

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4)

Научная статья
УДК 517.957

DOI: 10.18500/0869-6632-003053
EDN: WZPQWD

Неустойчивость Тьюринга в однопараметрической системе Гирера–Мейнхардта

С. В. Ревина^{1,2}✉, А. С. Рябов¹

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

E-mail: ✉svrevina@sfnu.ru, asryabov@sfnu.ru

Поступила в редакцию 30.11.2022, принята к публикации 5.04.2023,

опубликована онлайн 18.07.2023, опубликована 31.07.2023

Аннотация. Цель настоящей работы — найти область необходимых и достаточных условий диффузионной неустойчивости на плоскости параметров (τ, d) системы Гирера–Мейнхардта, где τ — параметр релаксации, d — безразмерный коэффициент диффузии; вывести аналитическую зависимость критического волнового числа от характерного размера пространственной области; получить явные представления вторичных пространственно распределенных структур, образующихся в результате бифуркации пространственно-однородного положения равновесия, в виде рядов по степеням надкритичности. **Методы.** Для нахождения области неустойчивости Тьюринга применяются методы линейного анализа устойчивости. Для отыскания вторичных решений (тьюринговских структур) применяется метод Ляпунова–Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем. **Результаты.** Получены выражения критического коэффициента диффузии через собственные значения оператора Лапласа для произвольной ограниченной области. В явном виде найдена зависимость критического коэффициента диффузии от характерного размера области в двух случаях: для интервала и прямоугольника. Построены явные выражения первых членов разложений вторичных стационарных решений по параметру надкритичности в одномерном случае, а также для прямоугольника, когда одно из волновых чисел равно нулю. В указанных случаях найдены достаточные условия мягкой потери устойчивости, приведены примеры вторичных решений. **Заключение.** Предложен общий подход для нахождения области неустойчивости Тьюринга и построения вторичных пространственно распределенных структур. Данный подход может быть применен к широкому классу математических моделей, описываемых системой двух уравнений реакции–диффузии.

Ключевые слова: неустойчивость Тьюринга, системы реакции–диффузии, необходимые и достаточные условия диффузионной неустойчивости, критический коэффициент диффузии.

Для цитирования: Ревина С. В., Рябов А. С. Неустойчивость Тьюринга в однопараметрической системе Гирера–Мейнхардта // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 501–522. DOI: 10.18500/0869-6632-003053. EDN: WZPQWD

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Turing instability in the one-parameter Gierer–Meinhardt system

S. V. Revina^{1,2}✉, A. S. Ryabov¹

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

²Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russia

E-mail: ✉svrevina@sfedu.ru, asryabov@sfedu.ru

Received 30.11.2022, accepted 5.04.2023,

available online 18.07.2023, published 31.07.2023

Abstract. The purpose of this work is to find the region of necessary and sufficient conditions for diffusion instability on the parameter plane (τ, d) of the Gierer–Meinhardt system, where τ is the relaxation parameter, d is the dimensionless diffusion coefficient; to derive analytically the dependence of the critical wave number on the characteristic size of the spatial region; to obtain explicit representations of secondary spatially distributed structures, formed as a result of bifurcation of a spatially homogeneous equilibrium position, in the form of series in degrees of supercriticality. *Methods.* To find the region of Turing instability, methods of linear stability analysis are applied. To find secondary solutions (Turing structures), the Lyapunov–Schmidt method is used in the form developed by V.I. Yudovich. *Results.* Expressions for the critical diffusion coefficient in terms of the eigenvalues of the Laplace operator for an arbitrary bounded region are obtained. The dependence of the critical diffusion coefficient on the characteristic size of the region is found explicitly in two cases: when the region is an interval and a rectangle. Explicit expressions for the first terms of the expansions of the secondary stationary solutions with respect to the supercriticality parameter are constructed in the one-dimensional case, as well as for a rectangle, when one of the wave numbers is equal to zero. In these cases, sufficient conditions for a soft loss of stability are found, and examples of secondary solutions are given. *Conclusion.* A general approach is proposed for finding the region of Turing instability and constructing secondary spatially distributed structures. This approach can be applied to a wide class of mathematical models described by a system of two reaction–diffusion equations.

Keywords: Turing instability, reaction–diffusion systems, necessary and sufficient conditions for diffusion instability, critical diffusion coefficient.

For citation: Revina SV, Ryabov AS. Turing instability in the one-parameter Gierer–Meinhardt system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(4):501–522. DOI: 10.18500/0869-6632-003053

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Уравнения реакции–диффузии применяются при математическом моделировании различных природных явлений, им посвящено большое количество публикаций (см., например, [1], а также недавние работы [2, 3] и цитируемую в них литературу). В результате бифуркаций пространственно-однородных состояний в системах реакции–диффузии возникают пространственно неоднородные режимы. На границе рассматриваемой области при этом возможно выполнение различных типов краевых условий. Особый интерес, на наш взгляд, представляет исследование систем реакции–диффузии аналитическими методами. В [4] для бесконечномерного аналога системы Рэля (который также можно рассматривать как частный случай системы ФитцХью–Нагумо) найдены явные асимптотические представления автоколебательных режимов, а в [5] — стационарные режимы при краевых условиях Дирихле и смешанных краевых условиях. В [6] для системы Рэля изучены бифуркации на инвариантных подпространствах системы при выполнении краевых условий Неймана, в [7] при тех же условиях исследовано бифуркационное поведение стационарных режимов, ответвляющихся от нулевого положения равновесия системы ФитцХью–Нагумо.

Начатое А. Тьюрингом в его классической работе [8] исследование диффузионной неустойчивости, впоследствии названной неустойчивостью Тьюринга, продолжают многие авторы

по настоящее время. В монографии [9] положено начало изучению области в пространстве параметров системы, называемой областью неустойчивости Тьюринга.

В [10] на примере системы Шнакенберга предложен подход для аналитического описания области неустойчивости Тьюринга в пространстве параметров системы, а также для нахождения диапазона критических волновых чисел, для которых имеет место эта неустойчивость. Показано, что граница области необходимых условий является огибающей границы области достаточных условий. В случае системы Шнакенберга точки пересечения двух соседних кривых достаточных условий лежат на прямой, угловой коэффициент которой зависит от собственных значений оператора Лапласа в рассматриваемой области. В [10] также показано, что полуось $d > 1$, где d — коэффициент диффузии, можно представить в виде объединения полуинтервалов, каждому из которых соответствует критическое волновое число, при котором происходит потеря устойчивости положения равновесия системы.

В [11] дано обобщение результатов работы [10] на некоторый класс систем реакции–диффузии, которые помимо коэффициента диффузии содержат два параметра. При этом предполагается, что коэффициенты линеаризованной в окрестности положения равновесия системы подчиняются некоторым ограничениям (гипотезам). Предложена замена переменных, при которой область неустойчивости Тьюринга принимает некоторый стандартный вид. Система Гирера–Мейнхардта, рассматриваемая в настоящей работе, содержит лишь один параметр помимо коэффициента диффузии. Для двухпараметрической системы Гирера–Мейнхардта [12] одна из гипотез работы [11] не выполняется.

Система Гирера–Мейнхардта была предложена в [12], описание математической модели при различных значениях параметров дано в [13]. В настоящей работе рассматривается частный случай общей модели — система Гирера–Мейнхардта с параметром релаксации $\tau > 0$ [1] в m -мерной ограниченной области $\Omega \subset R^m$ при $t > 0$ с краевыми условиями Неймана на границе

$$u_t = \Delta u - u + \frac{u^2}{v}, \quad \tau v_t = d\Delta v - v + u^2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь $u = u(x, t)$ — активатор, $v = v(x, t)$ — ингибитор, $d > 0$ — безразмерный коэффициент диффузии, равный отношению коэффициентов диффузии ингибитора и активатора, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ — оператор Лапласа. Система (1), (2) имеет единственное пространственно-однородное положение равновесия

$$(u_0, v_0) = (1, 1). \quad (3)$$

Решения сингулярно возмущенной системы Гирера–Мейнхардта с параметром релаксации исследованы в [14], неустойчивость Экхауса и зигзаг-неустойчивость аналитически и численно исследовались для системы Гирера–Мейнхардта в [15].

Целью настоящей работы является вывод необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга положения равновесия (3), нахождение критического коэффициента диффузии и его зависимости от характерного размера области Ω , нахождение вторичных тьюринговых структур в окрестности положения равновесия при малых отклонениях коэффициента диффузии от критического значения. Для описания области неустойчивости Тьюринга используется подход работы [10]. Все построения носят аналитический характер, результаты расчетов приведены лишь для иллюстрации теоретического материала.

