



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Научная статья
УДК 57.087

DOI: 10.18500/0869-6632-003041
EDN: RALPKR

Применение совместного спектра сингулярностей для анализа кооперативной динамики сложных систем

Г. А. Гуйо, А. Н. Павлов✉

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: guyo199814@gmail.com, ✉pavlov.alexeyn@gmail.com

Поступила в редакцию 23.01.2023, принята к публикации 4.04.2023,
опубликована онлайн 21.04.2023, опубликована 31.05.2023

Аннотация. Целью данной работы является обобщение на случай кооперативной динамики взаимодействующих систем метода максимумов модулей вейвлет-преобразования и введение в рассмотрение совместного спектра сингулярностей. Методом исследования является основанный на вейвлетах мультифрактальный формализм, обобщенная версия которого применяется для количественного описания эффекта синхронизации хаоса в динамике модельных систем. Рассматриваются модели связанных систем Рёсслера и парных нейронов. В результате проведенных исследований отмечены основные изменения совместных спектров сингулярностей при переходе от синхронных колебаний к несинхронным в первой модели и к режиму частичной синхронизации во второй. Заключение по итогам проведенного исследования: предложенный подход может найти применение в исследованиях кооперативной динамики систем различной природы.

Ключевые слова: мультифрактальный формализм, совместный спектр сингулярностей, синхронизация колебаний, вейвлет-преобразование.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-22-00065).

Для цитирования: Гуйо Г. А., Павлов А. Н. Применение совместного спектра сингулярностей для анализа кооперативной динамики сложных систем // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 305–315. DOI: 10.18500/0869-6632-003041. EDN: RALPKR

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Application of joint singularity spectrum to analyze cooperative dynamics of complex systems

G. A. Guyo, A. N. Pavlov✉

Saratov State University, Russia

E-mail: guyo199814@gmail.com, ✉pavlov.alexeyn@gmail.com

Received 23.01.2023, accepted 4.04.2023, available online 21.04.2023,
published 31.05.2023

Abstract. Purpose of this work is to generalize the wavelet-transform modulus maxima method to the case of cooperative dynamics of interacting systems and to introduce the joint singularity spectrum into consideration. The research method is the wavelet-based multifractal formalism, the generalized version of which is used to quantitatively describe the effect of chaotic synchronization in the dynamics of model systems. Models of coupled Rössler systems and paired nephrons are considered. As a result of the studies carried out, the main changes in the joint singularity spectra were noted during the transition from synchronous to asynchronous oscillations in the first model and to the partial synchronization mode in the second model. Conclusion. Proposed approach can be used in studies of the cooperative dynamics of systems of various nature.

Keywords: multifractal formalism, joint singularity spectrum, synchronization of oscillations, wavelet transform.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation, project No. 22-22-00065.

For citation: Guyo GA, Pavlov AN. Application of joint singularity spectrum to analyze cooperative dynamics of complex systems. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3):305–315. DOI: 10.18500/0869-6632-003041

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Сложные системы часто включают взаимодействующие компоненты, которые, в свою очередь, могут демонстрировать сложное поведение. Изменение динамики таких систем является следствием изменения функционирования отдельных компонентов или связей между ними. В последнем случае важно получать информацию о кооперативной динамике элементов сложной системы (например, сложной сети), используя количественные критерии, отражающие взаимодействие подсистем. С этой целью могут использоваться взаимные спектры, взаимные ковариационные или корреляционные функции [1], а также специальные характеристики (например, меры взаимной информации [2]). Учитывая то обстоятельство, что динамика отдельных элементов может демонстрировать мультифрактальную структуру, для количественного описания которой недостаточно одной величины, отражающей закономерности частотной зависимости спектральной плотности мощности или спада корреляций, достаточно часто при проведении исследований используется подход на основе расчета спектра сингулярностей [3]. Известно много методов вычисления данного спектра, каждый из которых имеет свои особенности и ограничения. В частности, подход на основе структурных функций [4, 5] не подходит для изучения слабых сингулярностей. Более универсальными методами считаются мультифрактальный формализм, основанный на вейвлетах [6, 7], и мультифрактальный флуктуационный анализ [8, 9]. Первый из них за счет выбора подходящей вейвлет-функции (имеющей большое число нулевых моментов) позволяет игнорировать полиномиальный тренд в экспериментальных данных. Обобщение концепции мультифракталов на случай кооперативной динамики сложных систем было предложено, например, в [10], где были введены в рассмотрение совместные мультифрактальные меры. Однако статья [10] базировалась на классическом подходе к анализу, предусматривающем покрытие фрактального множества геометрическими объектами (например, кубиками), который имеет ряд ограничений при изучении сигналов.

