Нелинейные волны. Солитоны. Автоволны. Самоорганизация

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4)

Научная статья
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003054
EDN: YSXPTE

# Динамика полносвязных цепочек из большого количества осцилляторов с большим запаздыванием в связях

*С. А. Кащенко*

Региональный научно-образовательный математический центр
при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова, Россия
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

*Поступила в редакцию 8.04.2023, принята к публикации 4.05.2023,
опубликована онлайн 18.07.2023, опубликована 31.07.2023*

***Аннотация***. *Цель* настоящего исследования — изучить локальную динамику полносвязных цепочек из большого количества осцилляторов с большим запаздыванием в связях. От дискретной модели, описывающей динамику большого количества связанных осцилляторов осуществлен переход к нелинейному интегродифференциальному уравнению, непрерывно зависящему от времени и пространственной переменной. Рассматривается класс полносвязных систем. Основное предположение заключается в том, что величина запаздывания в связях является достаточно большой. Это предположение открывает путь к использованию специальных асимптотических методов исследования. Выделены параметры, при которых реализуется критический случай в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что они имеют бесконечную размерность. Построены аналоги нормальных форм — нелинейные краевые задачи типа Гинзбурга–Ландау. В ряде случаев эти краевые задачи содержат и интегральные составляющие. Их нелокальная динамика описывает поведение всех решений исходных уравнений в окрестности состояния равновесия. *Методы.* Применительно к рассматриваемым задачам развивается методика построения квазинормальных форм на центральных многообразиях. Разработан алгоритм построения асимптотики решений, основанный на использовании квазинормальных форм для определения медленно меняющихся амплитуд. *Результаты.* Построены квазинормальные формы, определяющие динамику исходной краевой задачи. Получены главные члены асимптотических приближений для решений рассматриваемых цепочек. На основе приведенных утверждений выявлен ряд интересных динамических эффектов. Например, бесконечное чередование прямых и обратных бифуркаций при увеличении коэффициента запаздывания. Их отличительная особенность заключается в том, что они имеют две или три пространственные переменные.

***Ключевые слова***: краевая задача, динамика, запаздывание, осцилляторы, нормальная форма, устойчивость.

***Благодарности***. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-30011, https://rscf.ru/project/21-71-30011/.

***Для цитирования***: *Кащенко С. А.* Динамика полносвязных цепочек из большого количества осцилляторов с большим запаздыванием в связях // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 523–542. DOI: 10.18500/0869-6632-003054. EDN: YSXPTE

# Dynamics of full-coupled chains of a great number of oscillators with a large delay in couplings

*S. A. Kashchenko*

Regional Scientific and Educational Mathematical Center
of the Yaroslavl State University, Russia
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

*Received 8.04.2023, accepted 4.05.2023,*
*available online 18.07.2023, published 31.07.2023*

***Abstract.*** *The subject* of this work is the study of local dynamics of full-coupled chains of a great number of oscillators with a large delay in couplings. From a discrete model describing the dynamics of a great number of coupled oscillators, a transition has been made to a nonlinear integro-differential equation, continuously depending on time and space variable. A class of full-coupled systems has been considered. The main assumption is that the amount of delay in the couplings is large enough. This assumption opens the way to the use of special asymptotic methods of study. The parameters under which the critical case is realized in the problem of the equilibrium state stability have been distinguished. It is shown that they have infinite dimension. The analogues of normal forms — nonlinear boundary value problems of Ginzburg–Landau type have been constructed. In some cases, these boundary value problems contain integral components too. Their nonlocal dynamics describes the behavior of all solutions of the original equations in the balance state neighbourhood. *Methods.* As applied to the considered problems, methods of constructing quasinormal forms on central manifolds are developed. An algorithm for constructing the asymptotics of solutions based on the use of quasinormal forms for determining slowly varying amplitudes has been created. *Results.* Quasinormal forms that determine the dynamics of the original boundary value problem have been constructed. The dominant terms of asymptotic approximations for solutions of the considered chains have been obtained. On the basis of the given statements, a number of interesting dynamical effects have been revealed. For example, an infinite alternation of direct and reverse bifurcations when the delay coefficient increases. Their distinguishing feature is that they have two or three spatial variables.

***Keywords***: boundary value problem, dynamics, delay, oscillators, normal form, stability.

***Acknowledgements***. This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-30011), https://rscf.ru/project/21-71-30011/.

***For citation***: Kashchenko SA. Dynamics of full-coupled chains of a great number of oscillators with a large delay in couplings. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(4):523–542. DOI: 10.18500/0869-6632-003054



## Введение

Сначала рассмотрим цепочку из $N$ связанных осцилляторов второго порядка с запаздывающими связями

$$\ddot{u}_j + a\dot{u}_j + u_j + F(u_j, \dot{u}_j) = \sum_{k=1}^{N} a_k u_{j+k}(t - T), \tag{1}$$

$F(u, v)$ — достаточно гладкая нелинейная функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого, $T > 0$ — запаздывание, индекс $j$ меняется от 1 до $N$ и для любого целого $k$ значения $u_{k+N}(t)$ отождествляются с $u_k(t)$. Такого типа модели возникают во многих прикладных задачах радиофизики [1–8], лазерной физики [9–13], математической экологии [14, 15], теории нейронных сетей [16–21] и см., например, [22].

Удобно значения $u_j(t)$ ассоциировать со значениями функции двух переменных $u(t, x_j)$, где точки $x_j$ $(j = 1, \dots, N)$ равномерно распределены на некоторой окружности.

Предполагаем, что количество элементов цепочки $N$ является достаточно большим:

$$N \gg 1. \tag{2}$$

Это условие дает основание перейти от дискретной относительно $u(t, x_j)$ системы (1) к уравнению с распределенными на отрезке $[0, 2\pi]$ параметрами для функции $u(t, x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + u + F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(s)u(t - T, x + s)ds \tag{3}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{4}$$

Функция $\Phi(s)$ определяет связи между элементами и, вообще говоря, зависит от параметра $\varepsilon$. Например, в случае односторонней [17] и диффузионной [2] связях значения $\Phi(s)$ сосредоточены в окрестности одной или нескольких точек отрезка $[0, 2\pi]$. Здесь предполагаем, что функция $\Phi(s)$ от параметра $\varepsilon$ не зависит. В этом случае цепочки принято называть полносвязными.

Основное предположение, которое открывает путь к применению асимптотических методов, заключается в том, что параметр запаздывания $T$ в (3) является достаточно большим:

$$\varepsilon = T^{-1} \ll 1. \tag{5}$$

В краевой задаче (3), (4) проведем замену времени $t \to Tt$. В результате приходим к сингулярно возмущенной краевой задаче

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a\frac{\partial u}{\partial t} + u + F\left(u, \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(s)u(t - 1, x + s)ds, \tag{6}$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{7}$$

Поставим задачу об исследовании поведения всех решений из некоторой достаточно малой и не зависящей от $\varepsilon$ окрестности нулевого состояния равновесия в (6), (7) при достаточно малых значениях $\varepsilon$. При изучении локальной динамики (6), (7) центральное место занимает анализ вопросов устойчивости решений линеаризованного в нуле уравнения

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(s)u(t - 1, x + s)ds \tag{8}$$

с краевыми условиями (7).

