода решения функциональных уравнений, рассмотренных на примере уравнения Фейгенбаума. Для каждого из них были исследованы особенности их применения, а также оценена сложность получаемых в результате алгоритмов. Проведено сравнение методов, используемых ранее исследователями для решения функциональных уравнений, с описанными в данной статье. В описании последнего, численно-аналитического метода, были выписаны несколько коэффициентов разложений универсальных постоянных Фейгенбаума. *Заключение.* Полученные алгоритмы позволяют решать функциональные уравнения с суперпозицией, основываясь на методах простой итерации, без необходимости обращения матрицы Якоби. Данная особенность сильно упрощает использование компьютерной памяти и дает выигрыш по времени работы рассматриваемых алгоритмов, по сравнению с ранее используемыми. Также последний, численно-аналитический метод позволил получать последовательно коэффициенты разложений универсальных постоянных Фейгенбаума, что, по сути, может являться аналитическим представлением данных констант.

Ключевые слова: динамический хаос, уравнение Фейгенбаума, функциональные уравнения с суперпозицией, степенные ряды.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00317, <https://rscf.ru/project/22-11-00317/>

Для цитирования: Полуновский А. А. Эффективные алгоритмы решения функциональных уравнений с суперпозицией на примере уравнения Фейгенбаума // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 8–19. DOI: 10.18500/0869-6632-003023. EDN: CKLLWX

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Effective algorithms for solving functional equations with superposition on the example of the Feigenbaum equation

A. A. Polunovskii

A. A. Harkevich Institute of Information Transmission Problems of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: apap2009@yandex.ru

Received 30.08.2022, accepted 9.11.2022, available online 19.01.2023, published 31.01.2023

Abstract. *Purpose.* New algorithms were considered for functional equations solving using the Feigenbaum equation as an example. This equation is of great interest in the theory of deterministic chaos and is a good illustrative example in the class of functional equations with superposition. *Methods.* The article proposes three new effective methods for solving functional equations – the method of successive approximations, the method of successive approximations using the fast Fourier transform and the numerical-analytical method using a small parameter. *Results.* Three new methods for solving functional equations were presented, considered on the example of the Feigenbaum equation. For each of them, the features of their application were investigated, as well as the complexity of the resulting algorithms was estimated. The methods previously used by researchers to solve functional equations are compared with those described in this article. In the description of the latter, the numerical-analytical method, several coefficients of expansions of the universal Feigenbaum constants were written out. *Conclusion.* The obtained algorithms, based on simple iteration methods, allow solving functional equations with superposition without the need to reverse the Jacobi matrix. This feature greatly simplifies the use of computer memory and gives a gain in the operating time of the algorithms in question, compared with previously used ones. Also, the latter, numerically-analytical method made it possible to obtain sequentially the coefficients of expansions of the universal Feigenbaum constants, which in fact can be an analytical representation of these constants.

Keywords: dynamic chaos, Feigenbaum equation, functional equations with superposition, power series.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 22-11-00317, <https://rscf.ru/project/22-11-00317/>

For citation: Polunovskii AA. Effective algorithms for solving functional equations with superposition on the example of the Feigenbaum equation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(1):8–19. DOI: 10.18500/0869-6632-003023

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

1. Известные результаты в решении уравнения Фейгенбаума

1.1. Введение. В теории детерминированного хаоса определенный интерес представляет система функциональных уравнений Фейгенбаума. Данная система имеет следующий вид [1–3]:

$$\begin{cases} g(x) = -\alpha \cdot g\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right), \\ \delta \cdot h(x) = \alpha \cdot g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \cdot h\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha \cdot h\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right), \end{cases} \quad (1)$$

с дополнительными условиями

$$\begin{cases} g(0) = h(0) = 1, \\ g'(0) = h'(0) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где g и h – искомые функции, α и δ – универсальные постоянные Фейгенбаума, также являющиеся неизвестными в данной системе уравнений.