1. Необходимые условия неустойчивости Тьюринга

Результаты настоящего раздела известны, мы приводим их для полноты изложения и с целью введения обозначений. Общий подход для нахождения необходимых условий неустойчивости Тьюринга разработан в [9], для системы Гирера–Мейнхардта с параметром релаксации необходимые условия сформулированы в [1]. Разделив второе уравнение системы (1) на τ , введем обозначения для слагаемых реакции

$$f(u, v) = -u + \frac{u^2}{v}, \quad g(u, v) = -\frac{v}{\tau} + \frac{u^2}{\tau} \quad (4)$$

и найдем матрицу Якоби J

$$J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \Big|_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Система (1), (2) в бездиффузионном приближении принимает форму

$$\frac{du}{dt} = -u + \frac{u^2}{v}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau} + \frac{u^2}{\tau}, \quad (6)$$

соответствующее (6) линеаризованное в окрестности (u_0, v_0) уравнение имеет вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = J\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in R^2, \quad (7)$$

где J определена в (5). Собственные значения матрицы Якоби J лежат строго в левой полуплоскости тогда и только тогда, когда

$$\text{Tr}(J) \equiv f_u + g_v = 1 - \frac{1}{\tau} < 0, \quad \text{Det}(J) \equiv f_u g_v - f_v g_u = \frac{1}{\tau} > 0. \quad (8)$$

Из (8) получим условие асимптотической устойчивости в бездиффузионном приближении

$$0 < \tau < 1. \quad (9)$$

Теперь рассмотрим линеаризованную систему с диффузией (1), (2)

$$u_t = \Delta u + f_u \cdot u + f_v \cdot v, \quad v_t = \frac{d}{\tau} \Delta v + g_u \cdot u + g_v \cdot v, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (11)$$

где элементы матрицы Якоби заданы в (5).

Пусть μ_k и ψ_k – собственные значения и собственные функции оператора $-\Delta$ с краевыми условиями Неймана, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\Delta \psi_k + \mu_k \psi_k = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (12)$$

Собственное значение линейного оператора называется простым, если размерность пространства всех собственных и присоединенных векторов, отвечающих данному собственному значению, равна единице. В настоящей работе так же, как и в [10], предполагается простота собственных значений μ_k .

Пусть H — гильбертово пространство вектор-функций $w = (u, v)$ с компонентами $u, v \in L_2(\Omega)$. Пусть оператор $A_0 : H \rightarrow H$, действующий по правилу $A_0 = D\Delta$, определен на множестве вектор-функций $w = (u, v)$ с компонентами из пространства Соболева $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющими краевым условиям (2), где D — это матрица

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда линейризованная система (10), (11) сводится к уравнению в H

$$w_t = Aw, \quad A = A_0 + J, \quad w \in H. \quad (14)$$

Спектр оператора A дискретен в силу компактности его резольвенты в H .

Определение 1. *Положение равновесия (u_0, v_0) называется неустойчивым по Тьюрингу, если все собственные значения линейризованной задачи в бездиффузионном приближении (7) лежат строго в левой полуплоскости и существует собственное значение линейризованной задачи с диффузией (14), которое лежит в правой полуплоскости.*

Рассмотрим линейную спектральную задачу для оператора A (14) в H :

$$A\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi \neq 0. \quad (15)$$

Получим необходимые условия существования собственного значения оператора A в правой полуплоскости.

Разыскивая собственную функцию φ (15) в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа с векторными коэффициентами

$$\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k \psi_k, \quad C_k = (c_k^1, c_k^2), \quad (16)$$

после подстановки рядов (16) в (15) и приравнивания коэффициентов при одинаковых собственных функциях ψ_k , для любого фиксированного k получим линейную систему с матрицей J_k , которой соответствует собственное значение λ_k и собственный вектор C_k :

$$J_k C_k = \lambda_k C_k, \quad C_k \neq 0, \quad (17)$$

где J_k определена формулой

$$J_k = \begin{pmatrix} f_u - \mu_k & f_v \\ g_u & g_v - \frac{d}{\tau} \mu_k \end{pmatrix} \Big|_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} 1 - \mu_k & -1 \\ \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{\tau} - \frac{d}{\tau} \mu_k \end{pmatrix}, \quad (18)$$

причем определитель и след матрицы J_k подчиняются соотношениям

$$\begin{aligned} \text{Tr}(J_k) &= \text{Tr}(J) - \left(1 + \frac{d}{\tau}\right) \mu_k < \text{Tr}(J) < 0, \\ \text{Det}(J_k) &= \frac{d}{\tau} \mu_k^2 - \left(\frac{d}{\tau} \cdot f_u + g_v\right) \mu_k + \text{Det}(J). \end{aligned}$$

Так как $\text{Tr}(J_k) < \text{Tr}(J) < 0$, то потеря устойчивости равновесия (u_0, v_0) может произойти, только если определитель обратится в нуль: $\text{Det}(J_k) = 0$. Так как $\text{Det}(J) > 0$ (8), то $k > 0$ и, следовательно, $\mu_k > 0$.

Через $h(\mu)$ обозначим многочлен

$$h(\mu) = d\mu^2 - (d-1)\mu + 1. \quad (19)$$

Равенство $\text{Det}(J_k) = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $h(\mu_k) = 0$.

Для того чтобы линеаризованная система с диффузией (8), (9) имела собственное значение в правой полуплоскости, необходимо, чтобы трехчлен $h(\mu)$ имел положительные корни. Для этого дискриминант трехчлена должен быть неотрицательным, а второй коэффициент отрицательным. Отсюда получаем ограничение на коэффициент диффузии

$$d \geq (1 + \sqrt{2})^2. \quad (20)$$

В совокупности неравенства (9) и (20) приводят к необходимым условиям неустойчивости Тьюринга на плоскости параметров (τ, d) [1]:

$$0 < \tau < 1, \quad d \geq (1 + \sqrt{2})^2. \quad (21)$$

2. Достаточные условия неустойчивости Тьюринга

Применяя подход [10], получим ограничения на параметры системы, при которых у линеаризованной системы реакции–диффузии (8), (9) существует собственное значение в правой полуплоскости. Учтем дискретность спектра оператора A . Выразим из уравнения $h(\mu_k) = 0$, где $h(\mu)$ задано в (19), коэффициент диффузии d :

$$d_k = \frac{\mu_k + 1}{\mu_k(1 - \mu_k)}. \quad (22)$$

Условие положительности коэффициента диффузии (22) приводит к ограничению

$$\mu_k < 1. \quad (23)$$

Если это условие не выполняется, то неустойчивость Тьюринга не возникает. В одномерном случае $\Omega = (0, \ell)$, когда $\mu_k = (\frac{\pi k}{\ell})^2$, приходим к оценке снизу на размер области: $\ell > \pi k$.

Введем обозначение для $k \in N$

$$\gamma_k = \mu_k + \mu_{k+1} + \mu_k \mu_{k+1}. \quad (24)$$

Заметим, что выражение (24) участвует также в описании области достаточных условий неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга [10], брюсселятора и других систем [11].

С помощью элементарных выкладок доказывается утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\mu_k < 1$ и $\mu_{k+1} < 1$. Равенство $d_k = d_{k+1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\gamma_k = 1$, причем неравенство $d_k < d_{k+1}$ равносильно неравенству $\gamma_k > 1$.

Заметим, что для функции

$$d(y) = \frac{y + 1}{y(1 - y)}, \quad 0 < y < 1, \quad (25)$$

значение $y = \sqrt{2} - 1$ является точкой глобального минимума, причем $d(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} + 1)^2$. Следовательно, для d_k (22) выполняется неравенство: $d_k \geq (1 + \sqrt{2})^2$.

Определение 2. Критическим значением волнового числа назовем такое число k , для которого собственное значение μ_k является корнем многочлена $h(\mu)$: $h(\mu_k) = 0$, при этом для $d < d_k$ все собственные значения линеаризованной системы с диффузией (14) лежат строго в левой полуплоскости, а для $d > d_k$ существует собственное значение системы (14) в правой полуплоскости. При выполнении этих условий d_k называется критическим коэффициентом диффузии.

Для нахождения критического коэффициента диффузии нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, которое доказывается аналогично утверждению 1.

Утверждение 2. Пусть $1 \leq k < m$, $\mu_k < 1$ и $\mu_m < 1$, введем обозначение

$$\gamma_{k,m} = \mu_k + \mu_m + \mu_k \mu_m.$$

Равенство $d_k = d_m$ выполняется тогда и только тогда, когда $\gamma_{k,m} = 1$, причем неравенство $d_k < d_m$ равносильно неравенству $\gamma_{k,m} > 1$.

Утверждения 1 и 2 справедливы для произвольной ограниченной области Ω , в которой оператор Лапласа имеет простые собственные значения μ_k (12). Опишем алгоритм нахождения критического волнового числа k и установим зависимость критического коэффициента диффузии d_k от характерного размера области Ω . Сначала проведем рассуждения для одномерного случая $\Omega = (0, \ell)$.

2.1. Одномерный случай. В этом случае $\mu_k = (\frac{\pi k}{\ell})^2$. Через $\ell_{k,k+1}$ обозначим длину отрезка, для которой $d_k = d_{k+1}$, $k \in N$. Найдем $\ell_{k,k+1}$ из уравнения $\gamma_k = 1$:

$$\ell_{k,k+1}^2 = \frac{\pi^2}{2} \left(\sqrt{(k^2 + (k+1)^2)^2 + 4k^2(k+1)^2} + k^2 + (k+1)^2 \right). \quad (26)$$

Аналогично, следуя утверждению 2, при $1 \leq k < m$, через $\ell_{k,m}$ обозначим длину отрезка, для которой $d_k = d_m$. Найдем $\ell_{k,m}$ из уравнения $\gamma_{k,m} = 1$:

$$\ell_{k,m}^2 = \frac{\pi^2}{2} \left(\sqrt{(k^2 + m^2)^2 + 4k^2 m^2} + k^2 + m^2 \right). \quad (27)$$

Очевидно, что при $m < n$ выполняется неравенство $\ell_{k,m} < \ell_{k,n}$. Найдем значение критического коэффициента диффузии в зависимости от характерного размера области.

