



ДИНАМИКА МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НЕЙРОНОВ В ВИДЕ СВЯЗАННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.А. Акопов, В.В. Астахов, А.В. Шабунин

Исследуется динамика модели взаимодействующих нейронов в виде связанных дискретных отображений. Показано, что для данной системы типичны явления синхронизации хаоса и мультистабильности. Проведен двухпараметрический бифуркационный анализ, в результате которого установлено, что бифуркационный механизм десинхронизации и формирования мультистабильности является одним и тем же.

Введение

Хорошо известно, что взаимодействующие системы способны демонстрировать явление полной синхронизации хаоса [1-5]. Для связанных идентичных систем с бифуркациями удвоения периода типично не только явление синхронизации хаоса, но также и явление мультистабильности, когда имеются области значений параметров, при которых в фазовом пространстве одновременно существуют различные виды регулярных и хаотических аттракторов [6-9]. Кроме того, исследования бифуркационных механизмов этих явлений [10-13] показывают, что в основе процессов потери полной синхронизации хаоса и формирования мультистабильности лежит один и тот же бифуркационный сценарий, который развивается на базе определенного семейства седловых циклов, расположенных в симметричном подпространстве системы.

Эффекты синхронизации и мультистабильности имеют большое значение при решении важных проблем нейродинамики. В частности, известно [14,15], что мультистабильность лежит в основе механизма хранения и распознавания образов как в искусственных, так и в реальных (живых) нейронных сетях.

В работах [16,17] была предложена и описана простейшая модель нейрона в виде дискретного одномерного отображения, проведены исследования двух связанных нейронов. В частности, рассмотрено явление синхронизации хаоса и отмечено, что в данной системе часто сосуществуют периодические, квазипериодические и даже хаотические аттракторы, представляющие различные виды несинхронной когерентной динамики.

В данной работе показано, что наличие мультистабильности не является особенностью поведения исследуемой системы взаимодействующих нейронов. Синхронизация хаоса и мультистабильность, бифуркационные механизмы потери синхронизации хаоса и формирования мультистабильности, наблюдаемые в этой

системе, относятся к типичным для взаимодействующих систем с бифуркациями удвоения периода явлениям и подчиняются общим для данного класса систем закономерностям в формировании мультистабильности и эволюции мультистабильных состояний, в процессе формирования хаоса и в его бифуркационных механизмах.

В статье представлены результаты детального исследования динамики модели взаимодействующих нейронов. Изучается явление мультистабильности и полной синхронизации хаоса. Построены карты динамических режимов на плоскости управляющих параметров. Представлены результаты многопараметрического бифуркационного анализа определенных семейств периодических орбит. Описаны переходы к «пузыряющемуся» аттрактору и «изрешеченным» бассейнам синхронного хаотического аттрактора. Показано, что для данной системы, так же как и для многих других хорошо известных связанных систем с удвоениями периода (например, связанных логистических отображений, отображений Хенона, кубических отображений), типичны явления полной синхронизации хаоса и мультистабильности. Бифуркационный механизм процессов десинхронизации и формирования мультистабильности одинаков и является таким же, как и в перечисленных выше системах с удвоениями периода.

Динамика двух нелинейно связанных отображений

Исследуем поведение двух связанных одномерных дискретных отображений

$$x_{n+1} = f(x_n) + \varepsilon\{f(y_n) - f(x_n)\}, \quad (1)$$

$$y_{n+1} = f(y_n) + \varepsilon\{f(x_n) - f(y_n)\}, \quad (2)$$

где x_n, y_n - динамические переменные первой и второй подсистемы, ε - коэффициент связи. Парциальная система задается отображением

$$f(x_n) = \gamma x_n + \theta + w(1 + \exp(-x_n))^{-1}. \quad (3)$$

Здесь γ, θ, w - управляющие параметры индивидуальной системы. Отображение (3) было предложено в работе [16] в качестве простейшей модели одиночного нейрона. Отметим, что эта система в определенной области значений параметров демонстрирует переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

Рассмотрим поведение связанных отображений (2) для случая полностью идентичных подсистем при фиксированных значениях $\gamma=0.6, w=-16.5$ в зависимости от управляющего параметра θ и коэффициента связи ε в интервалах значений $0 \leq \theta \leq 7.0$ и $0 \leq \varepsilon \leq 0.5$.