Предполагается, что g и h — четные аналитические функции с квадратичным экстремумом в нуле, определенные на вещественной оси \mathbb{R} . Требуется найти пару функций (g, h) и пару чисел (α, δ) . Сейчас существует только приближенное численное решение этой системы:

$$\begin{cases} g(x) = 1 - 1.52763\dots \cdot x^2 + 0.104815\dots \cdot x^4 + \\ \quad + 0.0267057\dots \cdot x^6 - 0.0035274\dots \cdot x^8 + \dots, \\ \alpha = 2.502907876\dots, \\ h(x) = 1 - 0.325651\dots \cdot x^2 - 0.50554\dots \cdot x^4 + \\ \quad + 0.014560\dots \cdot x^6 - 0.000881\dots \cdot x^8 - \dots, \\ \delta = 4.669201609\dots \end{cases} \quad (3)$$

Впервые в 1979 году М. Фейгенбаум в своих статьях [3, 4] опубликовал первые 12 знаков после запятой константы α и 13 знаков после запятой константы δ . В 1991 году Кит Бриггс, используя тот же метод вычисления, получил значения данных констант с точностью 150 знаков после запятой [5]. Позже, в 1999 году, Саймон Плэфф уточнил результаты Бриггса, и вычислил 1018 знаков после запятой констант α и δ [6].

1.2. Дискретизация. Метод коллокаций. Основным методом дискретизации системы (1), применяемым в предыдущих работах, является метод коллокаций (МК) [3, 5, 7]. Этот метод основан на представлении искомых функций и в виде некоторой суммы базисных функций

$$\begin{cases} g(x) \approx g_N(x) = 1 + \sum_{i=1}^N g_i^N \cdot \phi_i(x), \\ h(x) \approx h_N(x) = 1 + \sum_{i=1}^N h_i^N \cdot \phi_i(x), \end{cases} \quad (4)$$

где $g_i, h_i \in \mathbb{R}$, $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — набор базисных функций, и N — фиксированное целое число. В основном, в силу аналитичности функций g и h [2], данным базисом берется последовательность степеней $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ [3, 5, 7]. Функции g и h в свою очередь представлялись в виде степенных рядов

$$\begin{cases} g(x) \approx g_N(x) = 1 + \sum_{i=1}^N g_i^N \cdot x^{2 \cdot i}, \\ h(x) \approx h_N(x) = 1 + \sum_{i=1}^N h_i^N \cdot x^{2 \cdot i}. \end{cases} \quad (5)$$

Также использовались для расчетов и другие базисы, например в статье [8] разложение велось по полиномам Чебышева.

Зафиксировав некоторый базис функций, выберем теперь набор из N точек $\{x_j\}_{j=1}^N$, равномерно распределенных на полуинтервале $(0, 1]$. Подставив в систему (1) представление функций g и h в виде (5) и рассмотрев полученные равенства в точках $\{x_j\}_{j=1}^N$, получим систему из $2N$ нелинейных уравнений

$$\begin{cases} g_N(x_j) = -\alpha_N \cdot g_N\left(g_N\left(-\frac{x_j}{\alpha_N}\right)\right), \\ \delta_N \cdot h_N(x_j) = \alpha_N \cdot g'_N\left(g_N\left(\frac{x_j}{\alpha_N}\right)\right) \cdot h_N\left(\frac{x_j}{\alpha_N}\right) + \alpha_N \cdot h_N\left(g_N\left(\frac{x_j}{\alpha_N}\right)\right), \\ j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (6)$$

относительно коэффициентов g_i, h_i разложений (5). Добавляя к системе (6) следующие соотношения

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{g(1)}, \\ \delta = \alpha \cdot (g'(1) + h(1)), \end{cases} \quad (7)$$

полученные путем рассмотрения уравнений (1) при $x = 0$, мы получаем замкнутую систему уравнений относительно коэффициентов $h_1, \dots, h_N, g_1, \dots, g_N$ и α_N, δ_N .

Численно решая систему (6) методом Ньютона, получаем приближенные значения α_N, δ_N констант α и δ . Из вычислительной практики получено, что в случае выбора разложений (5), мы наблюдаем сходимость данного метода [3, 5, 7].

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N = \alpha, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = \delta, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x) = g(x), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} h_N(x) = h(x), \end{cases} \quad (8)$$

где $x \in [-1, 1]$.

Решение системы (6) можно упростить, воспользовавшись важным свойством второго уравнения из системы (1) — число δ является собственным числом оператора

$$[Lf](x) = -\alpha \cdot f\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) - \alpha \cdot g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \cdot f\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad (9)$$

а функция h — собственным вектором. Фейгенбаум показал [3], что константа δ является наибольшим по модулю собственным значением данного оператора (9) относительно функции g , полученной из первого уравнения системы (1). Исходя из этого, вычислив коэффициенты g_1, \dots, g_N и α_N из соответствующих уравнений системы (6), можно найти число δ_N и вектор $\mathbf{h}^N = (h_1, \dots, h_N)^T$ как максимальное по модулю собственное значение, и соответствующий собственный вектор оператора (9), вычислив данный оператор в точках $\{x_j\}_{j=1}^N$. Кейт Бриггс использовал для решения данной задачи степенной метод [5].