В данной работе мы рассматриваем обобщение на случай взаимной динамики автоколебательных систем метода максимумов модулей вейвлет-преобразования, в рамках которого в качестве элементов покрытия выбираются вейвлет-функции. Это позволяет, с одной стороны, использовать более универсальный подход, применимый как к стационарным процессам, так и к сигналам систем с меняющимися во времени характеристиками. С другой стороны, обеспечивается анализ как сильных, так и слабых сингулярностей (больших и малых флуктуаций) при использовании алгоритма вычисления обобщенных статистических функций. Мы иллюстрируем предлагаемый обобщенный метод на примере эффекта синхронизации хаотических колебаний в модельных системах: модели двух связанных систем Рёсслера и более сложной модели парных нефронов.

1. Методы

1.1. Метод расчета совместного спектра сингулярностей. Основанный на вейвлетах мультифрактальный формализм был предложен в работе [6] и протестирован на различных примерах в последующих публикациях [7, 11–13]. Он предусматривает вычисление максимумов модулей (скелетона) вейвлет-преобразования, который содержит основную информацию о сигнале, и анализ степенных закономерностей вейвлет-коэффициентов в зависимости от масштаба [14]. Алгоритмически, вычисления спектра сингулярностей функции $f(t)$ можно разделить на два этапа, первым из которых является вычисление коэффициентов непрерывного вейвлет-преобразования

$$W(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (1)$$

где a — параметр масштаба, b характеризует смещение вейвлет-функции ψ , а в качестве $f(t)$ рассматривается функция распределения анализируемого сигнала. Выбор базисной функции ψ определяется спецификой анализируемого процесса. Теоретически спектр сингулярностей не зависит от выбора базиса, но в случае нестационарных процессов присутствие тренда оказывает влияние на проводимые оценки. В задачах мультифрактального анализа часто применяют вейвлет-базисы, сконструированные на основе производных функции Гаусса

$$\psi^{(m)} = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left[\exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \right], \quad (2)$$

например, WAVE ($m = 1$) или МНАТ ($m = 2$). В данной работе мы использовали МНАТ-вейвлет.

Как и для любого метода анализа структуры сигналов, исследователю необходимо оценить чувствительность результатов к выбору алгоритмических параметров, в частности, диапазона масштабов для изучения и количественного описания свойств фрактальности.

При наличии сингулярного поведения в точке t^* , в окрестности этой точки $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t) = P_n(t) + C|t - t^*|^{h(t^*)}, \quad (3)$$

то есть в виде регулярной составляющей $P_n(t)$ (полинома степени n) и слагаемого, описывающего сингулярность, которое характеризуется нецелым значением $h(t^*)$. При выборе вейвлета, имеющего m нулевых моментов ($m \geq n$),

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(t) \psi(t) dt = 0, \quad (4)$$

и в результате вейвлет-анализа мы получим степенную зависимость

$$W(a, t^*) \sim a^{h(t^*)}, \quad (5)$$

которая количественно описывается показателем Гёльдера $h(t^*)$. Каждая сингулярность приводит к появлению одной или нескольких линий локальных максимумов модулей вейвлет-преобразования (линий скелетона), поэтому именно в скелетоне вейвлет-преобразования содержится вся информация о сингулярностях $f(t)$.

Однако провести вычисления по формуле (5) затруднительно из-за влияния соседних сингулярностей, препятствующих рассмотрению приемлемого для расчетов диапазона масштабов. По этой причине в качестве второго этапа вычислений в работе [7] предложено проводить построение обобщенных статистических функций

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left(\sup_{\hat{a} \leq a} |W(\hat{a}, b_l(\hat{a}))| \right)^q, \quad (6)$$

где $L(a)$ — полный набор линий локальных экстремумов $W(a, b)$ на масштабе a , $b_l(\hat{a})$ — расположение на масштабе $\hat{a} \leq a$ максимума, который относится к линии l , а \sup рассматривается для того, чтобы избежать появления нулевых значений для отрицательных q . Согласно выводам работ [6, 7], обобщенные статистические функции обычно демонстрируют степенное поведение

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad (7)$$

где $\tau(q)$ — скейлинговые показатели, которые являются промежуточными величинами при расчете показателей Гёльдера $h(q)$ и спектра сингулярностей $D(h)$

$$D(h) = qh - \tau(q), \quad h(q) = \frac{d\tau(q)}{dq}. \quad (8)$$

Описание алгоритма максимумов модулей вейвлет-преобразования более подробно приведено в работе [7]. Расчет $\tau(q)$ проводится по линейным участкам зависимостей $\lg Z(q, a)$ от $\lg a$ (мы использовали диапазон $\lg a \in [0.7, 4.0]$).