Два нелинейно связанных дискретных отображения (2) демонстрируют разнообразные синхронные и несинхронные регулярные и хаотические режимы. Многие из регулярных и хаотических аттракторов одновременно существуют в фазовом пространстве связанных систем при одних и тех же значениях управляющих параметров. Для более наглядного представления результатов исследования разделим все множество наблюдаемых режимов на несколько характерных семейств. Для каждого семейства построим отдельную карту режимов на плоскости параметров (θ, ε) . Общая карта режимов будет состоять из нескольких листов.

На рис. 1, на плоскости управляющих параметров показаны области существования синхронных (а) и различных видов несинхронных (б, в) регулярных и хаотических режимов. Вначале опишем семейство синхронных режимов, демонстрируемых связанными отображениями.

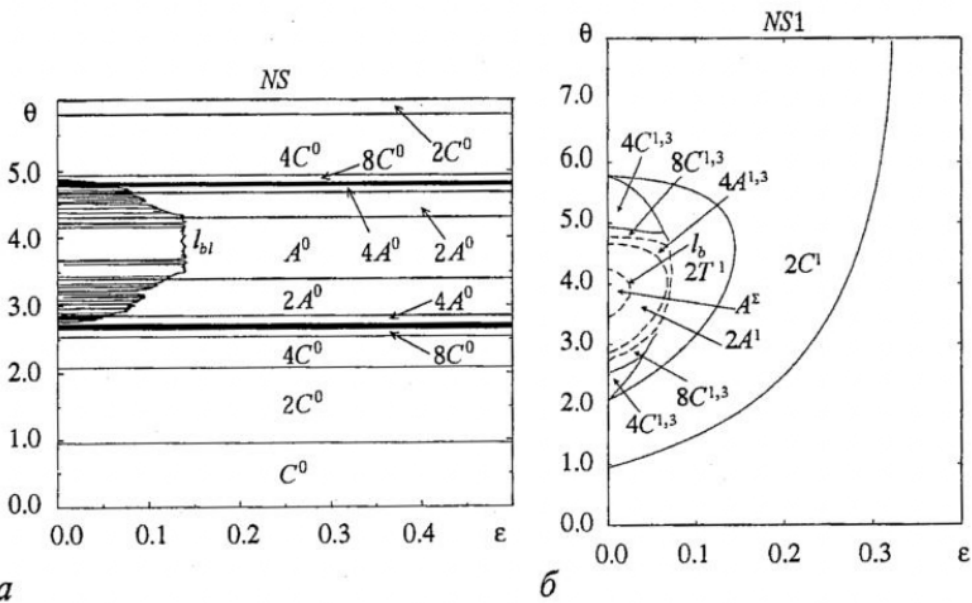
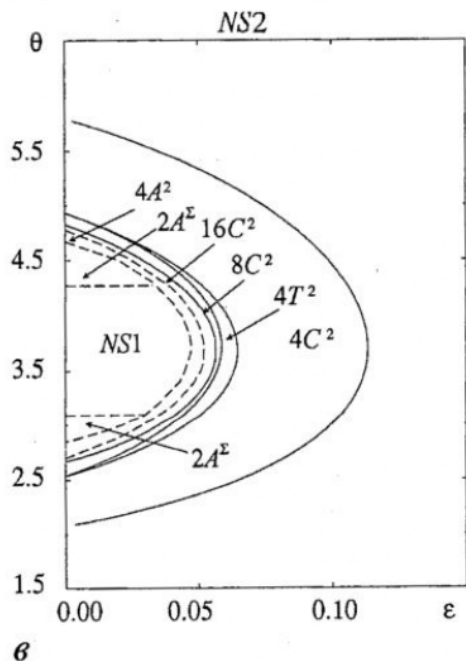


Рис. 1. Области существования режимов на плоскости параметров (θ, ϵ) : а - синхронных регулярных и хаотических режимов; б - режимов, возникших на базе орбиты $2C^1$; в - режимов, возникших на базе орбиты $4C^2$