Рассмотрим характеристическое уравнение для (8), (7)

$$\varepsilon^2\lambda^2 + \varepsilon a\lambda + 1 = f_k \exp(-\lambda), \tag{9}$$

где $f_k$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi(s)$:

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(s)\exp(-iks)ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

В том случае, когда все корни уравнения (9) при всех $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественные части, решения краевой задачи (8), (7) асимптотически устойчивы, и решения (6), (7) с достаточно малыми и не зависящими от $\varepsilon$ (по норме $C_{[0,2\pi]} \times C(R^2)$) начальными условиями стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если же уравнение (9) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью, то решения (8), (7) неустойчивы и задача о динамике (6), (7) становится нелокальной.

Здесь будет рассматриваться критический случай, когда в (9) нет корней с положительной и отделенной от нуля вещественной частью, но есть корни, которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Отметим, что в случае конечной размерности критического случая методика исследования локальной динамики хорошо известна. Она опирается на метод интегральных многообразий и метод нормальных форм (см., например, [23–25]). Характерной особенностью всех рассматриваемых ниже задач является то обстоятельство, что в них реализуются бесконечномерные критические случаи, когда бесконечно много корней характеристического уравнения стремится к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Поэтому методы интегральных многообразий и нормальных форм непосредственно неприменимы. Здесь существенно используется разработанный в [17, 26–30] подход, связанный с построением бесконечномерных квазинормальных форм.

В разделах 1–3 представлены исследования наиболее важных критических случаев. В качестве основных результатов построены так называемые квазинормальные формы, нелокальная динамика которых определяет поведение всех решений исходной краевой задачи (6), (7) в малой окрестности состояния равновесия.

В разделе 4 рассмотрен существенно более сложный по сравнению с разделами 1–3 критический случай, который реализуется для несколько иной, но близкой к (6), (7) краевой задаче

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a\frac{\partial u}{\partial t} + u + F\left(u, \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(s)\Big[u(t-1, x+s) - \\ -u(t-1, x)\Big]ds, \quad u(t, x+2\pi) \equiv u(t, x). \tag{10}$$

Содержание раздела 5 посвящено обобщению результатов предыдущих разделов на более общую краевую задачу

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a\frac{\partial u}{\partial t} + u + F\left(u, \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi_1(s)u(t-1, x+s)ds + \\ +\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi_2(s)\frac{\partial u(t-1, x+s)}{\partial t}ds, \tag{11}$$

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t, x). \tag{12}$$

Сделаем одно упрощающее предположение относительно нелинейной функции $f(u, \dot{u})$. Выше говорилось, что эта функция достаточно гладкая и имеет в нуле порядок малости выше первого. Чисто технически проще использовать нелинейность $f(u, \dot{u})$ третьего порядка малости, то есть для простоты ниже считаем, что в (1)

$$f(u, \dot{u}) = b_1 u^3 + b_2 u^2 \dot{u} + b_3 u \dot{u}^2 + b_4 \dot{u}^3. \tag{13}$$

Опишем здесь структуру всех следующих разделов. Она для всех них одинакова. Сначала выделяются параметры задачи, при которых наблюдается критический случай в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия. Затем рассматривается линеаризованная краевая задача и приводится ее характеристическое уравнение. После этого исследуется асимптотика всех тех корней характеристического уравнения, вещественная часть которых стремится к нулю при стремлении к нулю малого параметра $\varepsilon$. Таких корней оказывается бесконечно много. На их основе для линеаризованной задачи строится совокупность специальных решений. Такие решения удается записать в форме, которая допускает использование их для анализа решений (с неизвестными амплитудами) исходной нелинейной краевой задачи. Удается определить явную форму для главного приближения (по параметру $\varepsilon$) соответствующего решения. Условно обозначим ее здесь через $\varepsilon U_1$. Решения нелинейной краевой задачи ищем тогда в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon U_1 + \varepsilon^3 U_3 + \ldots .$$

Заметим, что отсутствие здесь квадратичных по $\varepsilon$ коэффициентов связано с тем, что в исходном уравнении нет квадратичной нелинейности. Относительно $U_3$ заранее известно, что она периодическая по нескольким своим аргументам. Подставляя вместо $u(t, x, \varepsilon)$ приведенное выражение, для определения $U_3$ приходим к специальной линейной неоднородной краевой задаче. Условие разрешимости этой краевой задачи в указанном классе функций позволяет выписать уравнение для неизвестных амплитуд, входящих в $U_1$. Получение таких уравнений и является конечной целью. Нелокальная динамика этих уравнений, их еще называют квазинормальными формами, позволяет описать локальное поведение решений исходной краевой задачи. Отметим, что выполнение условий разрешимости уравнений для $U_3$ позволяет в явном виде определить эту функцию. Ниже будем использовать функцию $U_3$, но формулы для этой функции для краткости изложения иногда приводить не будем.

## 1. Описание критических случаев

Рассмотрим характеристическое уравнение (9). Через $f$ обозначим наибольшее из чисел $|f_k|$:

$$f = \max_{-\infty<k<\infty} |f_k|. \tag{14}$$

Воспользуемся методикой работ [26–28, 31]. Введем в рассмотрение величину

$$\gamma_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } a^2 \geqslant 2, \\ \dfrac{a^2}{4}\left(4 - a^2\right)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2. \end{cases}$$

Отметим, что

$$\gamma_0 \leqslant 1 \text{ и } 0 < \gamma_0 < 1 \text{ при } a^2 < 2$$

и

$$\gamma_0 = 0 \text{ при } a = 0.$$

В [28] показано, что имеют место следующие утверждения.

**Лемма 1.** *Пусть выполнено неравенство*

$$f < \gamma_0.$$

*Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon$ все корни (9) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественные части.*

**Лемма 2.** *Пусть выполнено неравенство*

$$f > \gamma_0.$$

*Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon$ уравнение* (9) *имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью.*

Отметим, что в условии леммы 1 все решения краевой задачи (8), (7) и (6), (7) из малой и не зависящей от $\varepsilon$ окрестности нуля стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если же выполнены условия леммы 2, то задача о динамике (6), (7) является нелокальной: в окрестности нулевого решения не может быть устойчивых решений.

В дальнейшем предполагается, что имеет место критический случай: при произвольном фиксированном $\gamma_1$ для параметра $f$ выполнено либо равенство

$$f = \gamma_0 + \varepsilon^2\gamma_1, \tag{15}$$

либо

$$f = -\gamma_0 - \varepsilon^2\gamma_1. \tag{16}$$

Тем самым исследуются краевые задачи (8), (7) и (6), (7) в критическом случае.

Рассмотрим вопрос об асимптотике всех тех корней уравнения (9), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Соответствующие асимптотические разложения принципиально различаются для случая, когда $a_0^2 > 2$ и для случая, когда $a_0^2 < 2$.