1.3. Дискретизация. Метод неопределенных коэффициентов. Другим подходом дискретизации системы (1) является метод неопределенных коэффициентов (МНК) [3, 9]. Данный метод также основывается на представлении решения в виде степенных рядов (5). Однако, в отличие от метода коллокаций, мы не вычисляем значения функций в конкретных точках, а рассматриваем систему уравнений, полученных после подстановки рядов (5) в систему (1), и приравнивая получаемые коэффициенты при соответствующих степенях в левой и правой части равенств. После всех необходимых преобразований мы получаем следующую систему уравнений на коэффициенты разложения функции g :

$$\begin{cases} g_1^N = G_1(g_1^N, \dots, g_N^N, \alpha_N), \\ \dots, \\ g_N^N = G_N(g_1^N, \dots, g_N^N, \alpha_N) \end{cases} \quad (10)$$

и, соответственно, систему уравнений на коэффициенты разложения функции h :

$$\begin{cases} \delta_N \cdot h_1^N = H_1(h_1^N, \dots, h_N^N, \alpha_N, g_1^N, \dots, g_N^N), \\ \dots, \\ \delta_N \cdot h_N^N = H_N(h_1^N, \dots, h_N^N, \alpha_N, g_1^N, \dots, g_N^N). \end{cases} \quad (11)$$

Добавляя к системам (10) и (11) соотношения (7), мы получаем замкнутую систему на коэффициенты $h_1, \dots, h_N, g_1, \dots, g_N$ и α_N, δ_N . Решая данную систему методом Ньютона, мы так же, как и в случае с методом коллокаций, получаем некоторое приближение α_N, δ_N к константам α, δ . Аналогично нахождение числа δ и функции h можно упростить, рассматривая систему (11) при вычисленных g_1, \dots, g_N и α_N как задачу на нахождение максимального по модулю собственного значения и соответствующего собственного вектора.

Основная сложность данного подхода к дискретизации заключается в вычислении функций G_i и H_i , где G_i являются многочленами от g_1, \dots, g_N и рациональными функциями от α_N , а H_i являются многочленами от g_1, \dots, g_N , рациональными функциями от α_N , и линейны по h_1, \dots, h_N . В случае большого числа N данные функции становятся громоздкими, и требуют специальных подходов к их вычислению. Однако системы (10) и (11), по сравнению с системой (6), имеют более близкие свойства к исходной системе (1). Можно сказать, что системы (10) и (11) являются проекцией на конечномерное пространство системы (1), где функции и заменяются конечномерными векторами $\mathbf{g}^N = (g_1, \dots, g_N)^T$ и $\mathbf{h}^N = (h_1, \dots, h_N)^T$.

В силу того, что вычисление второго уравнения системы (1) при известном решении первого в той или иной дискретизации, находится уже известными эффективными методами задач на собственные значения, будем рассматривать алгоритмы именно на примере решения первого уравнения исходной системы.

Рассматриваемый в данном параграфе метод дискретизации можно использовать для сравнения с методом коллокаций и их взаимной проверки.

2. Описание предлагаемых новых методов расчета

Все известные ранее вычисления первого уравнения из системы (1) так или иначе сводились к многомерному методу Ньютона, требующему *сложной вычислительной процедуры — обращения матрицы Якоби*. Рассмотрим теперь предлагаемые в данной статье методы, позволяющие избежать этой дорогостоящей операции.

2.1. Метод последовательных приближений.