В системе (2) при $0 < \theta < 0.9541$ во всем исследуемом диапазоне коэффициента связи $0 < \epsilon < 0.5$ существует устойчивая неподвижная точка C^0 , расположенная в симметричном подпространстве $x_n = y_n$. С увеличением θ на базе C^0 наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода симметричных орбит $2^N C^0$ (где $N=0,1,2,3,\dots$). При значениях коэффициента связи из области, расположенной справа от линии l_{b1} на плоскости (θ, ϵ) (см. рис. 1, а), каскад бифуркаций завершается образованием хаотического аттрактора, расположенного в симметричном подпространстве полного фазового пространства системы. В закритической области по мере увеличения θ наблюдается последовательность бифуркаций слияния лент синхронных хаотических аттракторов $2^N A^0$. На рисунке показаны области существования $4A^0$, $2A^0$ и A^0 . Здесь также имеются окна устойчивости регулярных синхронных орбит различных периодов, не отмеченных на плоскости параметров, так как они существуют в довольно узких интервалах значений. При дальнейшем увеличении параметра θ наблюдается обратная последовательность переходов к регулярным синхронным движениям: $A^0 \rightarrow 2A^0 \rightarrow 4A^0 \rightarrow \dots \rightarrow 8C^0 \rightarrow 4C^0 \rightarrow 2C^0$. Здесь следует отметить, что при увеличении θ от 0 до 7.0 в указанных бифуркационных переходах от неподвижной точки C^0 к одноленточному синхронному хаотическому аттрактору A^0 и затем от хаотического аттрактора A^0 к синхронной периодической орбите $2C^0$ участвует одно и то же семейство периодических орбит. В нижней области плоскости параметров с увеличением θ симметричные периодические



режимов с увеличением θ симметричные периодические

орбиты $2^N C^0$ из устойчивых превращаются в седловые, а в верхней области плоскости параметров при дальнейшем увеличении θ они из седловых вновь превращаются в устойчивые.

Таким образом, в системе (2) в зависимости от значений управляющих параметров имеют место различные регулярные и хаотические синхронные режимы, отвечающие хаотическим аттракторам и устойчивым периодическим орбитам, расположенным в симметричном подпространстве $x_n = y_n$ полного фазового пространства взаимодействующих систем. Значения θ , при которых происходят бифуркации синхронных режимов, полностью совпадают с соответствующими значениями для индивидуальной системы.

При изменении значений коэффициента связи устойчивые периодические орбиты $2^N C^0$, а также симметричные орбиты других периодов, которые соответствуют окнам устойчивости в области хаоса, никаких бифуркаций не претерпевают. Режимы регулярных синхронных движений наблюдаются при любых ϵ из исследуемой области значений.

Режимы полной синхронизации хаоса существуют не при любых значениях коэффициента связи, а только выше некоторых пороговых значений. На плоскости параметров (θ, ϵ) (см. рис. 1, а) область синхронизации хаоса лежит справа от линии l_{br} . При уменьшении ϵ режимы синхронизации хаоса сменяются несинфазными режимами. В зависимости от значений θ при пересечении линии l_{br} наблюдаются переходы на различные несинфазные режимы. Как правило, при уменьшении ϵ хаотический аттрактор $4A^0$ сменяется либо устойчивой орбитой $8C^4$, либо орбитой $16C^8$, аттрактор $2A^0$ - либо орбитой $4C^2$, либо $8C^4$, аттрактор A^0 - орбитой $2C^1$. Фазовые портреты перечисленных регулярных режимов представлены на рис. 2. Отметим, что данные периодические орбиты являются симметричными по отношению к замене переменных $x_n \leftrightarrow y_n$. Сравнение временных реализаций x_n и y_n указанных периодических режимов показывает, что колебания в подсистемах сдвинуты относительно друг друга для $2C^1$ на 1 итерацию, для $4C^2$ на 2 итерации, для $8C^4$ на 4 итерации. Верхний индекс в обозначении периодических орбит указывает на величину временного сдвига между колебаниями в подсистемах.