**Лемма 3.** *Пусть выполнено условие*

$$a_0^2 > 2. \tag{17}$$

*Тогда $\gamma_0 = 1$ и для тех корней $\lambda_k(\varepsilon)\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ уравнения* (9)*, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, имеют место асимптотические равенства:*

*1) в случае*

$$f = 1 + \varepsilon^2\gamma_1 \tag{18}$$

*имеем*

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2\pi ik + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + o(\varepsilon^3), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

*где*

$$\lambda_{k1} = -2\pi ika, \quad \lambda_{k2} = -2\pi^2k^2(a^2 - 2) + 2\pi ika^2 + \gamma_1;$$

*2) в случае*

$$f = -1 - \varepsilon^2\gamma_1 \tag{19}$$

*имеем*

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\pi(2k+1) + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + o(\varepsilon^3), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

*где*

$$\lambda_{k1} = -\pi(2k+1)a, \quad \lambda_{k2} = -\frac{1}{2}\pi^2(2k+1)^2(a^2 - 2) + i\pi(2k+1)a^2 + \gamma_1.$$

Рассмотрим затем случай, когда

$$0 < a^2 < 2. \tag{20}$$

Введем несколько обозначений. Пусть $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ такое значение, которое дополняет до целого выражение $\omega_0\varepsilon^{-1}$, где

$$\omega_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } a^2 > 2, \\ \left(1 - \dfrac{a^2}{2}\right)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2. \end{cases}$$

Положим

$$R_1 = (ia - 2\omega_0)\gamma_0^{-1} \exp\big(-i\Omega_0\big),$$

$$R_2 = \frac{1}{2}R_1^2 + \gamma_0^{-1} \exp\big(-i\Omega_0\big),$$

$$R_3 = \big(a - 2i\omega_0\big)R_1\gamma_0^{-1} \exp\big(-i\Omega_0\big).$$

**Лемма 4.** *Пусть выполнены неравенства* (20). *Тогда для тех корней* $\lambda_k(\varepsilon)$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ *уравнения* (9), *вещественные части которых стремятся к нулю при* $\varepsilon \to 0$, *имеют место асимптотические равенства*

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\big(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta - \Omega_0 + 2\pi k\big) + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + o\big(\varepsilon^3\big),$$

*где*

$$\lambda_{k1} = R_1\big(\theta - \Omega_0 + 2\pi k\big),$$

$$\lambda_{k2} = R_2\big(\theta - \Omega_0 + 2\pi k\big)^2 + R_3\big(\theta - \Omega_0 + 2\pi k\big) + \gamma_1 \exp\big(-i\Omega_0\big),$$

*причем выполнены соотношения*

$$\operatorname{Re} R_1 = 0, \qquad \operatorname{Re} R_2 < 0. \tag{21}$$

## 2. Критический случай на нулевой моде

Здесь предполагаем, что

$$\gamma_0 = |f_0| \;\text{ и }\; |f_0| > |f_k| \quad (k = \pm1, \pm2, \ldots). \tag{22}$$

Исследование проведем отдельно для случаев (17) и (20). Сразу отметим, что соответствующие результаты для них существенно различны. При условии (17) решения формируются на частотах порядка 1, их назовем медленно осциллирующими. При условии (20) решения содержат частоты порядка $\varepsilon^{-1}$, поэтому назовем их быстро осциллирующими.

**2.1. Медленно осциллирующие решения.** Пусть сначала выполнено неравенство (17), то есть $a_0^2 > 2$ и $\gamma_0 = 1$. Тогда тем корням $\lambda_k(\varepsilon)$, о которых речь шла в лемме 3, отвечают решения $v_k(t,\varepsilon)$ линейной краевой задачи (8), (7) и $v_k(t,\varepsilon) = \exp(\lambda_k(\varepsilon)t)$, а значит, решением (8), (7) являются функции

$$v(t,\varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \exp\big(\lambda_k(\varepsilon)t\big),$$

где $\xi_k$ – произвольные комплексные постоянные. Для случаев (15) и (16) это выражение можно представить соответственно в виде

$$v(t,\varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp\big(2\pi iky\big) = \xi(\tau, y)$$

и

$$v(t,\varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp\big(\pi i(2k+1)y\big) = \xi(\tau, y),$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $y = (1-\varepsilon a)t$, $\xi_k(\tau) = \xi_k \exp\big((\lambda_{k2} + o(\varepsilon))\tau\big)$.

Решения $u(t,y,\varepsilon)$ нелинейной краевой задачи (6) и (7), «близкие к критическим» решениям $v(t,\varepsilon)$ линейной краевой задачи (8), (7), ищем в виде

$$u(t,y,\varepsilon)=\varepsilon^{1/2}\xi(\tau,y)+\varepsilon^{3/2}u_3(\tau,y)+o(\varepsilon^2), \tag{23}$$

где $\xi(\tau,y)$ – неизвестная вещественная функция, для которой выполнены условия:

1) в случае (15) — условие периодичности по $y$

$$\xi(\tau,y+1)\equiv\xi(\tau,y); \tag{24}$$

2) в случае (16) — условие антипериодичности по $y$

$$\xi(\tau,y+1)\equiv-\xi(\tau,y). \tag{25}$$

Подставим формальный ряд (23) в краевую задачу (8), (7) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$. Тогда, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим уравнение для $u_3(\tau,y)$. Из условия его разрешимости приходим к выводу, что $\xi(\tau,y)$ является решением краевой задачи

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=\Big(\frac{a^2}{2}-1\Big)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial\xi}{\partial y}+\gamma_1\xi-b_1\xi^3 \tag{26}$$

с краевыми условиями соответственно (24) или (25). Сформулируем итоговый результат.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* (17), (18) $\big($(17), (19)$\big)$ *и* $b_1\neq0$. *Пусть функция* $\xi(\tau,y)$ *является ограниченным при* $\tau\to\infty$, $y\in[0,1]$ *решением краевой задачи* (26), (24) $\big($(26) *и* (25)$\big)$. *Тогда функция*

$$u(t,y,\varepsilon)=\varepsilon\xi(\tau,y)+\varepsilon^3u_3(\tau,y) \tag{27}$$

*при* $\tau=\varepsilon^2t$, $y=(1-\varepsilon a)t$ *удовлетворяет краевой задаче* (6), (7) *с точностью до* $o(\varepsilon^3)$.

Из этой теоремы следует, что при сформулированных условиях построенные краевые задачи (26), (24) и (26), (25) играют роль нормальных форм для краевой задачи (6), (7). Отметим, что если $b_1=0$, то есть условие теоремы 1 не выполняется, и $b_2\neq0$, то изменения невелики. Последнее слагаемое в (26) заменяется на $-b_2\xi^2\partial\xi/\partial y$ и формула (27) принимает вид

$$u(t,y,\varepsilon)=\varepsilon^{1/2}\xi(\tau,y)+\varepsilon^{3/2}u_3(\tau,y).$$

**2.2. Быстро осциллирующие решения.** Пусть выполнено неравенство (20), то есть $a^2<2$. Корням $\lambda_k(\varepsilon)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, о которых говорилось в лемме 4, отвечают решения $v_k(t,\varepsilon)$ линейной краевой задачи (8), (7) $v_k(t,\varepsilon)=\exp(\lambda_k(\varepsilon)t)$. Значит и функция

$$v(t,\varepsilon)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k\exp(\lambda_k(\varepsilon)t), \tag{28}$$

где $\xi_k$ — произвольные комплексные постоянные тоже удовлетворяют краевой задаче (8), (7). Учитывая асимптотические формулы для $\lambda_k(\varepsilon)$, представленные в лемме 4, выражение (28) можно записать в виде

$$v(t,\varepsilon)=E(t,\varepsilon)\xi(\tau,y).$$

Здесь положено $E(t,\varepsilon)=\exp\left[\big(i(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta-\Omega_0)+\varepsilon R_1(\theta-\Omega_0)\big)t\right]$,

$$\xi(\tau,y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k(\tau)\exp(2\pi iky),\ \tau=\varepsilon^2t,\ y=(1+i\varepsilon R_1)t,$$

$\xi_k(\tau)=\xi_k\exp\big((\lambda_{k2}+o(\varepsilon))\tau\big)$. Напомним, что согласно (21) значение $iR_1$ вещественно.