Приближенные значения границ отрезка $\ell_{k,k+1}$, соответствующие нескольким первым критическим значениям волнового числа k , приведены в табл. 1.

Таблица 1. Границы отрезка $\ell_{k,k+1}$, соответствующие критическим значениям волнового числа k
Table 1. Boundaries of the segment $\ell_{k,k+1}$, corresponding to the critical values of the wave number k

Критическое волновое число	Промежуток	Границы
$k = 1$	$\ell \in (\pi, \ell_{1,2})$	$\ell_{1,2} = 2.38779 \cdot \pi$
$k = 2$	$\ell \in (\ell_{1,2}, \ell_{2,3})$	$\ell_{2,3} = 3.91738 \cdot \pi$
$k = 3$	$\ell \in (\ell_{2,3}, \ell_{3,4})$	$\ell_{3,4} = 5.46148 \cdot \pi$
$k = 4$	$\ell \in (\ell_{3,4}, \ell_{4,5})$	$\ell_{4,5} = 7.00999 \cdot \pi$
$k = 5$	$\ell \in (\ell_{4,5}, \ell_{5,6})$	$\ell_{5,6} = 8.56046 \cdot \pi$
$k = 6$	$\ell \in (\ell_{5,6}, \ell_{6,7})$	$\ell_{6,7} = 10.11195 \cdot \pi$
$k = 7$	$\ell \in (\ell_{6,7}, \ell_{7,8})$	$\ell_{7,8} = 11.66406 \cdot \pi$
$k = 8$	$\ell \in (\ell_{7,8}, \ell_{8,9})$	$\ell_{8,9} = 13.21656 \cdot \pi$
$k = 9$	$\ell \in (\ell_{8,9}, \ell_{9,10})$	$\ell_{9,10} = 14.76934 \cdot \pi$
$k = 10$	$\ell \in (\ell_{9,10}, \ell_{10,11})$	$\ell_{10,11} = 16.3223 \cdot \pi$

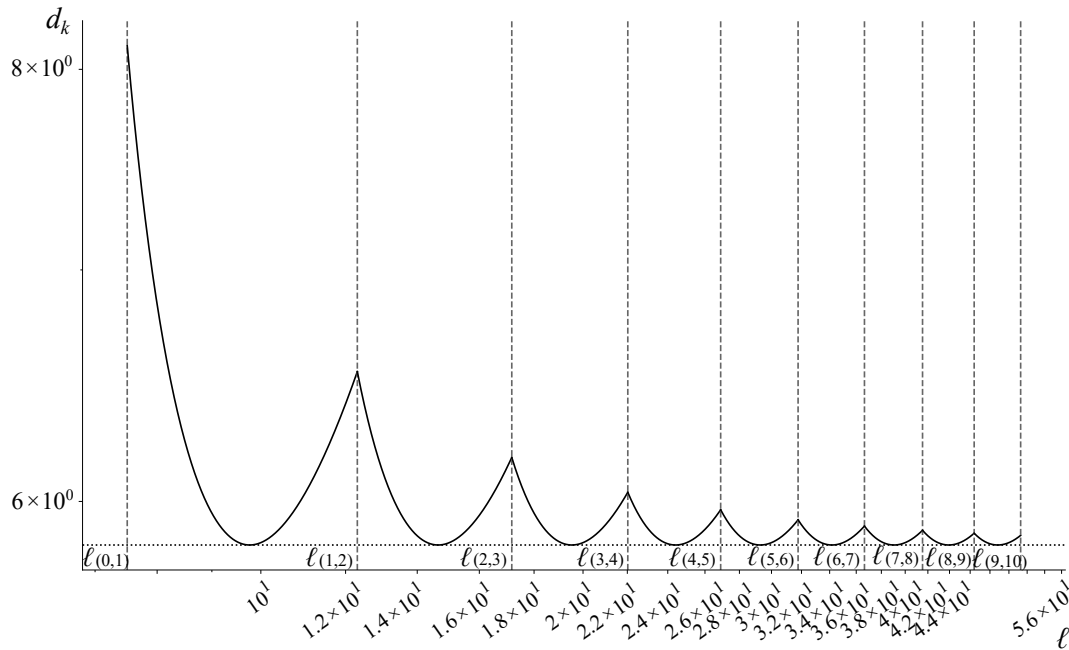


Рис. 1. Зависимость критического коэффициента диффузии $d_k(\ell)$ от длины отрезка (в логарифмическом масштабе)

Fig. 1. Dependence of the critical diffusion coefficient $d_k(\ell)$ on the length of the segment (on a logarithmic scale)

Утверждение 3. Пусть $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$, где $k \in \mathbb{N}$ и $\ell_{0,1} = \pi$. Тогда

$$d_k = \min_m d_m, \quad (28)$$

где минимум берется по всем m , для которых определено выражение d_m .

Доказательство. Докажем утверждение 3. Рассмотрим промежуток $\ell \in (\ell_{0,1}, \ell_{1,2})$. При $\ell \in (\pi, 2\pi]$ определено только значение d_1 . При $\ell \in (2\pi, \ell_{1,2})$ определены d_1 и d_2 , но из неравенства $\gamma_1 > 1$ следует, что $d_1 < d_2$. Аналогичные рассуждения проводятся для нескольких первых значений k .

Пусть теперь $k > 1$, $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$. С ростом ℓ функции $\mu_k(\ell)$, а также $\gamma_k(\ell)$ убывают, и на промежутке $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$ могут быть определены несколько коэффициентов диффузии d_m . Покажем, что d_k — минимальный из них.

Сначала докажем, что $d_m > d_k$ при $m < k$. Действительно, неравенство $d_m > d_k$ равносильно неравенству $\gamma_{m,k} < 1$, которое, в свою очередь, равносильно $\ell > \ell_{m,k}$. Так как $\max_{m < k} \ell_{m,k} = \ell_{k-1,k}$, то на указанном промежутке неравенство выполняется.

Далее убедимся, что $d_k < d_n$ при $n > k$. Действительно, данное неравенство равносильно следующему: $\gamma_{k,n} > 1$, которое выполняется при $\ell < \ell_{k,n}$. Так как $\min_{n > k} \ell_{k,n} = \ell_{k,k+1}$, то требуемое неравенство доказано. \square

Из утверждения 3 следует, что формула (28) дает критическое значение коэффициента диффузии d_k , где k — критическое волновое число. В переменных (τ, d) при $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$ область достаточных условий неустойчивости Тьюринга имеет вид

$$0 < \tau < 1, \quad d \geq d_k. \quad (29)$$

Пусть $d_k(\ell) = d\left(\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2\right)$, где функция $d_k(y)$ определена в (25). Для описания взаимного расположения кривых $d_k(\ell)$ докажем следующее утверждение.

Утверждение 4. На каждом промежутке $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$, $k \in N$, существует единственная точка минимума $\ell = \ell_*$ функции $d_k(\ell)$, причем $d_k(\ell_*) = (1 + \sqrt{2})^2$ и

$$\ell_*^2 = (1 + \sqrt{2})(\pi k)^2; \quad \ell_{k-1,k}^2 \leq (1 + \sqrt{2})(\pi k)^2 \leq \ell_{k,k+1}^2. \quad (30)$$

Доказательство. Для доказательства утверждения 4 сделаем в (25) замену переменных $\xi = \frac{1}{\mu}$. Тогда

$$d(\xi) = \frac{\xi(\xi + 1)}{\xi - 1}. \quad (31)$$

Легко убедиться, что $\xi_* = 1 + \sqrt{2}$ является точкой глобального минимума функции $d(\xi)$, соответствующее критическое значение длины отрезка равно $\ell_*^2 = (\pi k)^2 \xi_*$.