При переходе от режима синхронизации хаоса к регулярным несинфазным режимам поведение системы является довольно сложным. Рассмотрим более тщательно переход от синхронного хаотического аттрактора A^0 к несинфазному режиму $2C^1$ при $\theta=4$ с уменьшением коэффициента связи ϵ .

В интервале значений коэффициента связи ϵ примерно от 0.5 до 0.26 наблюдается устойчивый и грубый режим синхронизации хаоса. При задании начальных условий в окрестности симметричного подпространства фазовые траектории достаточно быстро выходят на хаотический аттрактор A^0 . Разность значений динамических переменных $(x_n - y_n)$ за небольшое число итераций монотонно затухает до нуля. Малые деформации системы (например, воздействие шума малой интенсивности или введение небольшой расстройки между параметрами) качественно не меняют характер движения, и фазовая траектория остается в малой окрестности симметричного подпространства. При уменьшении коэффициента связи ϵ в интервале значений примерно от 0.26 до 0.22 продолжает существовать режим синхронизации хаоса. Однако в малой окрестности A^0 появляются начальные условия, стартуя с которых, изображающая точка вначале уходит от симметричного подпространства, затем возвращается в его окрестность и притягивается к A^0 . В процессе установления синхронного режима могут наблюдаться несколько таких «выбросов» от симметричного хаотического множества. Ниже значения $\epsilon \approx 0.22$ режим синхронизации хаоса становится негрубым. При плавном уменьшении коэффициента связи в слабо неидентичных

подсистемах хаотический аттрактор A^0 плавно «разбухает», возникает режим перемежающейся синхронизации. В реализациях (x_n, y_n) имеются ламинарные фазы, когда изображающая точка эволюционирует в окрестности симметричного подпространства, которые прерываются случайными турбулентными всплесками, что соответствует уходу фазовой траектории от хаотического множества A^0 . Переход к такому поведению системы ассоциируется с так называемым «пузырящимся» переходом (bubbling transition), а индуцированный малым шумом или слабой неидентичностью режим - «пузырящимся» поведением (bubbling behaviour) [18,19]. В отсутствие флуктуаций в идентичных подсистемах переходные процессы перемежающейся синхронизации завершаются установлением синхронных хаотических колебаний вплоть до $\varepsilon=0.181$. Ниже этого значения коэффициента связи также наблюдаются переходные процессы перемежающейся синхронизации. Однако в тонкой зависимости от выбора начальных условий по-прежнему устанавливается либо режим синхронных хаотических колебаний, соответствующий аттрактору A^0 , либо режим несинхронных регулярных колебаний, соответствующий устойчивой периодической орбите $2C^1$ (см. рис. 2, а). Выход фазовой траектории на устойчивую орбиту $2C^1$ не зависит от удаленности начальных условий от хаотического множества A^0 . В малой окрестности симметричного подпространства можно отыскать начальные условия, стартуя с которых, изображающая точка уходит на орбиту $2C^1$. Ниже будет показано, что наблюдаемые эффекты обусловлены явлением «изрешечивания» (the phenomenon of riddled basins [19-21]) бассейна притяжения