2.1.1. Вывод системы рекуррентных уравнений. Вернемся к системе уравнений (10), являющейся дискретизацией первого уравнения из системы (1) методом неопределенных коэффициентов. Заметим, что система (10) представляет собой уравнение неподвижной точки относительно вектора $\mathbf{g}^N = (g_1, \dots, g_N)^T$. Воспользуемся этим, предварительно получив из системы (1) следующие соотношения

$$\begin{cases} g(1) = -\frac{1}{\alpha}, \\ g'(1) = -\alpha. \end{cases} \quad (12)$$

Исходя из выбранного степенного разложения (5), условия (12) можно представить в конечном виде

$$\begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^N g_i^N = -\frac{1}{\alpha}, \\ \sum_{i=1}^N (2i) \cdot g_i^N = -\alpha. \end{cases} \quad (13)$$

Теперь, исходя из системы (10) и соотношений (13), выпишем следующую систему рекуррентных уравнений:

$$\begin{cases} g_1^{N,(n+1)} = -1 - \frac{1}{\alpha_N^{(n)}} - \sum_{i=2}^N g_i^{N,(n)}, \\ g_k^{N,(n+1)} = G_k^N \left(g_1^{N,(n)}, \dots, g_N^{N,(n)}, \alpha_N^{(n)} \right), \\ k = 2, \dots, N, \\ \alpha_N^{(n+1)} = - \sum_{i=1}^N (2i) \cdot g_i^{N,(n+1)}, \end{cases} \quad (14)$$

$n \in \mathbb{N}$, где

$$k! \cdot G_k^N = \frac{d^k}{dx^k} \left(-\alpha_N \cdot g_N \left(g_N \left(-\frac{x}{\alpha_N} \right) \right) \right) \Big|_{x=0}. \quad (15)$$

Зафиксировав некоторое начальное приближение $\mathbf{g}_0^N = (g_1^{(0)}, \dots, g_N^{(0)})^T$ и $\alpha_N^{(0)}$, можем, итерируя достаточно долго систему (14), вычислить приближение $\mathbf{g}^N = (g_1, \dots, g_N)^T$ и α_N для заданного N .

2.1.2. Качественные соображения о сходимости данного метода. Уравнения в системе (14), где присутствуют функции G_k^N , представляют собой проекцию первого уравнения из системы (1) на конечномерное пространство размерности N с базисом $\{x^n\}_{n=0}^N$. Однако такая проекция обладает особенностью изначального функционального уравнения — гиперболической расходимостью. При непосредственном итерировании только уравнения с функциями G_k^N из системы (14) итерационный процесс будет расходиться. Данная расходимость связана с наличием одномерного измерения в функциональном пространстве унимодальных функций, в направлении которого первое уравнение из системы (1) — уравнение на неподвижную точку g — является не сжимающим, а растягивающим отображением [1, 2, 9].

Для стабилизации сходимости итераций вводятся дополнительные равенства (12), полученные из самого функционального уравнения (1). С преобразованием данных соотношений (12) в вид, приведенный в системе (14), итерационный процесс (14) становится сходящимся к искомым неизвестным.

Из вычислительной практики известно, что если постепенно увеличивать число N и выбирать каждый раз начальное значение, полученное из предыдущего расчета, то получается сходящийся процесс при $n \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ к искомым g и α . Численные расчеты показывают, что итерационный процесс сходится линейно.

2.1.3. Особенности вычислений функций G_k^N . Формулы в системе (13), где участвуют функции G_k^N , не зависят друг от друга и могут быть вычислены параллельно, однако вычисление самих функций представляет определенную сложность и требует дополнительных методов. Используя символьные вычисления, можно предварительно вычислить производные в функциях G_k^N , получив алгебраические выражения, которые уже можно использовать в итерациях (14). Другой подход для вычисления функций G_k^N — использование формулы Фаа-ди-Бруно [10], выраженную через полиномы Бэлла $B_{n,k}$, при этом вычисляя сами полиномы по рекуррентным формулам [11].

2.2. Метод быстрого преобразования Фурье применительно к методу последовательных приближений.

2.2.1. Модификация метода последовательных приближений (МПП) с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ, Fast Fourier Transformation — FFT). Вычисление функций G_k^N из системы (13) представляет собой более общую задачу — вычисление k -й произ-

водной композиции функций. Рассмотрим для решения данной задачи возможность применения быстрого преобразования Фурье. Введем обозначения

$$F[a_m] := FFT[a_m], \quad (16)$$

где $FFT[a_m]$ — быстрое преобразование Фурье последовательности a_m .