Рассмотрим теперь обобщение этого алгоритма на случай кооперативной динамики сложных систем, а именно для описания сложного скейлинга в функционировании взаимодействующих подсистем по сигналам, отражающим функционирование каждой из них. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — функции распределения двух анализируемых процессов. Вычислим для каждой из них непрерывное вейвлет-преобразование

$$W_f(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (9)$$

$$W_g(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

и соответствующие скелетоны. Возможно несколько вариантов решения задачи проведения совместного мультифрактального анализа. Например, можно изначально рассмотреть взаимное вейвлет-преобразование функций распределения с выделением его максимумов модулей. В данной работе мы выбрали сравнительно простой подход, состоящий в модификации процедуры вычисления обобщенных статистических функций

$$Z^2(q, a) = \sum_{i \in L_f(a)} \left(\sup_{\hat{a} \leq a} |W_f(\hat{a}, b_i(\hat{a}))| \right)^q \times \sum_{j \in L_g(a)} \left(\sup_{\tilde{a} \leq a} |W_g(\tilde{a}, b_j(\tilde{a}))| \right)^q. \quad (10)$$

Здесь $L_f(a)$ и $L_g(a)$ обозначают скелетоны для каждой из функций распределения, $b_i(\hat{a})$ и $b_j(\tilde{a})$ — расположение на масштабах $\hat{a} \leq a$ и $\tilde{a} \leq a$ максимумов, которые относятся к линиям i и j .

Дальнейшие расчеты проводятся в соответствии с ранее приведенным алгоритмом, то есть вычисляются показатели скейлинга $\tau(q)$ и спектр сингулярностей $D(h)$ по формулам (7) и (8), соответственно. Все параметры алгоритма выбраны такими же, как и для расчетов по одному сигналу. Однако теперь вычисленный спектр сингулярностей можно интерпретировать как совместный, так как он отражает совместную динамику подсистем, генерирующих анализируемые сигналы. Для тестирования предлагаемого подхода рассмотрим два примера математических моделей.

1.2. Связанные системы Рёсслера. Модель двух связанных систем Рёсслера часто используется в качестве базового примера для тестирования различных методов анализа сигналов, учитывая, что ее динамика хорошо изучена, и наличие разнообразных вариантов сложных колебаний в этой модели позволяет проанализировать возможность диагностики смены режимов функционирования при изменении управляющих параметров. Модель описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dx_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \frac{dz_{1,2}}{dt} &= b + z_{1,2}(x_{1,2} - c),\end{aligned}\tag{11}$$

в которой параметры $a = 0.15$, $b = 0.2$ и c определяют режим динамики отдельных подсистем, а $\gamma = 0.02$ является коэффициентом их связи. Для рассмотрения неидентичных подсистем введем расстройку частот $\omega_{1,2} = 1.0 \pm \Delta$, и выберем два управляющих параметра c и Δ , вариация которых позволяет наблюдать режимы синхронных и несинхронных хаотических колебаний, гиперхаотический режим, а также различные варианты периодических и квазипериодических колебаний. Чтобы изучать поперечную структуру хаотических аттракторов, которая демонстрирует свойство мультифрактальности, можно выбрать в качестве исследуемых сигналов последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре. Рассмотрим в качестве анализируемых сигналов последовательности времен возврата в секущие плоскости $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, соответствующие режимам синхронного хаоса ($c = 6.8$, $\Delta = 0.009$) и несинхронного хаоса ($c = 6.8$, $\Delta = 0.010$). На рис. 1 приведены последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре $x_1 = 0$ для выбранных режимов. Видно, что они визуально отличаются, поэтому можно ожидать и существенных отличий в характеристиках мультифрактальной структуры соответствующих аттракторов.

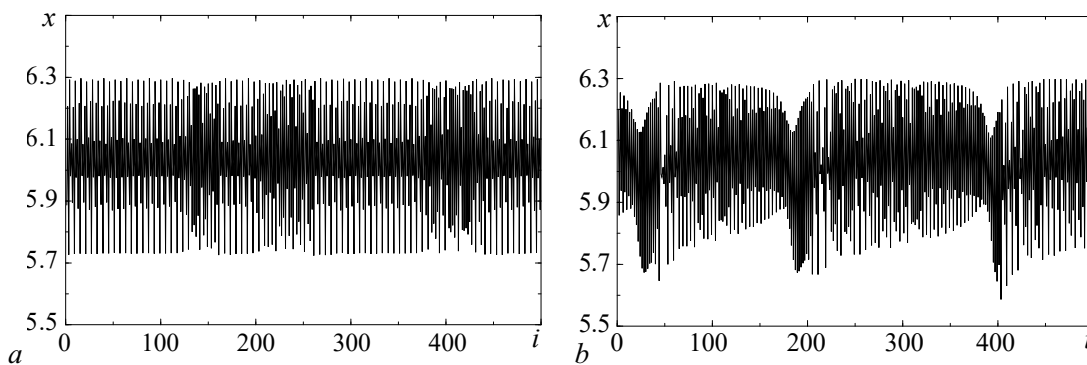


Рис. 1. Последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре $x_1 = 0$ для режима синхронного (a) и несинхронного (b) хаоса в модели двух связанных систем Рёсслера