Далее, из (26) получаем неравенство

$$\frac{\ell_{k,k+1}^2}{(\pi k)^2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{(k+1)^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{(k+1)^2}{k^2}} + 1 + \frac{(k+1)^2}{k^2} \right) \geq 1 + \sqrt{2}. \quad (32)$$

Аналогично

$$\frac{\ell_{k-1,k}^2}{(\pi k)^2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{(k-1)^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{(k-1)^2}{k^2}} + 1 + \frac{(k-1)^2}{k^2} \right) \leq 1 + \sqrt{2}. \quad (33)$$

Из (32) и (33) вытекает (30). \square

2.2. Случай прямоугольника. Пусть теперь $\Omega = (0, a) \times (0, b)$. Так как по предположению собственные значения оператора Лапласа простые, то рассмотрим случай несоизмеримых квадратов сторон прямоугольника. Для определенности

$$b^2 = \frac{a^2}{\sqrt{2}}. \quad (34)$$

Введя обозначение $z = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2$, выпишем собственные значения оператора Лапласа:

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (m^2 + \sqrt{2}n^2) = \frac{m^2 + \sqrt{2}n^2}{z}, \quad m, n = 0, 1, \dots \quad (35)$$

Упорядочим $\lambda_{m,n}$ по возрастанию:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \lambda_{1,0}; & \mu_2 &= \lambda_{0,1}; & \mu_3 &= \lambda_{1,1}; \\ \mu_4 &= \lambda_{2,0}; & \mu_5 &= \lambda_{2,1}; & \mu_6 &= \lambda_{0,2}; \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом,

$$\mu_k = \frac{\nu_k}{z}; \quad \nu_k = m^2 + \sqrt{2}n^2. \quad (37)$$

Через $a_{k,m}$ обозначим длину стороны прямоугольника, для которой $d_k = d_m$. Найдем $a_{k,k+1}$ из уравнения $\gamma_k = 1$. Имеем

$$z^2 - (\nu_k + \nu_{k+1})z - \nu_k \nu_{k+1} = 0. \quad (38)$$

Так как $z > 0$, то

$$a_{k,k+1}^2 = \frac{\pi^2}{2} \left(\sqrt{(v_k + v_{k+1})^2 + 4v_k v_{k+1}} + v_k + v_{k+1} \right). \quad (39)$$

Пусть $d_k(a) = d\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 v_k\right)$, где $d_k(y)$ определено в (25). Аналогично утверждению 4 доказывается следующее утверждение.

Утверждение 5. На каждом промежутке $a \in (a_{k-1,k}, a_{k,k+1})$, $k \in N$, существует единственная точка минимума $a = a_*$ функции $d_k(a)$, причем $d_k(a_*) = (1 + \sqrt{2})^2 v_k$

$$a_*^2 = (1 + \sqrt{2})\pi^2 v_k; \quad a_{k-1,k}^2 \leq (1 + \sqrt{2})\pi^2 v_k \leq a_{k,k+1}^2. \quad (40)$$

Из утверждений 4 и 5, а также условий (21) и (29) вытекает, что на каждом промежутке $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$ и $a \in (a_{k-1,k}, a_{k,k+1})$, соответственно, существует единственное значение характерного размера области ℓ_* (соответственно, a_*), для которого необходимые и достаточные условия неустойчивости Тьюринга совпадают. Для систем реакции–диффузии с двумя параметрами, например, для системы Шнакенберга, возникает похожая ситуация [10, 11]. В точке пересечения кривых необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга происходит касание этих кривых. Для однопараметрической системы Гирера–Мейнхардта кривая достаточных условий $d_k(\ell)$ (или $d_k(a)$) в точке минимума касается кривой необходимых условий $d = (1 + \sqrt{2})^2$.

Приближенные значения границ длины стороны прямоугольника $a_{k,k+1}$, соответствующие нескольким первым значениям волнового числа k , приведены в табл. 2.

Таблица 2. Границы стороны $a_{k,k+1}$, соответствующие критическим значениям волнового числа k

Table 2. Boundaries $a_{k,k+1}$ of the side corresponding to the critical values of the wave number k

Критическое волновое число	Промежуток	Границы
$k = 1$	$a \in (\pi, a_{1,2})$	$a_{1,2} = 1.70341 \cdot \pi$
$k = 2$	$a \in (a_{1,2}, a_{2,3})$	$a_{2,3} = 2.13887 \cdot \pi$
$k = 3$	$a \in (a_{2,3}, a_{3,4})$	$a_{3,4} = 2.76998 \cdot \pi$
$k = 4$	$a \in (a_{3,4}, a_{4,5})$	$a_{4,5} = 3.36546 \cdot \pi$
$k = 5$	$a \in (a_{4,5}, a_{5,6})$	$a_{5,6} = 3.65555 \cdot \pi$
$k = 6$	$a \in (a_{5,6}, a_{6,7})$	$a_{6,7} = 3.85352 \cdot \pi$
$k = 7$	$a \in (a_{6,7}, a_{7,8})$	$a_{7,8} = 4.3402 \cdot \pi$
$k = 8$	$a \in (a_{7,8}, a_{8,9})$	$a_{8,9} = 4.74518 \cdot \pi$
$k = 9$	$a \in (a_{8,9}, a_{9,10})$	$a_{9,10} = 4.92167 \cdot \pi$
$k = 10$	$a \in (a_{9,10}, a_{10,11})$	$a_{10,11} = 5.28149 \cdot \pi$

3. Вторичные стационарные решения

Будем интересоваться вторичными стационарными решениями исходной нелинейной системы (1), (2), которые возникают при критическом значении коэффициента диффузии $d = d_k$ в результате потери устойчивости положения равновесия (u_0, v_0) . При рассмотрении неустойчивости Тьюринга такие решения называются тьюринговыми структурами.

Для отыскания тьюринговых структур применим метод Ляпунова–Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем [16, 17]. Этот метод, наряду с методом центрального многообразия, применяется в задачах, описываемых параболическими уравнениями, в частности, уравнениями гидродинамики [18], а также уравнениями реакции–диффузии [4–7]. Сначала рассматриваются линейная спектральная и линейная сопряженная задачи, затем решение нелинейных уравнений разыскивается в виде ряда по степеням надкритичности. Для отыскания членов ряда получаем линейные неоднородные уравнения, из условия разрешимости которых находим коэффициенты уравнения разветвления.

3.1. Линейная спектральная и линейная сопряженная задачи. Здесь и далее k — критическое волновое число, оператор A определен в (14). Тогда сопряженный к оператору A имеет вид: $A^* = A_0 + J^*$, где через J^* обозначен конечномерный оператор, которому соответствует транспонированная к J (5) матрица J^* . Найдем собственные функции операторов A и A^* , соответствующие нулевому собственному значению:

$$A\varphi_k = 0, \quad A^*\Phi_k = 0, \quad \varphi_k \neq 0, \quad \Phi_k \neq 0. \quad (41)$$

Из (15)–(17) следует, что собственные функции имеют вид

$$\varphi_k(x) = C_k \psi_k(x), \quad \Phi_k(x) = D_k \psi_k(x), \quad (42)$$

где $\psi_k(x)$ — собственные функции оператора Лапласа (12), а векторные коэффициенты C_k и D_k являются собственными векторами матриц J_k и J_k^* , соответственно:

$$J_k C_k = 0, \quad J_k^* D_k = 0, \quad C_k \neq 0, \quad D_k \neq 0. \quad (43)$$

Из (43) находим координаты C_k и D_k :

$$C_k = (1; 1 - \mu_k), \quad D_k = \left(1; -\frac{\tau}{2}(1 - \mu_k)\right). \quad (44)$$

Заметим, что в силу ограничений на собственные значения $0 < \mu_k < 1$ и параметр релаксации $0 < \tau < 1$ скалярное произведение векторов φ_k и Φ_k положительно

$$\int_{\Omega} \varphi_k(x) \Phi_k(x) dx = \left(1 - \frac{\tau}{2}(1 - \mu_k)^2\right) \int_{\Omega} \psi_k^2(x) dx > 0. \quad (45)$$

Из условия (45) следует отсутствие клеток в матричном представлении оператора A .

3.2. Уравнение возмущений. После замены переменных в окрестности положения равновесия $(u_0; v_0) = (1; 1)$ (для удобства оставим прежние обозначения $(u; v)$):

$$u \rightarrow u + 1; \quad v \rightarrow v + 1 \quad (46)$$

из (1) приходим к уравнению возмущений

$$u_t = \Delta u - (u + 1) + \frac{(u + 1)^2}{v + 1}, \quad \tau v_t = d \Delta v - (v + 1) + (u + 1)^2. \quad (47)$$

Преобразуем нелинейное слагаемое в первом уравнении (1). Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора и оставляя слагаемые не выше третьей степени

$$\begin{aligned} \frac{1}{v+1} &= 1 - v + v^2 - v^3 + \dots, \\ -(u+1) + (1+u)^2(1-v+v^2-v^3+\dots) &= u - v + (u-v)^2 - v(u-v)^2 + \dots, \end{aligned}$$

приведем уравнения (46) к виду

$$u_t = \Delta u + u - v + (u-v)^2 - v(u-v)^2, \quad \tau v_t = d\Delta v + 2u - v + u^2. \quad (48)$$

Пусть $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$, где k — критическое волновое число. Введем параметр надкритичности ε с помощью замены переменных

$$d = d_k + \varepsilon^2. \quad (49)$$

Тогда уравнение возмущений (48) принимает вид:

$$u_t = \Delta u + u - v + (u-v)^2 - v(u-v)^2, \quad \tau v_t = d_k \Delta v + 2u - v + u^2 + \varepsilon^2 \Delta v. \quad (50)$$

Будем разыскивать стационарное решение системы (50) в виде рядов по степеням параметра ε

$$u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad v(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(x). \quad (51)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . При ε^1 приходим к задаче

$$0 = \Delta u_1 + u_1 - v_1, \quad 0 = d_k \Delta v_1 + 2u_1 - v_1, \quad (52)$$

решением которой является

$$(u_1; v_1) = \beta_1 \Phi_k(x) = \beta_1 C_k \psi_k(x), \quad (53)$$

где $\Phi_k(x)$, C_k определены в (41), (44), амплитуда β_1 пока не определена.