Заметим, что если $f \sim \sum_{n=0}^N f_n \cdot x^n$, преобразование Фурье коэффициентов f_n можно представить в виде

$$F[f_n] := \left\{ f \left(\exp \left(-\frac{2\pi n}{N} i \right) \right), n = 0, \dots, N-1 \right\}. \quad (17)$$

В случае, если g_n — коэффициенты представления функции g в виде степенного ряда, то первое уравнение из системы (1), рассмотрев его в точках $\{x_n = \exp(-\frac{2\pi i}{N} n), n = 0, \dots, N-1\}$ и учитывая разложения (5), можно будет переписать следующим образом:

$$F[g_n^N] = -\alpha_N \cdot g_N \left(F \left[\frac{g_n^N}{\alpha_N} \right] \right), \quad (18)$$

получив отсюда

$$g_n^N = -\alpha_N \cdot F^{-1} \left[g_N \left(F \left[\frac{g_n^N}{\alpha_N} \right] \right) \right], \quad (19)$$

что, по сути, является более короткой записью системы (10). Исходя из этого, перепишем рекуррентные соотношения (14) в следующем виде:

$$\begin{cases} g_1^{N,(n+1)} = -1 - \frac{1}{\alpha_N^{(n)}} - \sum_{i=2}^N g_i^{N,(n)}, \\ g_k^{N,(n+1)} = -\alpha_N^{(n)} \cdot F^{-1} \left[g_N^{(n)} \left(F \left[\frac{g_k^{N,(n)}}{\alpha_N^{(n)}} \right] \right) \right], \\ \alpha_N^{(n+1)} = -\sum_{i=1}^N (2i) \cdot g_i^{N,(n+1)}. \end{cases} \quad (20)$$

Уравнения (20) отличаются от системы (14) только способом вычисления функций G_n^k ; на сходимость самого итерационного процесса это не влияет. Скорость сходимости данного процесса аналогична скорости сходимости системы (14).

2.2.2. Оценка сложности предложенного алгоритма и сравнение с методом последовательных приближений и методом Ньютона. Исходя из того, что сложность алгоритма быстрого преобразования Фурье $O((N) \cdot \log(N))$ [12], основная сложность в данной системе (20) будет состоять в вычислении многочлена g_N N -й степени в N точках. Однако, в силу того, что вычисление многочлена в разных точках можно проводить параллельно, сложность алгоритма, представленного соотношениями (20), можно будет оценить как $O(N) \cdot N/m$ на каждую итерацию, где m — количество параллельных процессов. Совокупно сложность алгоритма будет $O(N) \cdot N^2/m$ с учетом линейной сходимости метода последовательных приближений.

По сравнению с другими способами вычисления функций G_n^k , применение быстрого преобразования Фурье является оптимальным.

В случае символьного вычисления G_n^k необходимо производить разложения композиции многочленов N -й степени на каждом шаге итерации, что приводит к $O(N!)$ сложности. Данная сложность, очевидно, значительно выше, чем $O(N^2)$.

В случае применения формулы Фаа-ди-Бруно [10], выраженной через полиномы Бэлла $B_{n,k}$, вычисленные по рекуррентным формулам [11], сложность вычисления функций G_n^k становится $O(N^3)$. Данная сложность также заметно выше, по сравнению с использованием быстрого преобразования Фурье.

В сравнении с методом Ньютона, у метода последовательных приближений с использованием БПФ два преимущества.

Во-первых, в случае параллельного расчета, данный метод можно линейно масштабировать, сводя сложность вычислений на каждый процессор к $O(N^2)/m$, где m — количество процессоров в системе. Параллельное масштабирование в применении метода Ньютона гораздо более ограничено необходимостью обращения матрицы Якоби.

Во-вторых, метод последовательных приближений с использованием БПФ требует для хранения в памяти только искомый вектор коэффициентов g_k^N , и вектор его фурье-преобразования $F[g_k^N]$, что требует $O(N)$ загрузки памяти компьютера. В методе Ньютона необходимо держать в памяти всю матрицу Якоби, что приводит к требованию по памяти $O(N^2)$.

2.2.3. Применение метода последовательных приближений с БПФ вместе с методом Ньютона. Стоит также отметить, что метод последовательных приближений с БПФ может эффективно работать в паре с методом Ньютона.

По методу Ньютона для уточнения получаемых значащих цифр необходимо делать одну дополнительную итерацию. В силу того, что в среднем на каждой итерации метода Ньютона количество значащих знаков возрастает вдвое, на этапе дополнительной итерации происходит потеря большого количества вычисленных значащих знаков. Метод последовательных приближений с БПФ позволил бы уменьшить потерю значительного количества значащих знаков, в случае его применения на этапе проверки вычисленного значения методом Ньютона.