Решения $u(t,y,\varepsilon)$ нелинейной краевой задачи (6), (7) в рассматриваемом случае ищем в виде формального ряда

$$u(t,y,\varepsilon)=\varepsilon\big(\xi(\tau,y)E(t,\varepsilon)+\bar{\xi}(\tau,y)\bar{E}(t,\varepsilon)\big)+\varepsilon^3u_3(t,\tau,y)+\dots. \tag{29}$$

В этом выражении $\xi(\tau,y)$ – неизвестная, подлежащая определению комплексная функция, которая является 1-периодической по пространственной переменной $y$:

$$\xi(\tau,y+1)\equiv\xi(\tau,y), \tag{30}$$

а зависимость от аргумента $t$ функции $u_3$ – периодическая.

Подставим (29) в (6), (7) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$. Тогда, собирая коэффициенты при $\varepsilon^3$, приходим к уравнению относительно $u_3$. Условие разрешимости этого уравнения в классе периодических по $t$ функций состоит в выполнении равенства

$$\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=&-R_2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+R_4\frac{\partial\xi}{\partial y}+R_5\xi-\xi^2\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial y}-\\&-\big(3b_1+i\omega_0b_2+\omega_0^2b_3+3i\omega_0^3b_4\big)\exp(-i\Omega_0)\xi|\xi|^2,\end{aligned} \tag{31}$$

в котором $R_4=-i(2R_2(\theta-\Omega_0)+R_3)$, $R_5=R_2(\theta-\Omega_0)^2+R_3(\theta-\Omega_0)+\gamma_1\exp(-i\Omega_0)$.

Введем обозначение. Здесь и ниже через $\varepsilon_n=\varepsilon_n(\theta_0)$ будем обозначать такую последовательность $\varepsilon_n\to0$, для которой $\theta(\varepsilon_n)=\theta_0$. Сформулируем основной результат.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* (20) *и* (15) *и пусть для произвольно фиксированного значения* $\theta_0\in[0,2\pi)$ *краевая задача* (31)*,* (30) *имеет ограниченное при* $\tau\to\infty$, $y\in[0,1]$ *решение* $\xi(\tau,y)$*. Тогда на последовательности* $\varepsilon_n=\varepsilon_n(\theta_0)$ *функция*

$$u(t,y,\varepsilon_n(\theta_0))=\varepsilon_n(\theta_0)\big[\xi(\tau,y)E\big(t,\varepsilon_n(\theta_0)\big)+\bar{\xi}(\tau,y)\bar{E}\big(t,\varepsilon_n(\theta_0)\big)\big]+\varepsilon_n^3(\theta_0)u_3(t,\tau,y)$$

*при* $\tau=\varepsilon_n^2(\theta_0)t$, $y=(1-\varepsilon_n(\theta_0)a)t$ *удовлетворяет краевой задаче* (6)*,* (7) *с точностью до* $o(\varepsilon_n^3(\theta_0))$*.*

Таким образом, краевая задача (31), (30) является квазинормальной формой для (6), (7) в рассматриваемом критическом случае. В силу условий (21) эта краевая задача является параболической. Структура ее решений может быть сложной. Эта краевая задача определяет главные члены асимптотических приближений решений исходной задачи краевой задачи (6), (7). Отсюда следует, что и локальная динамика (6), (7) также может быть сложной. Отметим еще, что по форме кубические нелинейности уравнения (31) сложнее, чем в классическом уравнении Гинзбурга–Ландау.

**2.3. Система с малыми коэффициентами связей.** Выше было показано, что критический случай для краевой задачи (6), (7) при $a = 0$ реализуется при $f = 0$. Здесь предполагаем, что коэффициенты $a$ и $f$ являются достаточно малыми, то есть для некоторых $a_1$ и $\gamma_1$ имеем соотношения

$$a = \varepsilon a_1, \quad f = \varepsilon\gamma_1 \quad (0 < \varepsilon \ll 1). \tag{32}$$

Ниже рассмотрим задачу именно такого типа, то есть с краевыми условиями (7) исследуем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + u + f(u, \dot{u}) = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(s) u\big(t - \varepsilon^{-1}, x + s\big) ds. \tag{33}$$

Для линеаризованного в нуле уравнения характеристический квазиполином имеет вид

$$\lambda^2 + \varepsilon a_1 \lambda + 1 = \varepsilon f_k \exp\big(-\lambda\varepsilon^{-1}\big).$$

Бесконечно много корней $\lambda_k(\varepsilon)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ этого характеристического уравнения стремится к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$ и нет корня с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью. Тем самым в задаче об устойчивости нулевого решения (33) реализуется критический случай бесконечной размерности. Для $\lambda_k(\varepsilon)$ имеют место асимптотические представления

$$\lambda_k(\varepsilon) = i + \varepsilon\lambda_{k1} + \ldots,$$

а $\lambda_{k1}$ является корнем квазиполинома

$$\lambda_{k1} + \frac{1}{2}a_1 = -\frac{i}{2}\gamma_1 \exp\big(i\theta - T_1\lambda_{k1}\big). \tag{34}$$

Фигурирующая в (34) величина $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ дополняет значение $T\varepsilon^{-1}$ до целого кратного $2\pi$. Отметим, что квазиполином (34) имеет бесконечно много корней.

Решения нелинейного уравнения ищем в виде формального ряда

$$u = \varepsilon^{1/2}\big(\xi(\tau, x)\exp(it) + \bar{\xi}(\tau, x)\exp(-it)\big) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau, x) + \ldots, \tag{35}$$

в котором зависимость от аргумента $t$ – $2\pi$-периодическая. Подставим (35) в (33). Производя стандартные действия, приходим к уравнению для $u_3$. Из условия его разрешимости в классе $2\pi$-периодических по $t$ функций получаем уравнение с фиксированным запаздыванием для определения неизвестной комплексной амплитуды $\xi(\tau, x)$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = -\frac{1}{2}a_1\xi - \frac{i}{2}\exp(i\theta)\cdot\frac{1}{2}\pi\int\limits_0^{2\pi}\Phi(s)\xi\big(\tau - 1, x + s\big)ds +$$
$$+\frac{1}{2}\big(3ib_1 - b_2 + ib_3 - 3b_4\big)\xi|\xi|^2. \tag{36}$$

Сформулируем основной результат.

**Теорема 3.** *Пусть выполнено условие* (32) *и для произвольно фиксированного значения* $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ *уравнение* (36) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$ *решение* $\xi(\tau, x)$. *Тогда на последовательности* $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta_0)$ *функция*

$$u(t, x, \varepsilon_n) = \varepsilon_n^{1/2}\big(\xi(\tau, x)\exp(it) + \bar{\xi}(\tau, x)\exp(-it)\big) + \varepsilon_n^{3/2} u_3(t, \tau, x)$$

*при* $\tau = \varepsilon_n t$ *удовлетворяет уравнению* (33) *с точностью до* $o(\varepsilon_n^{3/2})$.

Из этой теоремы следует, что распределенное уравнение (36) является квазинормальной формой в рассматриваемом случае. Для уравнения (36) просто исследовать вопросы о существовании и устойчивости простейших циклов вида $\rho\exp(i\sigma\tau)$. Подробнее на этом не останавливаемся.