3.3. Уравнения при ε^2 . Приравнявая в (50) выражения при ε^2 , для нахождения (u_2, v_2) приходим к системе

$$\Delta u_2 + u_2 - v_2 = -(u_1 - v_1)^2, \quad d_k \Delta v_2 + 2u_2 - v_2 = -u_1^2. \quad (54)$$

Учитывая выражения u_1, v_1 (53), найдем вектор-функцию правой части системы (54)

$$f_2(x) = -(\mu_k^2; 1) \beta_1^2 \psi_k^2(x). \quad (55)$$

Условие разрешимости системы (54) является ортогональность правой части f_2 собственному вектору $\Phi_k(x)$ линейного сопряженного оператора A^* :

$$\int_{\Omega} f_2(x) \Phi_k(x) dx = -\beta_1^2 \left(\mu_k^2 - \frac{\tau}{2}(1 - \mu_k) \right) \int_{\Omega} \psi_k^3(x) dx = 0. \quad (56)$$

Условие (56) выполняется в одномерном случае, а также в случае прямоугольного параллелепипеда в силу равенства нулю интеграла от куба собственной функции. Далее рассмотрим одномерный случай.

3.3.1. Нелинейная добавка в одномерном случае. В одномерном случае формула (55) принимает вид

$$f_2(x) = -(\mu_k^2; 1)\beta_1^2 \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi k}{\ell} x \right) \right). \quad (57)$$

Следовательно, решение системы (54) имеет следующую структуру

$$(u_2; v_2) = \beta_2 \Phi_k(x) + z_0 + z(x), \quad (58)$$

где первое слагаемое есть решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (54), а второе и третье — неоднородного:

$$z_0 = (C_1^0; C_2^0); \quad z(x) = (C_1^1; C_2^1) \cos \left(\frac{2\pi k}{\ell} x \right). \quad (59)$$

Для нахождения z_0 из (54) приходим к системе

$$C_1^0 - C_2^0 = -\frac{1}{2}\beta_1^2\mu_k^2, \quad 2C_1^0 - C_2^0 = -\frac{1}{2}\beta_1^2, \quad (60)$$

решением которой является

$$C_1^0 = \frac{1}{2}\beta_1^2(\mu_k^2 - 1), \quad C_2^0 = \frac{1}{2}\beta_1^2(2\mu_k^2 - 1). \quad (61)$$

Теперь найдем $z(x)$. Коэффициенты C_1^1 и C_2^1 удовлетворяют уравнениям

$$C_1^1(1 - \mu_{2k}) - C_2^1 = -\frac{1}{2}\beta_1^2\mu_k^2, \quad 2C_1^1 - C_2^1(d_k\mu_{2k} + 1) = -\frac{1}{2}\beta_1^2. \quad (62)$$

Определитель системы (62) имеет вид

$$\Delta(\mu_k) = d_k\mu_{2k}(\mu_{2k} - 1) + \mu_{2k} + 1. \quad (63)$$

Если $\mu_{2k} \geq 1$, то из (63) следует, что определитель системы $\Delta(\mu_k) > 0$. Если $\mu_{2k} < 1$, то определен коэффициент диффузии d_{2k} и, преобразовав выражение (63), вновь получим положительность определителя системы:

$$\Delta(\mu_k) = \mu_{2k}(\mu_{2k} - 1)(d_k - d_{2k}) > 0, \quad (64)$$

так как при $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$ имеем $d_k < d_{2k}$.

Для дальнейшего нам понадобится еще одно выражение $\Delta(\mu_k)$. Учитывая соотношение $\mu_{2k} = 4\mu_k$, преобразуем (64) к виду

$$\Delta(\mu_k) = \frac{3(4\mu_k^2 + 5\mu_k - 1)}{1 - \mu_k} = \frac{3(\gamma_{k,2k} - 1)}{1 - \mu_k} > 0. \quad (65)$$

Теперь из (62) найдем C_1^1 и C_2^1

$$C_1^1 = \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2}{\Delta(\mu_k)} (\mu_k^2(d_k\mu_{2k} + 1) - 1), \quad C_2^1 = \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2}{\Delta(\mu_k)} (2\mu_k^2 - (1 - \mu_{2k})). \quad (66)$$

3.3.2. Нелинейная добавка в случае прямоугольника. Пусть $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, стороны прямоугольника связаны соотношением (34), k – критическое значение волнового числа. Для удобства введем следующие обозначения: $\mu_k = \lambda_{m,n}$ и $\psi_k = \Psi_{m,n}(x_1, x_2)$ – собственные значения и собственные функции оператора $-\Delta$ с краевыми условиями Неймана

$$\Delta \Psi_{m,n} + \lambda_{m,n} \Psi_{m,n} = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \Psi_{m,n}}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (67)$$

Возможны три типа собственных значений и собственных функций.

Тип 1. При $m \neq 0, n = 0$

$$\mu_k = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot m^2; \quad \Psi_{m,n} = \cos\left(\frac{\pi m}{a} x_1\right). \quad (68)$$

В этом случае собственное значение задачи в прямоугольнике совпадает с собственным значением μ_m в одномерном случае при $\ell = a$, а собственная функция – с собственной функцией $\psi_m(x_1)$ в одномерном случае.

Таким образом, коэффициенты разложений вторичных решений при ε^2 имеют вид (58), (59), где $\mu_k = \lambda_{m,0}, \mu_{2k} = \lambda_{2m,0}$, а собственную функцию $\cos\left(\frac{2\pi k}{\ell} x\right)$ надо заменить на $\cos\left(\frac{2\pi m}{a} x_1\right)$.

Тип 2. При $m = 0, n \neq 0$

$$\mu_k = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cdot n^2; \quad \Psi_{m,n} = \cos\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right). \quad (69)$$

В этом случае собственное значение задачи в прямоугольнике совпадает с собственным значением μ_n при $\ell = b$ в одномерном случае, а собственная функция – с собственной функцией $\psi_n(x_2)$ в одномерном случае.

Тогда, как и для типа 1, уравнения при ε^2 уже решены в одномерном случае. Коэффициенты разложений вторичных решений при ε^2 имеют вид (58), (59), где $\mu_k = \lambda_{0,n}, \mu_{2k} = \lambda_{0,2n}$, а собственную функцию $\cos\left(\frac{2\pi k}{\ell} x\right)$ надо заменить на $\cos\left(\frac{2\pi n}{b} x_2\right)$.

Тип 3. При $m \neq 0, n \neq 0$

$$\mu_k = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot m^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cdot n^2; \quad \Psi_{m,n} = \cos\left(\frac{\pi m}{b} x_2\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} x_2\right). \quad (70)$$

Заметим, что в прямоугольнике связь между k и ν_k в общем случае неизвестна.

Очевидно, что для собственных функций первого и второго типов уравнения при ε^2 уже рассмотрены в одномерном случае. Рассмотрим собственные функции третьего типа. Из равенства

$$\Psi_{m,n}^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi m}{a} x_1\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{b} x_2\right) + \cos\left(\frac{2\pi m}{a} x_1\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{b} x_2\right) \right) \quad (71)$$

следует, что в выражении (58) слагаемое $z_0 = C^0$ имеет тот же вид, что и в (59), а слагаемое $z(x)$ имеет следующую структуру

$$z(x) = C^1 \cos\left(\frac{2\pi m}{a} x_1\right) + C^2 \cos\left(\frac{2\pi n}{b} x_2\right) + C^3 \cos\left(\frac{2\pi m}{a} x_1\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{b} x_2\right). \quad (72)$$

Константы C^1, C^2, C^3 находятся с помощью тех же рассуждений, что и для собственных функций первого и второго типов. В настоящей работе третий тип собственных функций не рассматривается.