2.3. Численно-аналитический метод вычисления функциональных уравнений.

2.3.1. Описание алгоритма. Рассмотрим теперь численно-аналитический алгоритм, позволяющий получать решения функциональных уравнений, когда сами коэффициенты разложений искомого решения представляются в виде рядов по малому параметру. Введем в систему уравнений (1) свободный параметр β , предварительно введя следующие разложения

$$\begin{cases} g_\beta(x, \beta) = 1 + g_1(\beta) \cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(\beta) \cdot \beta^{n-1} \cdot x^{2n}, \\ h_\beta(x, \beta) = 1 + h_1(\beta) \cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} h_n(\beta) \cdot \beta^{n-1} \cdot x^{2n}, \end{cases} \quad (21)$$

и

$$\begin{cases} g(x, \beta) = 1 + g_1(\beta) \cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(\beta) \cdot x^{2n}, \\ h(x, \beta) = 1 + h_1(\beta) \cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} h_n(\beta) \cdot x^{2n}. \end{cases} \quad (22)$$

Неизвестные коэффициенты тогда будут тоже представлены в виде рядов

$$\begin{cases} g_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} \cdot \beta^k, \\ \alpha(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot \beta^k, \\ h_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k} \cdot \beta^k, \\ \delta(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \cdot \beta^k. \end{cases} \quad (23)$$

Тогда, предварительно выполнив замену $x \rightarrow x \cdot \alpha(\beta)$, можно систему уравнений (1) переписать следующим образом:

$$\begin{cases} g(\alpha(\beta) \cdot x, \beta) = -\alpha(\beta) \cdot g_{\beta}(g(x, \beta), \beta), \\ \delta(\beta) \cdot h(\alpha(\beta) \cdot x, \beta) = \alpha(\beta) \cdot g'_{\beta}(g(x, \beta), \beta) \cdot h(x, \beta) + \alpha(\beta) \cdot h_{\beta}(g(x, \beta), \beta). \end{cases} \quad (24)$$

При $\beta = 1$ в силу аналитичности функций g и h разложения (21, 22), представленные в виде степенного ряда, становятся решениями системы (1).

Подставляя разложения (21)–(23) в систему (24) и приравнявая получаемые коэффициенты, получаем цепочку уравнений, из которых последовательно можно вычислять неизвестные коэффициенты в разложениях (23). В частности, при $x = 0$, $\beta = 0$ и при степени $x^2 \cdot \beta^0$ из первого уравнения системы (24) получаем систему

$$\begin{cases} 1 + \alpha_0 \cdot (1 + g_{1,0}) = 0, \\ 2g_{1,0} + \alpha_0 = 0, \end{cases} \quad (25)$$

решением которой является

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 + \sqrt{3}, \\ g_{1,0} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}. \end{cases} \quad (26)$$

2.3.2. Вывод первых коэффициентов искомых разложений. По цепочке вычисляя коэффициенты, решая последовательность линейных уравнений, при $\beta = 1$, получаем следующие разложения констант α и δ :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \sqrt{3} + \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{37}{936} + \frac{53}{1872}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{21967}{438048} - \frac{3053}{97344}\sqrt{3}\right) + \dots, \\ \delta &= -4 - \sqrt{3} + \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{9}\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{346709}{623376} + \frac{79357}{311688}\sqrt{3}\right) + \\ &\quad + \left(-\frac{224225865065}{126833951088} + \frac{786425631715}{761003706528}\sqrt{3}\right) + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Приведем также разложения первых коэффициентов функции g

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{265}{1872} + \frac{101}{1248}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{113621}{876096} - \frac{124663}{1752192}\sqrt{3}\right) + \dots, \\ g_2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3\sqrt{3} + 5}{5\sqrt{3} + 9} + \frac{1}{72} \cdot \frac{71\sqrt{3} + 123}{265\sqrt{3} + 459} + \left(-\frac{113}{5184} \cdot \frac{9973081\sqrt{3} + 17273883}{13058763\sqrt{3} + 22618441}\right) + \dots, \\ g_3 &= -\frac{1}{12} \cdot \frac{7 + 4\sqrt{3}}{93\sqrt{3} + 161} + \frac{1}{432} \cdot \frac{457975465\sqrt{3} + 793236774}{110530697\sqrt{3} + 191444783} + \dots, \\ g_4 &= \frac{1}{3744} \cdot \frac{12327 + 7117\sqrt{3}}{51409\sqrt{3} + 89043} + \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