## 3. Критический случай на ненулевой моде

Здесь предполагаем, что наибольший по модулю коэффициент Фурье $f_k$ функции $\Phi(s)$ имеет отличный от нуля номер $k_0$, то есть

$$f = \max_{-\infty<k<\infty} |f_k| = |f_{k_0}|, \quad k_0 \neq 0$$

и

$$|f_{k_0}| > |f_k| \ \text{ при } \ k \neq \pm k_0.$$

Рассмотрим критический в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия краевой задачи (6), (7) случай, когда для некоторого $\delta$

$$f_{k_0} = \big(\gamma_0 + \varepsilon^2\gamma_1\big)\exp(i\delta). \tag{37}$$

Приведем асимптотические формулы для всех тех корней характеристического уравнения (9), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Напомним, что характеристическое уравнение (9) получается в результате подстановки в (8) решений Эйлера

$$u_k^{\pm}(t,x,\varepsilon) = \exp\big[\pm ikx + \lambda_k(\varepsilon)t\big]. \tag{38}$$

Для нахождения корней $\lambda_k(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$\varepsilon^2\lambda^2 + \varepsilon a\lambda + 1 = \big(\gamma_0 + \varepsilon^2\gamma_1\big)\exp\big(\pm i\delta - \lambda\big). \tag{39}$$

Отсюда получаем асимптотику $\lambda_k^{\pm}(\varepsilon)$:

1) при $a^2 > 2$ имеем $\lambda_k^{-}(\varepsilon) = \bar{\lambda}_k^{+}(\varepsilon)$ и $\lambda_k^{+}(\varepsilon) = i\delta + 2\pi ki + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + \ldots$, где

$$\lambda_{k1} = -ia\big(2\pi k + \delta\big),$$
$$\lambda_{k2} = \frac{1}{2}\big(2 - a^2\big)\big(\delta + 2\pi k\big)^2 + \gamma_1 + ia^2\big(\delta + 2\pi k\big);$$

2) при $a^2 < 2$ имеем $\lambda_k^{\pm}(\varepsilon) = i(\omega_0/\varepsilon + \theta \pm \delta - \Omega_0 + 2\pi k) + \varepsilon\lambda_{k1}^{\pm} + \varepsilon^2\lambda_{k2}^{\pm} + \ldots$, где

$$\lambda_{k1}^{\pm} = -i\big(\gamma_0\exp(i\Omega_0)\big)^{-1}\big(2i\omega_0 - a\big)K_k^{\pm}, \quad K_k^{\pm} = \theta \pm \delta - \Omega_0 + 2\pi k,$$

$$\lambda_{k2}^{\pm} = \frac{1}{2}\big(\lambda_{k1}^{\pm}\big)^2 - \gamma_1\gamma_0^{-1} - \big(R_k^{\pm}\big)^2 - a\lambda_{k1}^{\pm} - 2i\omega_0\lambda_{k1}^{\pm} = A^{\pm}\big(K^{\pm}\big)^2 + B^{\pm}K^{\pm} + \gamma_1\gamma_0^{-1},$$

$$K^{\pm} = \theta - \Omega_0 + 2\pi k \pm \delta,$$

$$A^{\pm} = \Big(\gamma_0\exp\big(i(\Omega_0 \mp \delta)\big)\Big)^{-1} - \frac{1}{2}\Big((a - 2i\omega)\big(\gamma_0\exp[i(\Omega_0 \mp \delta)]\big)^{-1}\Big)^2,$$

$$B^{\pm} = -i\big(a^2 + 4\omega^2\big)\big(\gamma_0\exp[i(\Omega_0 \mp \delta)]\big)^{-1}.$$

Отметим, что $\operatorname{Re}\lambda_{k1}^{\pm} = \operatorname{Re}\lambda_{k1} = 0$, $\operatorname{Re}\lambda_{k2} < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_{k2}^{\pm} < 0$.

**3.1. Случай $a^2 > 2$.** В этом случае построения в критической ситуации на ненулевой моде мало отличаются от построений раздела 2. Решения нелинейной краевой задачи (6), (7) ищем в виде

$$u(t,x,\varepsilon) \;=\; \varepsilon\Big(\xi(\tau,y)\exp\big[i\delta(1-\varepsilon a)t + ik_0x\big] + \bar{\xi}(\tau,y)\exp\big[-i\delta(1-\varepsilon a)t - ik_0x\big]\Big)+ \\ +\varepsilon^3 u_3(t,\tau,x,y)+\ldots, \qquad (40)$$

где по $t, x$ и $y$ зависимость периодическая, $\tau = \varepsilon^2 t, y = (1-\varepsilon a)t$. Подставляя (40) в (6), (7) и совершая стандартные действия, получаем следующий результат.

**Теорема 4.** *Пусть $k_0 \neq 0$ и $a^2 > 2$ и пусть $\xi(\tau,y)$ является ограниченным при $\tau \to \infty, y \in [0,1]$ решением краевой задачи*

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{2}(a^2-2)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \big(a^2 + i\delta(a^2-2)\big)\frac{\partial\xi}{\partial y} + \left(\frac{1}{2}\delta^2(2-a^2)+\gamma_1+ia^2\delta\right)\xi - 3b_1\xi|\xi|^2, \qquad (41)$$

$$\xi(\tau,x+2\pi,y) \equiv \xi(\tau,x,y) \equiv \xi(\tau,x,y+1). \qquad (42)$$

*Тогда функция*

$$u(t,x,\varepsilon) \;=\; \varepsilon\Big(\xi(\tau,y)\exp\big[i\delta(1-\varepsilon a)t + ik_0x\big] + \bar{\xi}(\tau,y)\exp\big[-i\delta(1-\varepsilon a)t - ik_0x\big]\Big)+ \\ +\varepsilon^3 u_3(t,\tau,x,y) \qquad (43)$$

*удовлетворяет краевой задаче* (6)*,* (7) *с точностью до $o(\varepsilon^3)$.*

Отметим, что при $b_1 = 0$ и $b_2 \neq 0$ последнее слагаемое в уравнении (41) заменяется на

$$-b_2\left[i\delta\xi|\xi|^2 + 3\xi^2\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial y} + 2|\xi|^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right],$$

а асимптотика решений в (43) идет не по целым степеням $\varepsilon$, а по степеням $\varepsilon^{1/2}$.

**3.2. Случай $a^2 < 2$.** Здесь, в отличие от результатов раздела 2.2, задействованы не одна, а две цепочки корней $\lambda_k^+(\varepsilon)$ и $\lambda_k^-(\varepsilon)$. Сначала введем обозначения. Положим

$$E^{\pm} = \exp\big[ik_0x + i(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta - \Omega \pm \delta)t\big].$$

Решения нелинейной краевой задачи (6), (7) ищем в виде

$$u(t,x,\varepsilon) \;=\; \varepsilon\big(\xi^+(\tau,y)E^+ + \bar{\xi}^+(\tau,y)\bar{E}^+ + \xi^-(\tau,y)E^- + \bar{\xi}^-(\tau,y)\bar{E}^-\big)+ \\ +\varepsilon^3 u_3(t,\tau,x,y)+\ldots, \qquad (44)$$

где зависимость от $t, x$ и $y$ — периодическая. После подстановки (44) в (6) и после стандартных действий получаем для определения неизвестных амплитуд $\xi^{\pm}(\tau,y)$ краевую задачу параболического типа

$$\frac{\partial\xi^{\pm}}{\partial\tau} \;=\; -A^{\pm}\frac{\partial^2\xi^{\pm}}{\partial y^2} - i\big(2A^{\pm}(\theta-\Omega_0\pm\delta)+B^{\pm}\big)\frac{\partial\xi^{\pm}}{\partial y}+ \\ + A^{\pm}(\theta-\Omega_0\pm\delta)^2 - B^{\pm}(\theta-\Omega_0\pm\delta) + \gamma_1\gamma_0^{-1} + \\ + 3\xi^{\pm}\big(|\xi^{\pm}|^2 + 2|\xi^{\mp}|^2\big)\big(b_1 - \omega_0^2 b_3 - ib_4\big) + i\omega_0 b_2\xi^{\pm}|\xi^{\pm}|^2 \qquad (45)$$

с краевыми условиями

$$\xi^{\pm}(\tau,y+1) \equiv \xi^{\pm}(\tau,y). \qquad (46)$$

Сформулируем полученное утверждение в виде теоремы.