3.4. Уравнения при ε^3 . Приравнивая в (50) выражения при ε^3 , для нахождения (u_3, v_3) приходим к системе

$$\begin{aligned}\Delta u_3 + u_3 - v_3 &= -2(u_1 - v_1)(u_2 - v_2) + v_1(u_1 - v_1)^2 \equiv F_1, \\ d_k \Delta v_3 + 2u_3 - v_3 &= -\Delta v_1 - 2u_1 u_2 \equiv F_2.\end{aligned}\quad (73)$$

3.4.1. Условие разрешимости в одномерном случае. Учитывая выражения u_1, v_1 (53) и u_2, v_2 (58), найдем вектор-функцию правой части системы (74) $\mathbf{f}_3(x) = (F_1; F_2)$:

$$\begin{aligned}F_1 &= -2\beta_1 \beta_2 \mu_k^2 \psi_k^2(x) - 2\beta_1 \mu_k (C_1^0 - C_2^0) \psi_k(x) - 2\beta_2 \mu_k (C_1^1 - C_2^1) \psi_k \psi_{2k} + \\ &\quad + \beta_1^3 \mu_k^2 (1 - \mu_k) \psi_k^3(x), \\ F_2 &= \beta_1 \mu_k (1 - \mu_k) \psi_k(x) - 2\beta_1 \beta_2 \psi_k^2(x) - 2\beta_1 C_1^0 \psi_k(x) - 2\beta_1 C_1^1 \psi_k(x) \psi_{2k}(x).\end{aligned}\quad (74)$$

Условие разрешимости уравнения при ε^3 — ортогональность правой части системы решению однородного сопряженного уравнения:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}_3(x) \Phi_k(x) dx = 0.\quad (75)$$

Оно имеет вид

$$\begin{aligned}2\mu_k (C_1^0 - C_2^0) + \mu_k (C_1^1 - C_2^1) - \frac{3}{4} \beta_1^2 \mu_k^2 (1 - \mu_k) + \\ + \frac{\tau}{2} (1 - \mu_k) [\mu_k (1 - \mu_k) - 2C_1^0 - C_1^1] = 0.\end{aligned}\quad (76)$$

После подстановки коэффициентов $C_1^0, C_2^0, C_1^1, C_2^1$ в (76) условие разрешимости (75) принимает вид

$$\beta_1^2 f(\mu_k) = \tau \mu_k (1 - \mu_k)^2.\quad (77)$$

Так как правая часть (77) положительна, то знак β_1^2 совпадает со знаком выражения $f(\mu_k)$:

$$\begin{aligned}f(\mu_k) &= f_1(\mu_k) + \tau f_2(\mu_k); \\ f_1(\mu_k) &= \mu_k \left(\frac{1}{2} \mu_k^2 + \frac{3}{2} \mu_k \right) - \frac{\mu_k}{\Delta(\mu_k)} (d_k \mu_k^2 \cdot \mu_{2k} - \mu_k^2 - \mu_{2k}); \\ f_2(\mu_k) &= (1 - \mu_k) \left(\mu_k^2 - 1 + \frac{1}{2\Delta(\mu_k)} (\mu_k^2 (d_k \mu_{2k} + 1) - 1) \right).\end{aligned}\quad (78)$$

3.4.2. Мягкая и жесткая потеря устойчивости. Если $\beta_1^2 > 0$, то происходит мягкая потеря устойчивости — вторичные решения (тьюринговы структуры) существуют и устойчивы в закритической области $d > d_k$, где d_k — критическое значение коэффициента диффузии. Если же $\beta_1^2 < 0$, то происходит жесткая потеря устойчивости — вторичные решения существуют в докритической области $d < d_k$, и они неустойчивы [16, 17].

Найдем условия, при которых происходит мягкая или жесткая потеря устойчивости. С учетом (65), преобразуем (78) к виду

$$\begin{aligned} f_1(\mu_k) &= \frac{\mu_k^2(\mu_k + 1)}{6(4\mu_k^2 + 5\mu_k - 1)} \cdot g_1(\mu_k); \\ f_2(\mu_k) &= \frac{(1 - \mu_k^2)}{6(4\mu_k^2 + 5\mu_k - 1)} \cdot g_2(\mu_k), \end{aligned} \quad (79)$$

где $g_1(\mu_k)$ и $g_2(\mu_k)$ находятся по формулам

$$\begin{aligned} g_1(\mu_k) &= 12\mu_k^2 + 29\mu_k - 1; \\ g_2(\mu_k) &= 24\mu_k^3 + 9\mu_k^2 - 34\mu_k + 5. \end{aligned} \quad (80)$$

Введем обозначение $y = \mu_k$, $0 < y < 1$. Тогда $f(y)$ в (77) имеет вид

$$f(y) = \frac{(1 + y)(y^2 g_1(y) + \tau(1 - y)g_2(y))}{6(4y^2 + 5y - 1)}. \quad (81)$$

Наша цель — исследовать знак функции $f(y)$. Воспользовавшись выражением $\mu_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2$, найдем пределы изменения y , когда длина отрезка $\ell \in [\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1}]$. Имеем неравенство

$$\left(\frac{\pi k}{\ell_{k,k+1}}\right)^2 \leq y \leq \left(\frac{\pi k}{\ell_{k-1,k}}\right)^2, \quad (82)$$

где $\ell_{k,m}$ определены в (27).

При $k = 1$ имеем:

$$\left(\frac{\pi}{\ell_{1,2}}\right)^2 \leq y \leq \left(\frac{\pi}{\ell_{0,1}}\right)^2. \quad (83)$$

Учитывая выражения $\ell_{0,1} = \pi$ и $\ell_{1,2}$, при $k = 1$ приходим к неравенству

$$y_* \leq y \leq 1, \quad y_* = \frac{\sqrt{41} - 5}{8} \approx 0.1754, \quad (84)$$

где y_* — положительный корень уравнения $4y^2 + 5y - 1 = 0$, которое получается из условия $\gamma_1 = 1$. Таким образом, при $y > y_*$ знаменатель в (81) положителен.

При $k = 2$ из (82) и (84) приходим к равенству

$$4 \left(\frac{\pi}{\ell_{2,3}}\right)^2 \leq y \leq 4y_*; \quad 0.2607 \leq y \leq 0.7016. \quad (85)$$

Последнее неравенство в (85) получено в результате приближенных вычислений.

Легко видеть, что с ростом волнового числа k длина промежутка изменения y (82) уменьшается. С учетом неравенств (32), (33) легко показать, что в пределе данный промежуток стягивается в точку, которая принадлежит всем рассматриваемым промежуткам.

Утверждение 6. При $k \rightarrow \infty$ промежуток изменения y стягивается в точку минимума $y_0 = \sqrt{2} - 1$ функции $d(y)$ (25).

Из (81) и (84) заключаем, что для того, чтобы выражение β_1^2 имело знак плюс, достаточно, чтобы функция

$$G(y) = y^2 g_1(y) + \tau(1 - y)g_2(y) \quad (86)$$

была положительна, когда y принадлежит промежутку (83), а τ меняется на интервале $(0, 1)$.

Заметим, что при $\tau = 0$ функция $G(y)$ положительна. Исследование $G(y)$ показывает, что она положительна при всех y , принадлежащих максимально возможному промежутку изменения $y \in [y_*, 1]$, если параметр τ мал, а именно $\tau \in (0; 0.2059)$.

Кроме того, существует промежуток изменения $y \in (y_1; 1)$, где $y_1 \approx 0.47$, на котором $G(y)$ положительна при всех $\tau \in (0; 1)$.

3.4.3. Условие разрешимости в двумерном случае. Для рассмотренных ранее собственных значений первого и второго типа, когда один из индексов n или m обращается в нуль, проходят рассуждения одномерного случая (74)–(81).

Пусть для определенности $m \neq 0$, $n = 0$. Тогда для нахождения квадрата амплитуды получим то же выражение, что и в одномерном случае (77). Для определения типа потери устойчивости необходимо найти промежуток изменения переменной $y = \mu_k$.

Воспользовавшись выражением $\mu_k = \frac{\pi^2 \nu_k}{a^2}$, найдем пределы изменения y , когда сторона прямоугольника $a \in (a_{k-1,k}, a_{k,k+1})$. Вместо (82) приходим к неравенству

$$\frac{\pi^2 \nu_k}{a_{k,k+1}^2} \leq y \leq \frac{\pi^2 \nu_k}{a_{k-1,k}^2}, \quad (87)$$

где $a_{k,k+1}$ определены в (39).

При $k = 1$ имеем:

$$\frac{\pi^2 \nu_1}{a_{1,2}^2} \leq y \leq \frac{\pi^2 \nu_1}{a_{0,1}^2}. \quad (88)$$

Учитывая выражения $a_{0,1}$ и $a_{1,2}$, при $k = 1$ приходим к неравенству

$$y_0 \leq y \leq 1, \quad y_0 = \frac{\sqrt{3 + 6\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \approx 0.3445. \quad (89)$$

Так как $y_0 > y_*$, то при $y > y_0$ знаменатель в (81) положителен. Легко видеть, что утверждение 6 справедливо и в двумерном случае. Достаточные условия мягкой потери устойчивости, сформулированные в конце предыдущего пункта, справедливы также и в двумерном случае.

3.4.4. Стационарные решения. Рассмотрев старшие члены разложения решения по степеням ε , заключаем, что в (75) коэффициент $\beta_2 = 0$. Суммируя полученные результаты, приходим к утверждению.

Утверждение 7. Пусть k – критическое волновое число; в одномерном случае длина отрезка ℓ заключена в промежутке $\ell \in (\ell_{k-1,k}, \ell_{k,k+1})$, в двумерном случае при $m \neq 0$, $n = 0$ (68) сторона прямоугольника a принадлежит промежутку $a \in (a_{k-1,k}, a_{k,k+1})$. Тогда при $\tau \in (0; 0.2059)$ происходит мягкая потеря устойчивости положения равновесия (1; 1) нелинейной системы и при малых $d > d_k$ возникают устойчивые вторичные пространственно неоднородные решения

$$(u(x); v(x)) = \pm (d - d_k)^{1/2} \beta_1 \mathbf{C}_k \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} x_1\right) + (d - d_k) (\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}(x)) + O((d - d_k)^{3/2}), \quad (90)$$

где \mathbf{C}_k определены в (44),

$$\mathbf{z}_0 = (C_1^0; C_2^0); \quad \mathbf{z}(x) = (C_1^1; C_2^1) \cos\left(\frac{2\pi k}{\ell} x_1\right), \quad (91)$$

коэффициенты C_1^0, C_2^0 найдены в (61), а C_1^1, C_2^1 найдены в (66).