Fig. 1. Return time sequences into the Poincaré section $x_1 = 0$ for synchronous (a) and asynchronous (b) chaos in the model of two coupled Rössler systems

1.3. Модель парных нефронов. Модель парных нефронов является более сложной; для одного структурного элемента почки она была предложена в работе [15] и построена в соответствии с физиологическими представлениями о почечной авторегуляции кровотока. Модель оказалась удачной в том смысле, что она позволяет описать многие особенности реальной динамики нефронов, которые были обнаружены в многочисленных экспериментальных исследованиях. Например, с помощью модели хорошо описывается переход от почти регулярных колебаний давления жидкости в проксимальных канальцах нефронов (случай нормы) к сильно нерегулярным при почечной гипертонии. Отметим, что модель является очень сложной, и ее полное описание занимает несколько страниц. По этой причине в данной статье мы приводим лишь схематичное описание

$$\begin{aligned} \frac{dP_t}{dt} &= \frac{1}{C_{\text{tub}}} \{F_f(P_t, r) - F_{\text{reab}} - (P_t - P_d)/R_{\text{Hen}}\}, \\ \frac{dr}{dt} &= v_r, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{1}{\omega} \{P_{av}(P_t, r) - P_{eq}(r, \Psi(X_3, \beta)) - \omega dv_r\}, \\ \frac{dX_1}{dt} &= \frac{1}{R_{\text{Hen}}} (P_t - P_d) - \frac{3}{T} X_1, \\ \frac{dX_2}{dt} &= \frac{3}{T} (X_1 - X_2), \\ \frac{dX_3}{dt} &= \frac{3}{T} (X_2 - X_3). \end{aligned} \quad (12)$$

Переменная P_t описывает давление в проксимальном канальце, F_f — скорость гломерулярной фильтрации, C_{tub} — эластическая проводимость канальца. Разность $P_t - P_d$ между проксимальным и дистальным давлением и сопротивление R_{Hen} определяют поток жидкости в петле Генле. Реабсорбция в проксимальном канальце F_{reab} считается постоянной величиной. Второе и третье уравнения характеризуют динамику, обусловленную контролем потока в приносящей артериоле. Здесь r — радиус сосуда, v_r — скорость его изменения, d описывает затухание колебаний, ω является мерой массы по отношению к эластической проводимости стенки артериолы, а P_{av} обозначает среднее давление в артериоле. P_{eq} представляет собой значение этого давления, при котором артериола находится в равновесном состоянии с ее текущим значением радиуса и мышечной активацией Ψ . Выражения для F_f , P_{av} и P_{eq} включают ряд алгебраических уравнений, которые необходимо решить вместе с интегрированием системы (12). Три оставшихся уравнения описывают задержку T в механизме канальцево-гломерулярной регуляции, которая является причиной появления медленных колебаний переменной P_t с частотой 0.02...0.04 Гц. Миогенный механизм, описываемый вторым и третьим уравнениями, приводит к возникновению более быстрых колебаний (0.1...0.2 Гц), амплитуда которых значительно меньше амплитуды медленного ритма. Переход от нормального артериального давления к почечной гипертонии сопровождается увеличением силы обратной связи (параметр β модели (12)). Пример хаотической динамики модели (12) приведен на рис. 2.

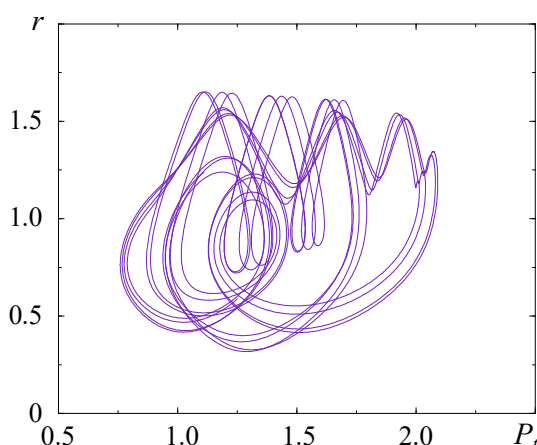


Рис. 2. Пример хаотических колебаний в модели нефрона
Fig. 2. An example of chaotic oscillations in nephron model

Три оставшихся уравнения описывают задержку T в механизме канальцево-гломерулярной регуляции, которая является причиной появления медленных колебаний переменной P_t с частотой 0.02...0.04 Гц. Миогенный механизм, описываемый вторым и третьим уравнениями, приводит к возникновению более быстрых колебаний (0.1...0.2 Гц), амплитуда которых значительно меньше амплитуды медленного ритма. Переход от нормального артериального давления к почечной гипертонии сопровождается увеличением силы обратной связи (параметр β модели (12)). Пример хаотической динамики модели (12) приведен на рис. 2.