**Теорема 5.** *Пусть* $0 < a^2 < 2$ *и пусть для произвольно фиксированного значения* $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ *краевая задача* (45), (46) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$, $y \in [0, 1]$ *решение* $\xi(\tau, y)$. *Тогда на последовательности* $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta_0)$ *функция*

$$u(t, x, \varepsilon_n) \;=\; \varepsilon_n\big(\xi^+(\tau, y)E^+ + \bar{\xi}^+(\tau, y)\bar{E}^+ + \xi^-(\tau, y)E^- + \bar{\xi}^-(\tau, y)\bar{E}^-\big) + \varepsilon_n^3 u_3(t, \tau, x, y),$$

*где* $\tau = \varepsilon_n^2 t$, $y = (1 - \varepsilon_n a)t$, *удовлетворяет краевой задаче* (6), (7) *с точностью до* $o(\varepsilon_n^3)$.

## 4. Критические случаи в краевой задаче (10)

Принципиально новые эффекты могут возникать в ситуации, когда критические случаи реализуются одновременно на бесконечном множестве мод. Рассмотрим такую ситуацию на одном наиболее распространенном примере, когда в краевой задаче (10) имеем

$$\Phi(s) \equiv \mathrm{const} \equiv \mathrm{f}_0. \tag{47}$$

Линеаризуем в нуле эту краевую задачу. В результате получим линейное уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t} + u = f_0 \left[ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(t-1, x+s) ds - u(t-1, x) \right] \tag{48}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{49}$$

Характеристическое уравнение для (48), (49) имеет вид

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + \varepsilon a \lambda + 1 = f_k \exp(-\lambda), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{50}$$

где

$$f_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ -f_0, & \text{если } k = \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{cases} \tag{51}$$

Фиксируем произвольно $\gamma_1$ и полагаем

$$f_0 = \gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_1. \tag{52}$$

При этом условии для всех, кроме одного, уравнений в (50) имеет место бесконечномерный критический случай. Следуя разработанной выше методике, решения нелинейной краевой задачи (10) ищем в виде формального ряда:

1) при условии $a^2 > 2$ имеем $\gamma_0 = 1$ и

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau, x, y) + \varepsilon^3 u_3(\tau, x, y) + \ldots \tag{53}$$

2) при условии $a^2 < 2$ имеем

$$\gamma_0 = \frac{a^2}{4}(4 - a^2)^{1/2}$$

и

$$\begin{aligned} u(t, x, \varepsilon) \;&= \varepsilon\Big(\xi(\tau, x, y) \exp\big[i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta + \delta - \Omega_0)t\big] + \\ &+ \bar{\xi}(\tau, x, y) \exp\big[-i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta + \delta - \Omega_0)t\big]\Big) + \\ &+ \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) + \ldots \end{aligned} \tag{54}$$

В (53) и (54) $\tau = \varepsilon^2 t$, $\quad y = (1 - \varepsilon a)t$, зависимость от $x$ — $2\pi$-периодическая, от $y$ — 1-антипериодическая, от $t$ в (54) – $2\pi/\omega_0$-периодическая, где $\omega_0 = (1 - a^2/2)^{1/2}$. В силу условия (51), на функцию $\xi(\tau, x, y)$ необходимо наложить условие

$$M_x(\xi) = 0, \quad \text{где} \quad M_x(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \xi(\tau, x, y)dx. \tag{55}$$

Подставим выражение (54) в (10). Совершая стандартные действия, получим уравнение относительно $u_3$. Из условия его разрешимости в указанном классе функций получим равенства:

1) при $a^2 > 2$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \left(\frac{a^2}{2} - 1\right)\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \gamma_1 \xi - b_1\big(\xi^3 - M_x(\xi^3)\big), \tag{56}$$

$$\xi(\tau, x, y+1) \equiv -\xi(\tau, x, y), \quad \xi(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \xi(\tau, x, y); \tag{57}$$

2) при $a^2 < 2$ (в обозначениях раздела 2.2)

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -R_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + R_4 \frac{\partial \xi}{\partial y} + R_5 \xi - \xi^2 \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} - 2|\xi|^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - M\left(\xi^2 \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} + 2|\xi|^2 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \tag{58}$$

с условиями (57).

Приведем итоговые утверждения.

**Теорема 6.** *1) Пусть $a^2 > 2$ и пусть $\xi(\tau, x, y)$ — ограниченное при $\tau \to \infty, x \in [0, 2\pi], y \in [0, 1]$ решение краевой задачи (56), (57). Тогда функция*

$$u(t, x, \varepsilon) \ = \ \varepsilon\xi(\tau, x, y) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y)$$

*удовлетворяет краевой задаче (48), (49) при $\tau = \varepsilon^2 t, y = (1 - \varepsilon a)t$ с точностью до $o(\varepsilon^3)$.*

*2) Пусть $0 < a^2 < 2$ и пусть $\xi(\tau, x, y)$ — ограниченное при $\tau \to \infty, x \in [0, 2\pi], y \in [0, 1]$ решение краевой задачи (58), (57). Тогда функция*

$$u(t, x, \varepsilon) \ = \varepsilon\Big(\xi(\tau, x, y) \exp\big[i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta + \delta - \Omega_0)t\big] + \\ + \bar{\xi}(\tau, x, y) \exp\big[-i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta + \delta - \Omega_0)t\big]\Big) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y)$$

*удовлетворяет краевой задаче (48), (49) при $\tau = \varepsilon^2 t, y = (1 - \varepsilon a)t$ с точностью до $o(\varepsilon^3)$.*

Таким образом, краевые задачи (56), (57) и (58), (57) являются квазинормальными формами для (48), (49). Отметим, что наличие в уравнениях (56) и (58) интегральных слагаемых по пространственной переменной позволяет в явном виде находить гладкие по $\tau$ и $y$ и ступенчатые по $x$ решения. Детально эти вопросы исследовались в работах [32–34], поэтому здесь на них не останавливаемся.