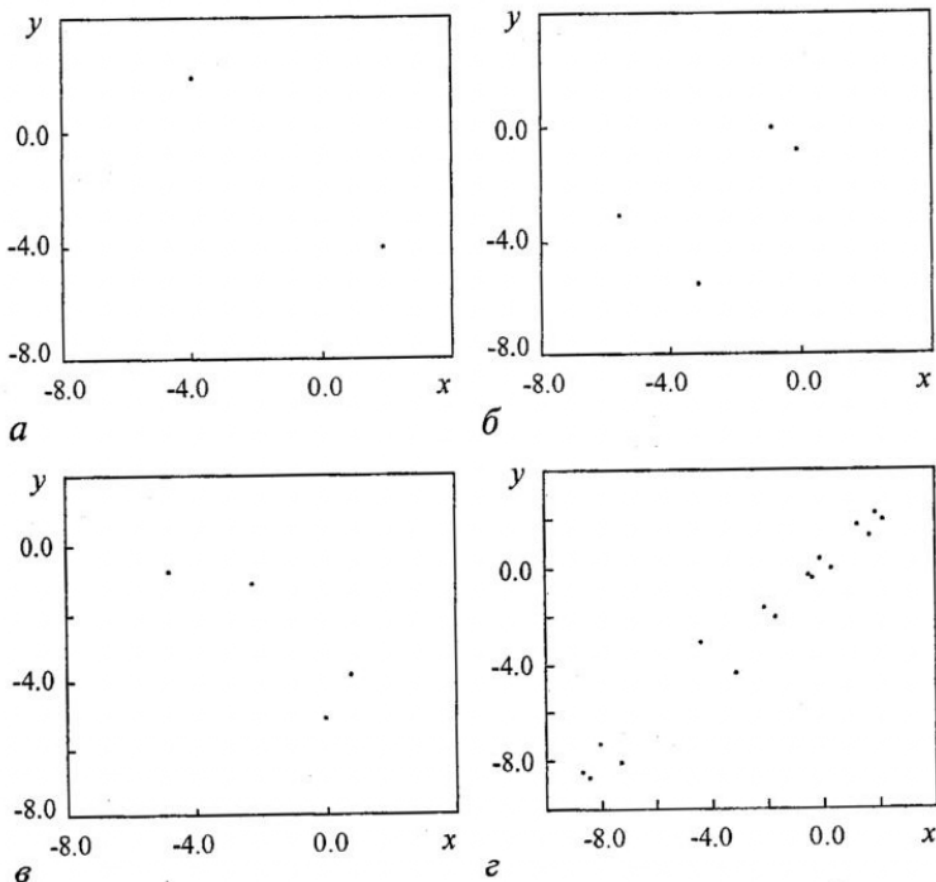


Рис. 2. Фазовые портреты режимов: а - $2C^1$; б - $4C^2$; в - $8C^4$; г - $16C^8$