Взаимодействие парных нефронов, в основном, определяется электрохимическими сигналами. В модели (12) равновесное давление в приносящей артериоле зависит от текущего радиуса r и уровня активации Ψ гладких мышц. Мышечная активация распространяется вдоль приносящей артериолы затухающим образом. Когда она достигает точки разветвления с артериолой соседнего нефрона, часть сигнала может распространяться по ней и оказывать влияние на соседний нефрон. В модели парных нефронов эту связь можно описать добавлением вклада уровня активации в одном нефроне к уровню активации в соседнем нефроне [16]

$$\Psi_{1,2}^* = \Psi_{1,2} + \gamma\Psi_{2,1}, \quad (13)$$

где γ — параметр связи и $\Psi_{1,2}$ — уровни активации двух несвязанных нефронов, определяемые их соответствующими потоками Генле. Чтобы разделить медленные и быстрые колебания и характеризовать их по отдельности, нами выбраны параметры $\gamma = 0.005$ и $\beta = 27.3$ и рассмотрены последовательности времен возврата в сечения Пуанкаре $P_t = 1.6$ и $v_r = 0$. Для иллюстрации метода рассмотрены примеры полной синхронизации хаотических колебаний ($T_1 = T_2 = 13.5$ с, где T_1 и T_2 — значения задержки в механизме обратной связи для каждого нефрона) и частичной хаотической синхронизации, наблюдаемой только для медленной динамики ($T_1 = 13.5$ с, $T_2 = 13.4$ с). Анализируемые последовательности времен возврата для выбранных режимов динамики показаны на рис. 3.

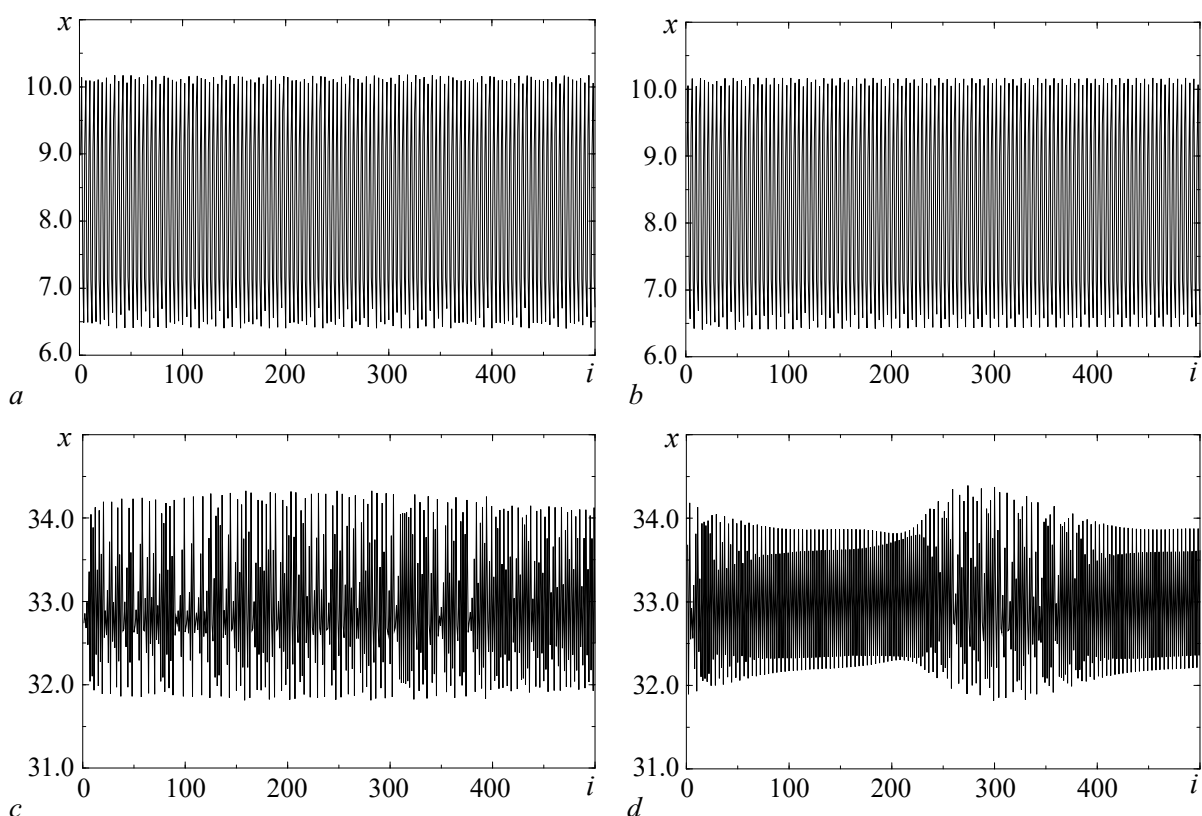


Рис. 3. Последовательности времен возврата для быстрой (a, b) и медленной (c, d) динамики в режимах полной (a, c) и частичной синхронизации (b, d) в модели парных нефронов (для первой подсистемы)