и функции h

$$\begin{aligned}h_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \left(\frac{13}{24} - \frac{23}{72}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{29947}{623376} - \frac{763}{46176}\sqrt{3}\right) + \dots, \\h_2 &= \frac{1}{12} \cdot \frac{45 + 26\sqrt{3}}{97\sqrt{3} + 168} + \left(-\frac{1}{648} \cdot \frac{806125404 + 465416719\sqrt{3}}{50843527 + 29354524\sqrt{3}}\right) + \dots, \\h_3 &= -\frac{1}{12} \cdot \frac{424267\sqrt{3} + 734852}{79976509\sqrt{3} + 138523377} + \dots\end{aligned}\tag{29}$$

2.3.3. Особенности данного метода. Основная сложность в данном методе заключается в вычислении коэффициентов при членах $x^j \cdot \beta^i$ после подстановки разложений (21)–(23) в систему (24). Однако, благодаря возможностям символьных вычислений, данные ряды были вычислены более чем с 15-ю членами, аналитический вид которых при повышении порядка быстро становится очень громоздким. Численные вычисления показали сходимость рядов (27)–(29) к известным вычисленным значениям (3). Также вычисления показали, что члены рядов (27)–(29), являющиеся коэффициентами в разложениях (23), при $\beta = 1$ асимптотически уменьшаются как геометрическая прогрессия со знаменателем $q \approx 2.2$.

Стоит отметить, что данные разложения (27)–(29) не единственны, и зависят от выбора задания параметра β в уравнениях (1). Однако здесь был выбран наиболее простой способ задания параметра β , требующий наименьшего количества вычислений. Задание параметра β в разложении (21) при более высоких степенях привело бы как к более сложному начальному алгебраическому уравнению, подобному (25), так и к более сложным вычислениям для нахождения коэффициентов более высокого порядка. В то же время сходимость рядов с заданием β при более высоких степенях в разложении (21) привело бы к более быстрой сходимости получаемых разложений.

Использование численно-аналитических алгоритмов также было применено ранее автором для уравнений в частных производных [13].

2.3.4. Сравнение с другими методами. Отличительной особенностью данного численно-аналитического метода, по сравнению с численными алгоритмами, является возможность получения точных коэффициентов искомым разложениям. Данная возможность позволяет использовать различные методы ускорения сходимости степенных рядов, требующих высокой точности значений коэффициентов разложений, таких как аппроксимация Паде или преобразование Шенкса [14, 15]. Методы ускорения сходимости позволяют, основываясь на небольшом количестве вычисленных коэффициентов разложений, получать гораздо большее количество правильных знаков, нежели получаемых прямым суммированием ряда.

Также данные разложения могут быть полезны для теоретического исследования чисел α и δ .

Заключение

В статье предложено три новых подхода к решению нелинейных функциональных уравнений на примере решения уравнения Фейгенбаума.

Два из них связаны с применением численного метода последовательных приближений к дискретизированной системе (10). В первом методе удалось выписать итерационную схему вычисления искомым коэффициентов разложений неизвестных функций. Основная проблема в данном подходе заключалась в вычислении производных высших порядков композиции функций, представленных полиномами. В связи с этим во втором методе была предложена возможность свести вычисление производных высших порядков к быстрому преобразованию Фурье.

Третий метод представлял собой шаг в сторону получения аналитического представления неизвестных функций и констант нелинейного функционального уравнения. Для этого был введен в уравнение дополнительный параметр β таким образом, чтобы коэффициенты искомым разложений удалось находить, решая последовательно линейные уравнения, полученные из степенного разложения данного функционального уравнения.

В заключение отметим, что все методы, предлагаемые в настоящей работе, были продемонстрированы на примере функционального уравнения Фейгенбаума, однако их можно также применять и к другим нелинейным функциональным уравнениям, имеющим близкие свойства.