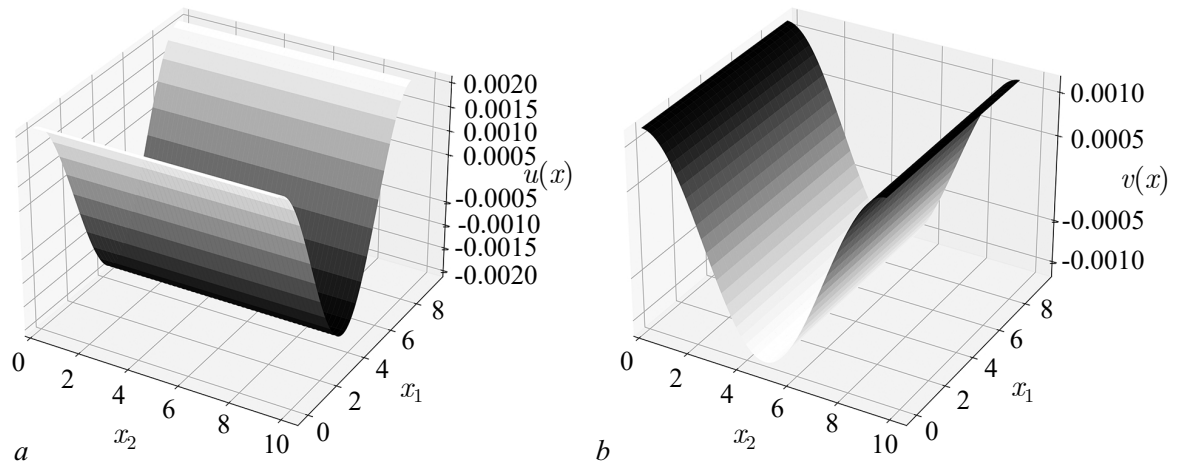


Рис. 2. Компоненты вторичного решения $u(x)$ (a) и $v(x)$ (b) при $k = 2, \ell = 3\pi$
 Fig. 2. Components of the secondary solution $u(x)$ (a) и $v(x)$ (b) at $k = 2, \ell = 3\pi$

На рис. 2 приведен пример вторичного пространственно неоднородных решения, полученного аналитически, в случае, когда пространственная переменная меняется в прямоугольнике.

Численные расчеты полностью согласуются с утверждениями, полученными аналитически. На рис. 3 приведены результаты численного интегрирования нелинейной системы (48) в случае мягкой потери устойчивости в одномерном случае при начальном условии

$$u(x, 0) = \varepsilon \cos\left(\frac{2}{3}x\right); \quad v(x, 0) = \frac{5}{9}\varepsilon \cos\left(\frac{2}{3}x\right) \quad (92)$$

при критическом волновом числе $k = 2$ и значениях параметров $\ell = 3\pi, \tau = 0.15, \varepsilon = 0.1, d = d_2 + \varepsilon^2$, где критический коэффициент диффузии $d_2 = 5.85$ в соответствии с формулой (22). Решение нестационарной системы за короткий промежуток времени выходит на стационарный режим (90), соответствующий положительному $\beta_1 = 0.2$. Если в начальном условии (92) заменить

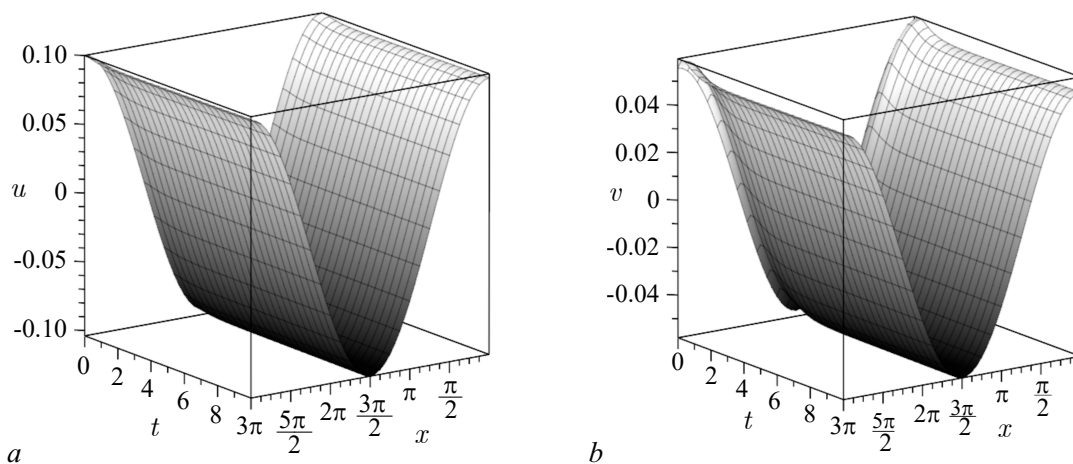


Рис. 3. Численное решение $u(x, t)$ (a) и $v(x, t)$ (b) нелинейной нестационарной системы при $\tau = 0.15$ с начальными условиями, близкими к стационарному состоянию

Fig. 3. Numerical solution $u(x, t)$ (a) and $v(x, t)$ (b) of a non-linear non-stationary system for $\tau = 0.15$ with initial conditions close to the stationary state

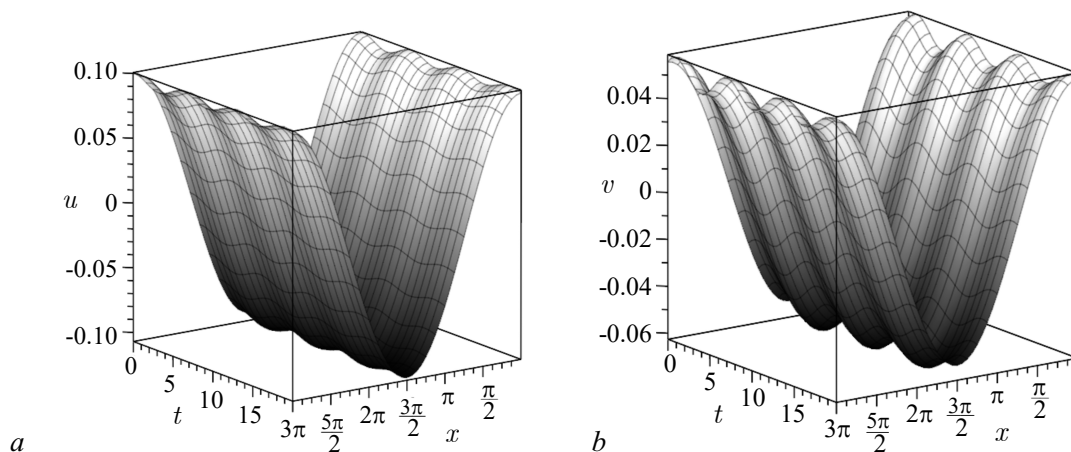


Рис. 4. Численное решение $u(x, t)$ (a) и $v(x, t)$ (b) нелинейной нестационарной системы при $\tau = 0.95$ с начальными условиями, близкими к стационарному состоянию

Fig. 4. Numerical solution $u(x, t)$ (a) and $v(x, t)$ (b) of a non-linear non-stationary system for $\tau = 0.95$ with initial conditions close to the stationary state

ε на $-\varepsilon$, то в нелинейной системе устанавливается режим, соответствующий знаку «минус» в формуле (90).

Если значение τ берется из области, соответствующей жесткой потере устойчивости, то есть близко к единице (на рис. 4 значение $\tau = 0.95$, остальные параметры те же, что на рис. 3), то в численных экспериментах положение равновесия теряет устойчивость, но выхода на стационарный режим не происходит.

Заключение

1. **Область неустойчивости Тьюринга.** Найдена область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга для системы Гирера–Мейнхардта с параметром релаксации на плоскости параметров (τ, d) , где τ – параметр релаксации, а d – коэффициент диффузии.
2. **Критический коэффициент диффузии.** Найдено явное выражение критического коэффициента диффузии, когда система рассматривается в произвольной ограниченной области. Показано, что критический коэффициент диффузии зависит от собственных значений оператора Лапласа в данной области. Установлена зависимость критического коэффициента диффузии от характерного размера области в случае отрезка и прямоугольника. Явно найдены выражения длины отрезка и длины стороны прямоугольника, при которых происходит «смена» критического волнового числа. Данные выражения найдены из условия равенства единице некоторой комбинации собственных значений оператора Лапласа γ_k . Показано, что для указанных областей для каждого критического волнового числа существует единственное значение характерного размера, при котором необходимые и достаточные условия неустойчивости Тьюринга совпадают. Этому значению соответствует точка минимума коэффициента диффузии, рассматриваемого как функция от длины отрезка в одномерном случае или стороны прямоугольника в двумерном случае. Проведено сравнение с условиями неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга.
3. **Тьюринговы структуры.** Методом Ляпунова–Шмидта явно найдены несколько первых членов рядов по степеням надкритичности, когда коэффициент диффузии находится в окрестности критического значения. Рассмотрения проведены для отрезка, а также для прямоугольника в случае, когда собственные функции оператора Лапласа имеют ту же структуру,

что в одномерном случае. Получены достаточные условия мягкой потери устойчивости, приведены примеры вторичных решений нелинейных уравнений. Предложенный подход носит общий характер и может быть распространен на другие системы реакции–диффузии. Например, систему Шнакенберга, ФитцХью–Нагумо, Грэй–Скотта, модель «брюселлятор» и другие.