Fig. 3. Return times sequences for fast (a, b) and slow (c, d) dynamics in the regimes of full synchronization (a, c) and partial synchronization (b, d) in the model of two paired nephrons (for the first unit)

2. Результаты

2.1. Связанные системы Рёсслера. Переход через границу области хаотической синхронизации в модели (11) сопровождается значительными изменениями совместного спектра сингулярностей. Эти изменения аналогичны ранее обсуждавшимся результатам для метода максимумов модулей вейвлет-преобразования, примененного к анализу динамики одной из взаимодействующих подсистем [12]. Однако в данном случае различие состоит в рассмотрении спектра сингулярностей, который отражает кооперативную динамику модели (11). Можно выделить два основных отличия синхронного и несинхронного режимов: разное положение $D(h)$ вдоль оси h , которое можно описать расположением максимума функции $D(h)$, а также изменение ширины спектра — диапазона показателей Гёльдера. С точки зрения первого отличия можно констатировать переход от положительно коррелированных последовательностей времен возврата ($h > 0.5$) несинхронного режима к антикоррелированным ($h < 0.5$) при синхронизации.

Так, на рис. 4 продемонстрировано уменьшение среднего значения показателя Гёльдера (соответствующего $q = 0$, то есть максимуму спектра сингулярностей) с 1.16 для несинхронных хаотических колебаний до 0.01 для синхронного хаоса. Второе отличие проявляется не менее четко: ширина спектра сингулярностей, которая может интерпретироваться как мера неоднородности (сложности) режима динамики, уменьшается с 0.48 до 0.02 при переходе в область синхронизации. Таким образом, диагностировать эффект синхронизации можно с помощью любой из этих мер — среднего значения показателя Гёльдера, описывающего изменение корреляционных свойств последовательностей времен возврата, или меры неоднородности, свидетельствующей об уменьшении сложности синхронного режима. Отметим, что в данном контексте сложность оценивается числом характеристик, с помощью которых можно описать режим, а не его предсказуемостью. Например, белый шум, являющийся дельта-коррелированным процессом, можно интерпретировать как простой, поскольку он описывается одним значением показателя Гёльдера $h = 0.5$ и спектром сингулярностей, состоящим из одной точки. Для приведенного на рис. 4 примера синхронный режим также является намного более простым по сравнению с несинхронным, хотя в обоих случаях речь идет о хаотических колебаниях в модели (11). Выявленные различия являются прогнозируемыми, учитывая отличия последовательностей времен возврата рассматриваемых режимов (см. рис. 1).

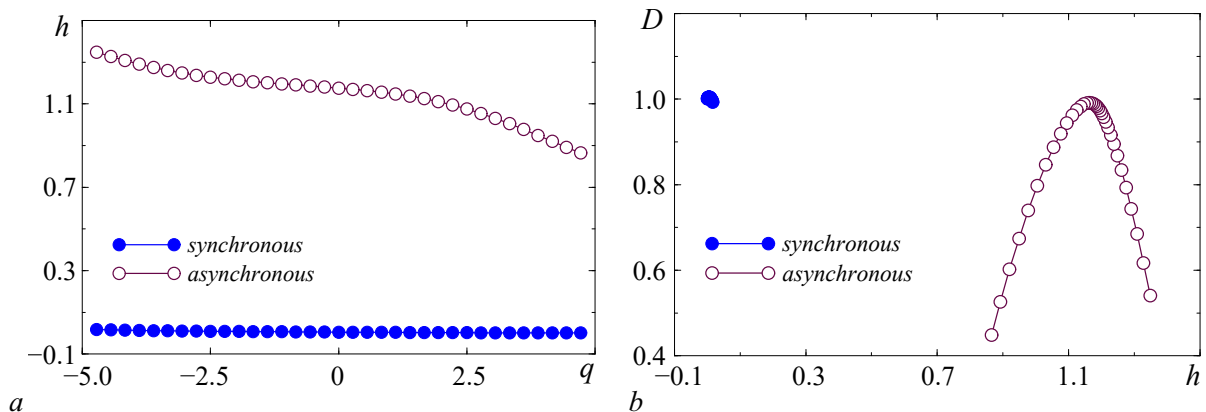


Рис. 4. Мультифрактальный анализ синхронной и несинхронной динамики связанных систем Рёсслера: a — показатели Гёльдера, b — спектры сингулярностей

Fig. 4. Multifractal analysis of synchronous and asynchronous dynamics of coupled Rössler systems: a — Hölder exponents, b — singularity spectra