## 5. Об одном обобщении результатов

Коротко остановимся на рассмотрении более общей краевой задачи (11), (12). Выпишем характеристическое уравнение для его линеаризации в нуле

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + \varepsilon a \lambda + 1 = (f_{k1} + \varepsilon \lambda f_{k2}) \exp(-\lambda), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{59}$$

где $f_{k1}$ и $f_{k2}$ — коэффициенты разложения функций $\Phi_1(s)$ и $\Phi_2(s)$, соответственно, в ряд Фурье. Положим в (59) $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$. В результате приходим к уравнению

$$\big(1-\omega^2+ia\omega\big)\big(f_{k1}+i\omega f_{k2}\big)^{-1}=\exp\big(-i\omega\varepsilon^{-1}\big). \tag{60}$$

Изучим вопрос о существовании вещественного корня $\omega_0$ в уравнении (60). Обозначим через $p_k(\omega)$ функцию

$$p_k(\omega)=|1-\omega^2+ia\omega|\cdot|f_{k1}+i\omega f_{k2}|^{-1}.$$

Эта функция неограниченно растет при $\omega\to\pm\infty$. Поэтому существует такое $\omega_0$, что

$$p_k(\omega_0)=\min_{-\infty<k,\omega<\infty}p_k(\omega).$$

Сформулируем один простой результат.

**Лемма 5.** *Пусть $p(\omega_0)<1$. Тогда при всех достаточно малых значениях $\varepsilon$ все корни уравнения (59) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon\to 0$ вещественные части. Если же $p(\omega_0)>1$, то при всех достаточно малых значениях $\varepsilon$ уравнение (59) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon\to 0$ вещественной частью.*

Таким образом, критический случай в задаче об устойчивости реализуется при условии $p(\omega_0)=1$. После этого приведенная выше методика переносится на краевую задачу (11), (12).

## Заключение

Рассмотрен вопрос о локальной динамике полносвязной системы осцилляторов. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что они имеют бесконечную размерность. Основные результаты состоят в том, что разработан алгоритм построения специальных нелинейных краевых задач — квазинормальных форм. Их нелокальная динамика определяет асимптотику всех решений исходного уравнения в окрестности состояния равновесия.

Квазинормальными формами являются пространственно распределенные нелинейные краевые задачи, например, классические уравнения Гинзбурга–Ландау, поэтому можно сделать вывод о том, что для класса рассмотренных здесь задач характерны сложные и нерегулярные колебания.

В зависимости от величины параметра $a$ — коэффициента при $\dot u$ в (1) — решения являются либо медленно осциллирующими (при $a^2>2$), либо быстро осциллирующими (при $a^2<2$) с асимптотически большой частотой. Квазинормальные формы из раздела 4 содержат еще одну пространственную переменную. Это, конечно, приводит к усложнению динамических свойств решений.

Показано, что количество связанных уравнений в квазинормальной форме определяется числом равных по модулю коэффициентов Фурье функции $\Phi(s)$. Важная роль принадлежит и значению аргумента $\delta$ для соответствующих коэффициентов $\Phi(s)$.

Особо отметим, что в ряде квазинормальных форм присутствуют интегральные по пространственной переменной слагаемые от нелинейной функции. Это приводит к тому, что решения квазинормальных форм могут структурно усложниться. Например, в явном виде можно определить гладкие и периодические по времени, и ступенчатые по пространственной переменной решения и в некоторых случаях исследовать их устойчивость.

Обратим внимание, что в случае медленно осциллирующих решений для построения квазинормальных форм задействована только нелинейность $b_1u^3$ функции $f(u,\dot u)$. Если $b_1=0$ и $b_2\neq 0$, то происходит структурное усложнение решений и смена асимптотики решений исходного уравнения. Для быстро осциллирующих решений задействованы все коэффициенты функции $f(u,\dot u)$.

Динамические свойства исходной краевой задачи (3), (4) при $a^2 < 2$ чувствительны к изменению параметров. Этот вывод следует из того факта, что, во-первых, в квазинормальной форме присутствует величина $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$, которая при $\varepsilon \to 0$ бесконечно много раз пробегает все значения от $0$ до $2\pi$. Во-вторых, при различных значениях $\theta$ динамика квазинормальной формы может различаться [35], а значит, при $\varepsilon \to 0$ может происходить неограниченный процесс прямых и обратных бифуркаций.

Важный вывод касается роли большого запаздывания в рассматриваемых цепочках. С одной стороны, все аналитические построения при больших $T$ позволяют явно выделить критические случаи, найти асимптотику корней характеристических уравнений и получить асимптотические формулы для решений. С другой стороны, при $T \gg 1$, все квазинормальные формы содержат еще одну пространственную переменную, поэтому можно сделать вывод об усложнении динамики свойств.

**Список литературы**


1. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Turukina L. V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // Physics Letters A. 2013. Vol. 377, no. 45–48. P. 3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
2. *Osipov G. V., Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, no. 3. P. 2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
4. *Dodla R., Sen A., Johnston G. L.* Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69, no. 5. P. 056217. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.056217.
5. *Williams C. R. S., Sorrentino F., Murphy T. E., Roy R.* Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2013. Vol. 23, no. 4. P. 043117. DOI: 10.1063/1.4829626.
6. *Rao R., Lin Z., Ai X., Wu J.* Synchronization of epidemic systems with Neumann boundary value under delayed impulse // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 12. P. 2064. DOI: 10.3390/math10122064.
7. *Van der Sande G., Soriano M. C., Fischer I., Mirasso C. R.* Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77, no. 5. P. 055202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.
8. *Клиньшов В. В., Некоркин В. И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // Успехи физических наук. 2013. Т. 183, № 12. С. 1323–1336. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323.
9. *Heinrich G., Ludwig M., Qian J., Kubala B., Marquardt F.* Collective dynamics in optomechanical arrays // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 107, no. 4. P. 043603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.043603.
10. *Zhang M., Wiederhecker G. S., Manipatruni S., Barnard A., McEuen P., Lipson M.* Synchronization of micromechanical oscillators using light // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109, no. 23. P. 233906. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.233906.
11. *Lee T. E., Sadeghpour H. R.* Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 111, no. 23. P. 234101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.234101.
12. *Yanchuk S., Wolfrum M.* Instabilities of stationary states in lasers with long-delay optical feedback // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2010. Vol. 9, no. 2. P. 519–535. DOI: 10.20347/WIAS.PREPRINT.962.

13. *Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A.* Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // In: 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'98). 14-17 September 1998, Crans-Montana, Switzerland. NOLTA Society, 1998. P. 495–498.
14. *Kashchenko S. A.* Quasinormal forms for chains of coupled logistic equations with delay // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 15. P. 2648. DOI: 10.3390/math10152648.
15. *Кащенко С. А.* Динамика цепочки логистических уравнений с запаздыванием и с антидиффузионной связью // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 502, № 1. С. 23–27. DOI: 10.31857/S2686954322010064.
16. *Thompson J. M. T., Stewart H. B.* Nonlinear Dynamics and Chaos. 2nd edition. New York: Wiley, 2002. 460 p.
17. *Kashchenko S. A.* Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. Vol. 31, no. 3. P. 033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
18. *Kanter I., Zigzag M., Englert A., Geissler F., Kinzel W.* Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor // Europhysics Letters. 2011. Vol. 93, no. 6. P. 60003. DOI: 10.1209/0295-5075/93/60003.
19. *Rosin D. P., Rontani D., Gauthier D. J., Schöll E.* Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 110, no. 10. P. 104102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.104102.
20. *Yanchuk S., Perlikowski P., Popovych O. V., Tass P. A.* Variability of spatio-temporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2011. Vol. 21, no. 4. P. 047511. DOI: 10.1063/1.3665200.
21. *Klinshov V., Nekorkin V.* Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling // Cybernetics and Physics. 2012. Vol. 1, no. 2. P. 106–112.
22. *Клиньшов В. В.* Коллективная динамика сетей активных элементов с импульсными связями: Обзор // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 5. С. 465–490. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490.
23. *Hale J. K.* Theory of Functional Differential Equations. 2nd edition. New York: Springer, 1977. 366 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
24. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. New York: Wiley, 1965. 632 p.
25. *Marsden J. E., McCracken M. F.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer, 1976. 408 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6.
26. *Кащенко С. А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1052.
27. *Kaschenko S. A.* Normalization in the systems with small diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
28. *Кащенко С. А.* Уравнение Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 3. С. 457–465.
29. *Кащенко И. С., Кащенко С. А.* Локальная динамика систем разностных и дифференциально-разностных уравнений // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22, № 1. С. 71–92. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-1-71-92.
30. *Кащенко С. А.* Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40, № 5. С. 693–702.