Список литературы

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 253 с.
2. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. 1983. Т. 141, № 2. С. 343–374. DOI: 10.3367/UFNr.0141.198310e.0343.
3. Feigenbaum M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations // Journal of Statistical Physics. 1979. Vol. 21, no. 6. P. 669–706. DOI: 10.1007/BF01107909.
4. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // Journal of Statistical Physics. 1978. Vol. 19, no. 1. P. 25–52. DOI: 10.1007/BF01020332.
5. Briggs K. How to calculate the Feigenbaum constants on your PC // Australian Mathematical Society Gazette. 1989. Vol. 16. P. 89–92.
6. Broadhurst D. Feigenbaum constants to 1018 decimal places [Electronic resource]. 22 March 1999. Available from: <http://www.plouffe.fr/simon/constants/feigenbaum.txt>.
7. Briggs K. A precise calculation of the Feigenbaum constants // Mathematics of Computation. 1991. Vol. 57, no. 195. P. 435–439. DOI: 10.2307/2938684.
8. Molteni A. An efficient method for the computation of the Feigenbaum constants to high precision [Electronic resource] // arXiv:1602.02357. arXiv Preprint, 2016. Available from: <https://arxiv.org/abs/1602.02357>.
9. Кузнецов С. Динамический хаос. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
10. Faà di Bruno F. Sullo sviluppo delle funzioni // Annali di Scienze Matematiche e Fisiche. 1855. Vol. 6. P. 479–480.
11. Bell E. T. Partition polynomials // Annals of Mathematics. 1927. Vol. 29, no. 1–4. P. 38–46. DOI: 10.2307/1967979.
12. Heideman M. T., Johnson D., Burrus C. Gauss and the history of the fast Fourier transform // IEEE ASSP Magazine. 1984. Vol. 1, no. 4. P. 14–21. DOI: 10.1109/MASSP.1984.1162257.
13. Полуновский А. А. Временные разложения решений уравнений математической физики // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 3. С. 393–402. DOI: 10.1134/S0374064120030103.
14. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 296 с.
15. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.

References

1. Schuster HG. Deterministic Chaos: An Introduction. Weinheim: Physik-Verlag; 1984. 220 p.
2. Feigenbaum MJ. Universal behavior in nonlinear systems. Los Alamos Science. 1980;1(1):4–27.
3. Feigenbaum MJ. The universal metric properties of nonlinear transformations. Journal of Statistical Physics. 1979;21(6):669–706. DOI: 10.1007/BF01107909.
4. Feigenbaum MJ. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. Journal of Statistical Physics. 1978;19(1):25–52. DOI: 10.1007/BF01020332.
5. Briggs K. How to calculate the Feigenbaum constants on your PC. Australian Mathematical Society Gazette. 1989;16:89–92.

6. Broadhurst D. Feigenbaum constants to 1018 decimal places [Electronic resource]. 22 March 1999. Available from: <http://www.plouffe.fr/simon/constants/feigenbaum.txt>.
7. Briggs K. A precise calculation of the Feigenbaum constants. *Mathematics of Computation*. 1991;57(195):435–439. DOI: 10.2307/2938684.
8. Molteni A. An efficient method for the computation of the Feigenbaum constants to high precision [Electronic resource]. arXiv:1602.02357. arXiv Preprint; 2016. Available from: <https://arxiv.org/abs/1602.02357>.
9. Kuznetsov S. *Dynamical Chaos*. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit; 2006. 356 p. (in Russian).
10. Faà di Bruno F. Sullo sviluppo delle funzioni. *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*. 1855;6:479–480 (in Italian).
11. Bell ET. Partition polynomials. *Annals of Mathematics*. 1927;29(1–4):38–46. DOI: 10.2307/1967979.
12. Heideman MT, Johnson D, Burrus C. Gauss and the history of the fast Fourier transform. *IEEE ASSP Magazine*. 1984;1(4):14–21. DOI: 10.1109/MASSP.1984.1162257.
13. Polunovskii AA. Time expansions of equations of mathematical physics. *Differential Equations*. 2020;56(3):381–391. DOI: 10.1134/S0012266120030106.
14. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. New York, London: Academic Press; 1964. 229 p.
15. Baker GA, Graves-Morris P. *Padé Approximants*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press; 1996. 746 p. DOI: 10.1017/CBO9780511530074.



Полуновский Андрей Андреевич — родился в Донецке (Украина). Окончил Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (2019). В настоящее время работает в Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН в должности младшего научного сотрудника. Научные интересы: турбулентность, хаос, степенные ряды, метод неопределенных коэффициентов, функциональные уравнения, уравнения Навье–Стокса, универсальность Фейгенбаума.

Россия, 127051 Москва, Большой Каретный переулок, д. 19, стр. 1
 Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
 E-mail: arap2009@yandex.ru
 ORCID: 0000-0002-6557-3649
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1170892