2.2. Модель парных нефронов. При выбранных значениях управляющих параметров модель (12) демонстрирует существенно различное поведение для быстрых и медленных ритмов структурных элементов почки (рис. 5). Как отмечается в работах [16, 17], для парных нефронов (и в модели, и в физиологических экспериментах, проводимых на лабораторных животных) можно наблюдать различные режимы полной, частичной синхронизации, а также несинхронное поведение. Например, частичная синхронизация состоит в подстройке частот одних ритмов при отсутствии подстройки частот других. В примере, представленном на рис. 5, при $T_2 = 13.4$ с наблюдается синхронная динамика быстрых ритмов, сопровождающаяся несинхронным поведением для медленных (см. рис. 3). Это приводит к отсутствию принципиальных различий совместных спектров сингулярностей для быстрых ритмических процессов (при $T_2 = 13.4$ с и $T_2 = 13.5$ с они соответствуют спектрам сингулярностей процессов, близких к монофрактальным, а сама динамика быстрых ритмов близка к периодической). В то же время для медленной динамики парных нефронов отличия есть, и они существенные. По сравнению с более простым примером связанных систем Рёсслера, изменения совместного спектра сингулярностей описываются одной характеристикой — положением спектра, то есть средним значением показателя Гёльдера. Как и ранее, происходит четко фиксируемый переход от положительно коррелированных последовательностей времен возврата в секущую Пуанкаре к антикоррелированным последовательностям, и среднее значение h уменьшается с 0.71 до 0.15. Обнаруженная смена типа корреляций является отражением взаимосогласованной динамики подсистем при синхронизации, и она достаточно типична при увеличении связи между подсистемами или уменьшении расстройки по частоте, приводящей к переходу внутрь области синхронизации [12]. Уменьшения при этом ширины совместного спектра сингулярностей не происходит, в чем можно убедиться наложением спектров сингулярностей обоих режимов. Таким образом, оба режима демонстрируют сложное поведение.

Приведенные примеры свидетельствуют о разных проявлениях эффекта синхронизации в мультифрактальной структуре хаотических аттракторов связанных автоколебательных систем, которые можно диагностировать с помощью предлагаемого подхода. Отметим, что целью данной работы является обобщение метода максимумов модулей вейвлет-преобразования на случай кооперативной динамики сложных систем. Представленные примеры являются иллюстрациями, подтверждающими применимость предложенного подхода для решения таких задач. Мы полагаем, что метод может найти более широкое применение в исследованиях кооперативной динамики различных систем, включая сложные сети.

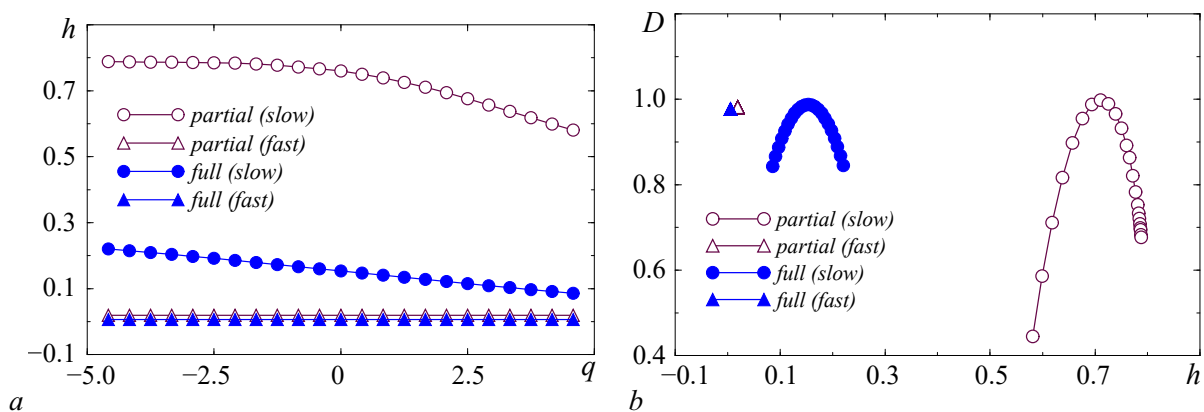


Рис. 5. Мультифрактальный анализ полной и частичной синхронизации в модели парных нефронов: a — показатели Гёльдера, b — спектры сингулярностей

Fig. 5. Multifractal analysis of full and partial synchronization in the model of paired nephrons: a — Hölder exponents, b — singularity spectra

Заключение

Предложено обобщение на случай кооперативной динамики автоколебательных систем основанного на вейвлетах мультифрактального формализма. Установлены изменения совместного спектра сингулярностей при синхронизации хаотических колебаний в модели связанных систем Рёсслера, которые включают изменение типа корреляций в последовательностях времен возврата (переход от положительных корреляций к антикорреляциям) и значительное уменьшение ширины спектра, что позволяет говорить об упрощении динамики относительно числа характеристик, необходимых для диагностики режима. При рассмотрении частичной синхронизации в модели парных нефронов отмечены изменения положения совместного спектра сингулярностей, которые связаны со средним значением показателя Гёльдера (переходом к антикорреляциям при синхронизации медленных колебаний), но не сопровождаются уменьшением ширины спектра. Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности диагностики изменений мультифрактальной структуры хаотических аттракторов при синхронизации хаоса. Предложенное обобщение основанного на вейвлетах мультифрактального формализма может найти применение при решении широкого круга задач анализа кооперативной динамики сложных систем по экспериментальным данным.