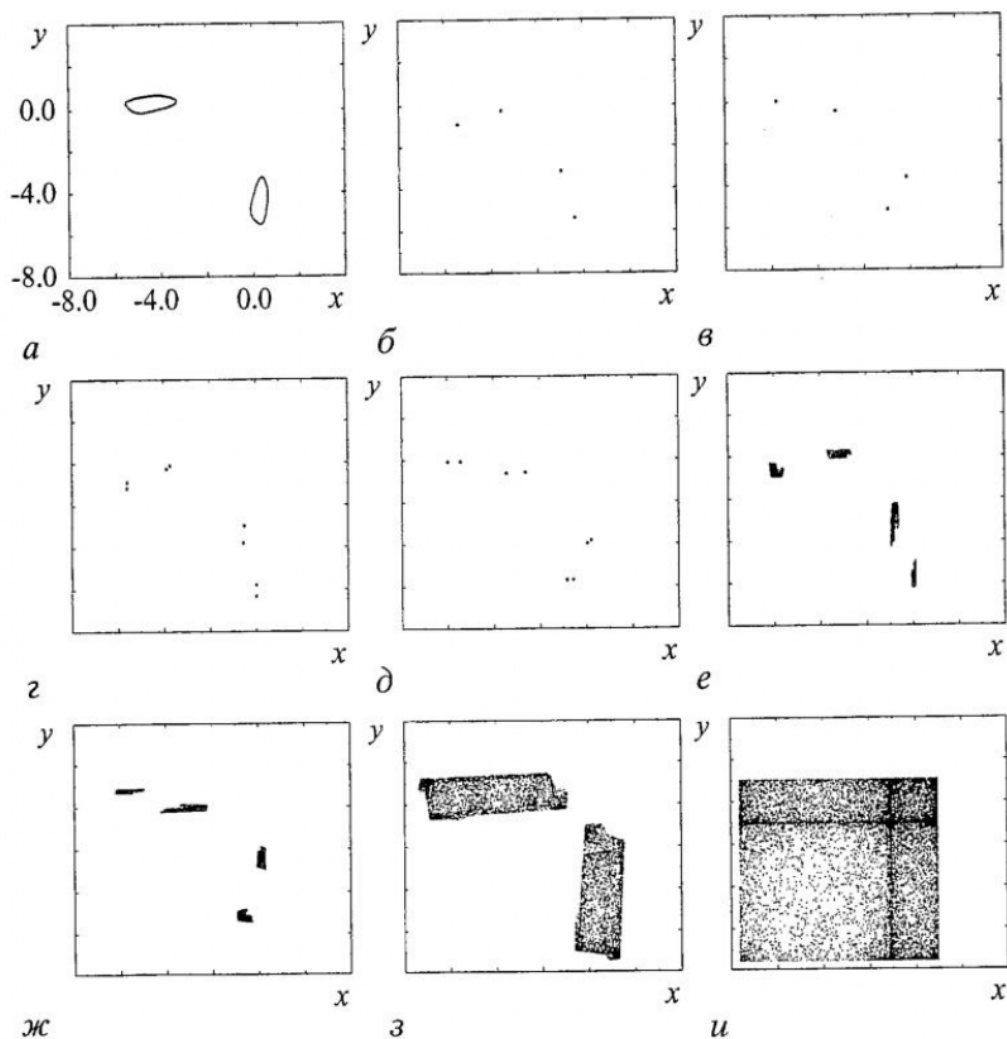


Рис. 3. Фазовые портреты режимов, возникших на базе орбиты $2C^1$: а - $2T^1$; б - $4C^1$; в - $4C^3$; г - $8C^1$; д - $8C^3$; е - $4A^1$; ж - $4A^3$; з - $2A^1$; и - A^Σ

симметричного хаотического аттрактора A^0 . При введении малого шума или малой неидентичности между подсистемами режим синхронизации хаоса не возникает, однако длительность переходных процессов, завершающихся установлением режима $2C^1$, тонко зависит от выбора начальных условий и может достигать нескольких десятков миллионов итераций. С дальнейшим уменьшением коэффициента связи практически при любых начальных условиях из окрестности A^0 за небольшое число итераций устанавливается $2C^1$. Опишем колебательные режимы, которые возникают на базе устойчивых периодических орбит $2C^1$, $4C^2$.

На рис. 1, б построена карта динамических режимов, которые возникают на базе $2C^1$. Фазовые портреты характерных режимов представлены на рис. 3. Из рис. 1, б видно, что область существования данного семейства режимов ограничена по связи. Слева от границы области существования $2C^1$ при изменении управляющих параметров устойчивая орбита $2C^1$ мягко сменяется квазипериодическими движениями $2T^1$ (рис. 3, а). С уменьшением коэффициента связи при пересечении штриховой линии (см. рис. 1, б) происходит переход к хаосу через разрушение квазипериодических движений. При пересечении сплошных линий (в верхней и