Список литературы

1. *Wei J., Winter M.* Mathematical Aspects of Pattern Formation in Biological Systems. London: Springer, 2014. 319 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5526-3.
2. *Костин В. А., Осипов Г. В.* Неустойчивость однородного состояния и двухдоменные пространственно-временные структуры в реакционно-диффузионных системах с глобальной связью // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 1. С. 186–207. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-186-207.
3. *Цибулин В. Г., Ха Т. Д., Зеленчук П. А.* Нелинейная динамика системы хищник–жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 751–764. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764.
4. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Возникновение автоколебаний в системе Рэля с диффузией // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». 2016. Т. 9, № 2. С. 16–28. DOI: 10.14529/mmp160202.
5. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Асимптотика стационарных решений в системе Рэля с диффузией // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2016. № 3 (191). С. 13–19. DOI: 10.18522/0321-3005-2016-3-13-19.
6. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Бифуркации в системе Рэля с диффузией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 4. С. 499–514. DOI: 10.20537/vm170402.
7. *Казарников А. В., Ревина С. В.* Монотонная неустойчивость в системе ФитцХью–Нагумо с диффузией // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2018. № 4 (200). С. 18–24. DOI: 10.23683/0321-3005-2018-4-18-24.
8. *Turing A. M.* The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. R. Soc. Lond. B. 1952. Vol. 237, no. 641. P. 37–72. DOI: 10.1098/rstb.1952.0012.
9. *Murray J. D.* Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. 3d edition. New York: Springer, 2003. 814 p. DOI: 10.1007/b98869.
10. *Ревина С. В., Лысенко С. А.* Достаточные условия неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, № 3. С. 424–442. DOI: 10.35634/vm210306.
11. *Ревина С. В.* Область диффузионной неустойчивости для систем параболических уравнений // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, № 4. С. 117–126. DOI: 10.46698/d6373-9335-7338-n.
12. *Gierer A., Meinhardt H.* A theory of biological pattern formation // Kybernetik. 1972. Vol. 12, no. 1. P. 30–39. DOI: 10.1007/BF00289234.
13. *Meinhardt H.* Models of biological pattern formation: From elementary steps to the organization of embryonic axes // Current Topics in Developmental Biology. 2008. Vol. 81. P. 1–63. DOI: 10.1016/S0070-2153(07)81001-5.
14. *Gomez D., Ward M. J., Wei J.* An asymptotic analysis of localized three-dimensional spot patterns for the Gierer–Meinhardt model: Existence, linear stability, and slow dynamics // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2021. Vol. 81, no. 2. P. 378–406. DOI: 10.1137/20M135707X.
15. *Chen M., Wu R., Chen L.* Pattern dynamics in a diffusive Gierer–Meinhardt model // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2020. Vol. 30, no. 12. P. 2030035. DOI: 10.1142/S0218127420300359.

16. Юдович В. И. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения жидкости в замкнутом сосуде // Математический сборник (новая серия). 1967. Т. 74(116), № 4. С. 565–579.
17. Юдович В. И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36, № 3. С. 450–459.
18. Revina S. V. Long wavelength asymptotics of self-oscillations of viscous incompressible fluid // In: Kusraev A. G., Totieva Z. D. (eds) Operator Theory and Differential Equations. Trends in Mathematics. Cham: Birkhäuser, 2021. P. 185–203. DOI: 10.1007/978-3-030-49763-7_15.

References

1. Wei J, Winter M. Mathematical Aspects of Pattern Formation in Biological Systems. London: Springer; 2014. 319 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5526-3.
2. Kostin VA, Osipov GV. Instability of homogeneous state and two-domain spatiotemporal structures in reaction-diffusion systems with global coupling. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(1):186–207 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-186-207.
3. Tsybulin VG, Ha TD, Zelenchuk PA. Nonlinear dynamics of the predator – prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interaction of species. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(5):751–764 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764.
4. Kazarnikov AV, Revina SV. The onset of auto-oscillations in Rayleigh system with diffusion. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2016;9(2):16–28 (in Russian). DOI: 10.14529/mmp160202.
5. Kazarnikov AV, Revina SV. Asymptotics of stationary solutions of Rayleigh reaction-diffusion system. *Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 2016;(3(191)):13–19 (in Russian). DOI: 10.18522/0321-3005-2016-3-13-19.
6. Kazarnikov AV, Revina SV. Bifurcations in a Rayleigh reaction–diffusion system. *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2017;27(4):499–514 (in Russian). DOI: 10.20537/vm170402.
7. Kazarnikov AV, Revina SV. Monotonous instability in Fitzhugh-Nagumo reaction-diffusion system. *Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 2018;(4(200)):18–24 (in Russian). DOI: 10.23683/0321-3005-2018-4-18-24.
8. Turing AM. The chemical basis of morphogenesis. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*. 1952;237(641):37–72. DOI: 10.1098/rstb.1952.0012.
9. Murray JD. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. 3d edition. New York: Springer; 2003. 814 p. DOI: 10.1007/b98869.
10. Revina SV, Lysenko SA. Sufficient Turing instability conditions for the Schnakenberg system. *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2021;31(3):424–442. DOI: 10.35634/vm210306.
11. Revina SV. Diffusion instability region for systems of parabolic equations. *Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2022;24(4):117–126 (in Russian). DOI: 10.46698/d6373-9335-7338-n.
12. Gierer A, Meinhardt H. A theory of biological pattern formation. *Kybernetik*. 1972;12(1):30–39. DOI: 10.1007/BF00289234.
13. Meinhardt H. Models of biological pattern formation: From elementary steps to the organization of embryonic axes. *Current Topics in Developmental Biology*. 2008;81:1–63. DOI: 10.1016/S0070-2153(07)81001-5.
14. Gomez D, Ward MJ, Wei J. An asymptotic analysis of localized three-dimensional spot patterns for the Gierer–Meinhardt model: Existence, linear stability, and slow dynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2021;81(2):378–406. DOI: 10.1137/20M135707X.

15. Chen M, Wu R, Chen L. Pattern dynamics in a diffusive Gierer–Meinhardt model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2020;30(12):2030035. DOI: 10.1142/S0218127420300359.
16. Yudovich VI. An example of loss of stability and generation of a secondary flow in a closed vessel. *Mathematics of the USSR-Sbornik*. 1967;3(4):519–533. DOI: 10.1070/SM1967v003n04ABEH002764.
17. Iudovich VI. Investigation of auto-oscillations of a continuous medium, occurring at loss of stability of a stationary mode. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1972;36(3): 424–432. DOI: 10.1016/0021-8928(72)90055-X.
18. Revina SV. Long wavelength asymptotics of self-oscillations of viscous incompressible fluid. In: Kusraev AG, Totieva ZD, editors. *Operator Theory and Differential Equations. Trends in Mathematics*. Cham: Birkhäuser; 2021. P. 185–203. DOI: 10.1007/978-3-030-49763-7_15.

Ревина Светлана Васильевна — окончила механико-математический факультет Ростовского государственного университета по направлению «Прикладная математика и информатика» (1986). Кандидат физико-математических наук (1993, РГУ). С 1998 года работает на кафедре вычислительной математики и математической физики Южного федерального университета в должности доцента, с 2008 года является по совместительству научным сотрудником Южного математического института — филиала ВЦ РАН. Научные интересы — теория устойчивости и бифуркаций, математическая гидродинамика, уравнения Навье–Стокса, уравнения реакции–диффузии. Опубликовала свыше 50 научных статей по указанным направлениям.



Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
 Южный федеральный университет
 Россия, 362025 Владикавказ, ул. Вагутина, 53
 Южный математический институт ВЦ РАН
 E-mail: svrevina@sfedu.ru
 ORCID: 0000-0002-9216-8892
 AuthorID (eLibrary.Ru): 15908

Рябов Анатолий Сергеевич — окончил бакалавриат, а затем магистратуру Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича в Южном федеральном университете по направлению «Прикладная математика и информатика» (2018), затем аспирантуру по направлению «Математика и механика» (2022, квалификация — исследователь, преподаватель-исследователь). Научные интересы — теория устойчивости и бифуркаций, уравнения реакции–диффузии, теория информации, компьютерные эксперименты. С 2019 года работает инженером-программистом.



Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
 Южный федеральный университет
 E-mail: calliing-windows@yandex.ru
 ORCID: 0009-0000-9435-9513
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1191270