References

1. Bendat JS, Piersol AG. Random Data: Analysis and Measurement Procedures. 4th edition. New Jersey: John Wiley & Sons; 2010. 640 p. DOI: 10.1002/9781118032428.
2. Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. 3rd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 2007. 1256 p.
3. Halsey TC, Jensen MH, Kadanoff LP, Procaccia I, Shraiman BI. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets. *Phys. Rev. A.* 1986;33(2):1141–1151. DOI: 10.1103/PhysRevA.33.1141.
4. Frish U, Parisi G. On the singularity structure of fully developed turbulence. In: Ghil M, Benzi R, Parisi G, editors. *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. New York: North-Holland; 1985. P. 84–88.
5. Benzi R, Vulpiani A. Multifractal approach to fully developed turbulence. *Rendiconti Lincei. Scienze Fisiche e Naturali.* 2022;33(3):471–477. DOI: 10.1007/s12210-022-01078-5.
6. Muzy JF, Bacry E, Arneodo A. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data. *Phys. Rev. Lett.* 1991;67(25):3515–3518. DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.3515.
7. Muzy JF, Bacry E, Arneodo A. The multifractal formalism revisited with wavelets. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1994;4(2):245–302. DOI: 10.1142/S0218127494000204.
8. Kantelhardt JW, Zschiegner SA, Koscielny-Bunde E, Havlin S, Bunde A, Stanley HE. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 2002;316(1–4):87–114. DOI: 10.1016/S0378-4371(02)01383-3.
9. Ihlen EAF. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in Matlab. *Frontiers in Physiology.* 2012;3:141. DOI: 10.3389/fphys.2012.00141.
10. Meneveau C, Sreenivasan KR, Kailasnath P, Fan MS. Joint multifractal measures: Theory and applications to turbulence. *Phys. Rev. A.* 1990;41(2):894–913. DOI: 10.1103/PhysRevA.41.894.
11. Ivanov PC, Amaral LAN, Goldberger AL, Havlin S, Rosenblum MG, Struzik ZR, Stanley HE. Multifractality in human heartbeat dynamics. *Nature.* 1999;399(6735):461–465. DOI: 10.1038/20924.
12. Pavlov AN, Sosnovtseva OV, Ziganshin AR, Holstein-Rathlou NH, Mosekilde E. Multiscality in the dynamics of coupled chaotic systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 2002;316(1–4):233–249. DOI: 10.1016/S0378-4371(02)01202-5.

13. Pavlov AN, Pavlova ON, Abdurashitov AS, Sindeeva OA, Semyachkina-Glushkovskaya OV, Kurths J. Characterizing scaling properties of complex signals with missed data segments using the multifractal analysis. *Chaos*. 2018;28(1):013124. DOI: 10.1063/1.5009438.
14. Addison PS. *The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance*. 2nd edition. Boca Raton: CRC Press; 2016. 464 p. DOI: 10.1201/9781315372556.
15. Barfred M, Mosekilde E, Holstein-Rathlou NH. Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation. *Chaos*. 1996;6(3):280–287. DOI: 10.1063/1.166175.
16. Postnov DE, Sosnovtseva OV, Mosekilde E, Holstein-Rathlou NH. Cooperative phase dynamics in coupled nephrons. *International Journal of Modern Physics B*. 2001;15(23):3079–3098. DOI: 10.1142/S0217979201007233.
17. Sosnovtseva OV, Pavlov AN, Mosekilde E, Yip KP, Holstein-Rathlou NH, Marsh DJ. Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats. *Am. J. Physiol. Renal. Physiol*. 2007;293(5):F1545–F1555. DOI: 10.1152/ajprenal.00054.2007.



Гуйо Герман Александрович — родился в Саратове (1998). Окончил среднюю школу № 94 и поступил на факультет нелинейных процессов (2016). С отличием окончил институт физики СГУ по направлению «Информационные системы и технологии» (2022). С 2022 года является младшим научным сотрудником кафедры физики открытых систем и аспирантом этой кафедры. Научные интересы — нейронаука, динамический хаос, теория колебаний и волн. Победитель стипендиальной программы Владимира Потанина, стипендиат Правительства РФ.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: guyo199814@gmail.com



Павлов Алексей Николаевич — родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998), доктор физико-математических наук (2009). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика, анализ временных рядов. Автор более 150 научных статей, монографий и учебных пособий.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: pavlov.alexeyn@gmail.com
 ORCID: 0000-0001-9946-8938
 AuthorID (eLibrary.Ru): 87201