31. *Kashchenko S. A.* Van der Pol equation with a large feedback delay // Mathematics. 2023. Vol. 11, no. 6. P. 1301. DOI: 10.3390/math11061301.
32. *Grigorieva E. V., Kashchenko S. A.* Rectangular structures in the model of an optoelectronic oscillator with delay // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2021. Vol. 417. P. 132818. DOI: 10.1016/j.physd.2020.132818.
33. *Григорьева Е. В., Кащенко С. А.* Локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 189–207. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207.
34. *Кащенко С. А.* Квазинормальные формы в задаче о колебаниях пешеходных мостов // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 506, № 1. С. 49–53. DOI: 10.31857/S2686954322050113.
35. *Kashchenko I., Kaschenko S.* Infinite process of forward and backward bifurcations in the logistic equation with two delays // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2019. Vol. 22, no. 4. P. 407–412. DOI: 10.33581/1561-4085-2019-22-4-407-412.

**References**

1. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Sataev IR, Turukina LV. About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators. Physics Letters A. 2013;377(45–48):3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
2. Osipov GV, Pikovsky AS, Rosenblum MG, Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators. Phys. Rev. E. 1997;55(3):2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
3. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
4. Dodla R, Sen A, Johnston GL. Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators. Phys. Rev. E. 2004;69(5):056217. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.056217.
5. Williams CRS, Sorrentino F, Murphy TE, Roy R. Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2013;23(4):043117. DOI: 10.1063/1.4829626.
6. Rao R, Lin Z, Ai X, Wu J. Synchronization of epidemic systems with Neumann boundary value under delayed impulse. Mathematics. 2022;10(12):2064. DOI: 10.3390/math10122064.
7. Van der Sande G, Soriano MC, Fischer I, Mirasso CR. Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators. Phys. Rev. E. 2008;77(5):055202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.
8. Klinshov VV, Nekorkin VI. Synchronization of delay-coupled oscillator networks. Phys. Usp. 2013;56(12):1217–1229. DOI: 10.3367/UFNe.0183.201312c.1323.
9. Heinrich G, Ludwig M, Qian J, Kubala B, Marquardt F. Collective dynamics in optomechanical arrays. Phys. Rev. Lett. 2011;107(4):043603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.043603.
10. Zhang M, Wiederhecker GS, Manipatruni S, Barnard A, McEuen P, Lipson M. Synchronization of micromechanical oscillators using light. Phys. Rev. Lett. 2012;109(23):233906. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.233906.
11. Lee TE, Sadeghpour HR. Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions. Phys. Rev. Lett. 2013;111(23):234101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.234101.
12. Yanchuk S, Wolfrum M. Instabilities of stationary states in lasers with long-delay optical feedback. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2010;9(2):519–535. DOI: 10.20347/WIAS.PREPRINT.962.

13. Grigorieva EV, Haken H, Kashchenko SA. Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback. In: 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'98). 14-17 September 1998, Crans-Montana, Switzerland. NOLTA Society; 1998. P. 495–498.
14. Kashchenko SA. Quasinormal forms for chains of coupled logistic equations with delay. Mathematics. 2022;10(15):2648. DOI: 10.3390/math10152648.
15. Kashchenko SA. Dynamics of a chain of logistic equations with delay and antidiffusive coupling. Doklady Mathematics. 2022;105(1):18–22. DOI: 10.1134/S1064562422010069.
16. Thompson JMT, Stewart HB. Nonlinear Dynamics and Chaos. 2nd edition. New York: Wiley; 2002. 460 p.
17. Kashchenko SA. Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021;31(3):033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
18. Kanter I, Zigzag M, Englert A, Geissler F, Kinzel W. Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor. Europhysics Letters. 2011;93(6):60003. DOI: 10.1209/0295-5075/93/60003.
19. Rosin DP, Rontani D, Gauthier DJ, Schöll E. Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks. Phys. Rev. Lett. 2013;110(10):104102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.104102.
20. Yanchuk S, Perlikowski P, Popovych OV, Tass PA. Variability of spatio-temporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2011;21(4):047511. DOI: 10.1063/1.3665200.
21. Klinshov V, Nekorkin V. Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling. Cybernetics and Physics. 2012;1(2):106–112.
22. Klinshov VV. Collective dynamics of networks of active units with pulse coupling: Review. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2020;28(5):465–490 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490.
23. Hale JK. Theory of Functional Differential Equations. 2nd edition. New York: Springer; 1977. 366 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
24. Hartman P. Ordinary Differential Equations. New York: Wiley; 1965. 632 p.
25. Marsden JE, McCracken MF. The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer; 1976. 408 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6.
26. Kaschenko SA. Quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion. Soviet Mathematics. Doklady. 1988;37(2):510–513.
27. Kaschenko SA. Normalization in the systems with small diffusion. International Journal of Bifurcation and Chaos. 1996;6(6):1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
28. Kashchenko SA. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998;38(3):443–451.
29. Kashchenko IS, Kashchenko SA. Local dynamics of difference and difference-differential equations. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2014;22(1):71–92 (in Russian). 10.18500/0869-6632-2014-22-1-71-92.
30. Kashchenko SA. Bifurcations in the neighborhood of a cycle under small perturbations with a large delay. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2000;40(5):659–668.
31. Kashchenko SA. Van der Pol equation with a large feedback delay. Mathematics. 2023;11(6):1301. DOI: 10.3390/math11061301.
32. Grigorieva EV, Kashchenko SA. Rectangular structures in the model of an optoelectronic oscillator with delay. Physica D: Nonlinear Phenomena. 2021;417:132818. DOI: 10.1016/j.physd.2020.132818.

33. Grigorieva EV, Kashchenko SA. Local dynamics of laser chain model with optoelectronic delayed unidirectional coupling. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2):189–207. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207.
34. Kashchenko SA. Quasi-normal forms in the problem of vibrations of pedestrian bridges. Doklady Mathematics. 2022;106(2):343–347. DOI: 10.1134/S1064562422050131.
35. Kashchenko I, Kaschenko S. Infinite process of forward and backward bifurcations in the logistic equation with two delays. Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2019;22(4):407–412. DOI: 10.33581/1561-4085-2019-22-4-407-412.

*Кащенко Сергей Александрович* — родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, директор Объединенного института математики и компьютерных наук им. А. Н. Колмогорова. Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В. В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е. В. Григорьевой). Опубликовал более 500 научных работ и 10 монографий. Награжден почетным званием «Заслуженный деятель науки Российской Федерации» (2020) и медалью «За вклад в реализацию государственной политики в области образования и научно-технологического развития» Министерства науки и высшего образования РФ (2023).

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru
ORCID: 0000-0002-8777-4302
AuthorID (eLibrary.Ru): 8238