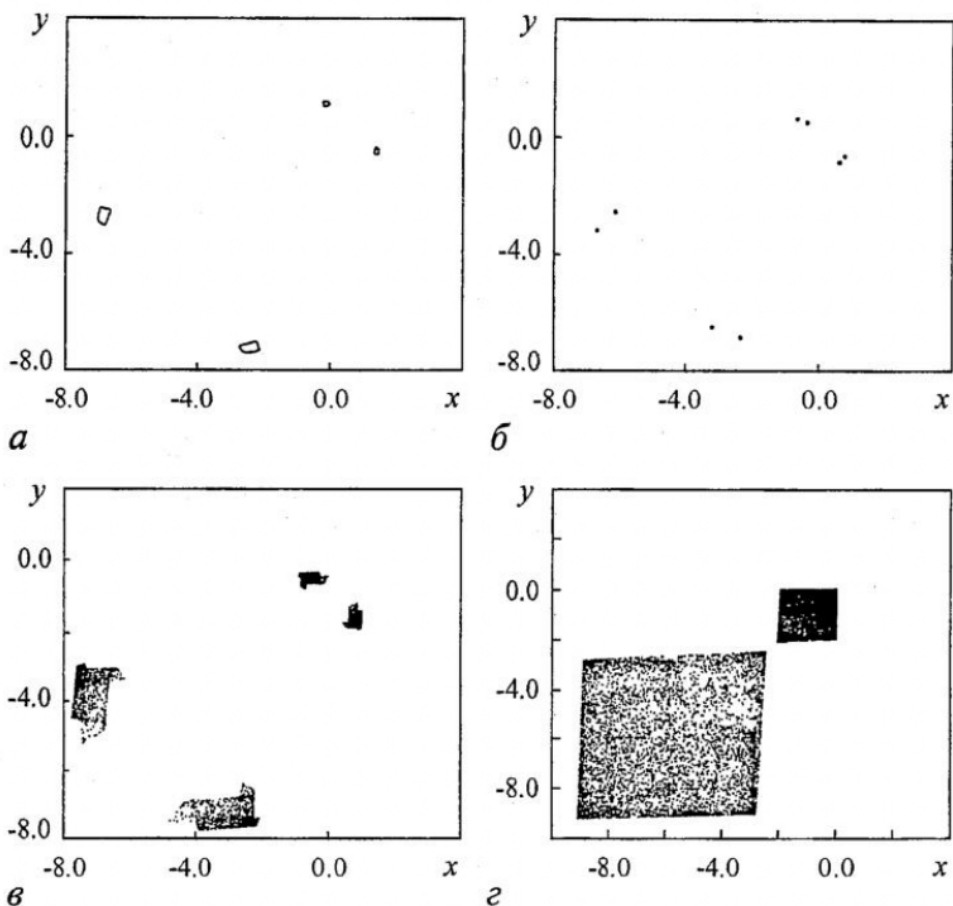


Рис. 4. Фазовые портреты режимов, возникших на базе орбиты $4C^2$: а - $4T^2$; б - $8C^4$; в - $4A^2$; г - $2A^2$

нижней части плоскости параметров) с уменьшением ϵ возникает либо устойчивая орбита $4C^1$ (рис. 3, б), либо устойчивая орбита $4C^3$ (рис. 3, в). Эти орбиты симметричны друг другу по отношению к замене переменных $x \leftrightarrow y$ и одновременно существуют в фазовом пространстве системы. С увеличением (уменьшением) параметра θ , например, от 2.3 до 4.0 (от 5.5 до 4.0) на базе каждой из них происходит каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся возникновением хаоса. В закритической области значений параметров наблюдается последовательность бифуркаций слияния лент хаотических аттракторов, которая сопровождается объединением определенных хаотических множеств. На рис. 3, е, ж показаны фазовые портреты хаотических аттракторов $4A^1$ и $4A^3$, одновременно сосуществующих в фазовом пространстве системы и сформированных на базе орбит $4C^1$ и $4C^3$, соответственно. При дальнейшем изменении параметров эти хаотические множества сливаются и образуется хаотический аттрактор $2A^1$ (рис. 3, з), который завершает эволюцию данного семейства режимов. Далее, при пересечении линии l_b возникает хаотический аттрактор A^2 (рис. 3, и), который объединяет в себе хаотические множества различных семейств.

На рис. 1, в показана карта еще одного семейства несинхронных режимов. Фазовые портреты характерных режимов представлены на рис. 4. При вариации значений управляющих параметров орбита $4C^2$ порождает орбиты и переходы, аналогичные рассмотренным выше на базе $2C^1$. Однако это семейство режимов занимает на плоскости параметров меньшую область. Эволюция режимов на базе

$4C^2$ завершается образованием хаотического аттрактора $4A^2$ (рис. 4, в). Затем данный аттрактор объединяется с хаотическими множествами, сформированными на базе других орбит более высокого периода $8C^4$, $16C^8$ и т.д., в результате чего возникает хаотический аттрактор $2A^{\Sigma}$ (рис. 4, г). Дальнейшее изменение параметров ведет к перескоку на лист несинфазных режимов NS1, происходит переход от $2A^{\Sigma}$ к объединенному хаотическому аттрактору A^{Σ} (см. рис. 3, и), который включает в себя хаотические множества различных семейств.

Из сравнения карт динамических режимов на рис. 1, а-в видно, что имеются области значений параметров, где листы NS, NS1 и NS2 перекрываются. То есть в фазовом пространстве системы одновременно существуют аттракторы различных семейств. Задавая определенным образом значения параметров θ и ϵ , в зависимости от начальных условий можно обнаружить две устойчивые орбиты периода два - $2C^0$, $2C^1$, четыре орбиты периода четыре - $4C^0$, $4C^2$, $4C^1$, $4C^3$ и т.д. Наибольшее число сосуществующих аттракторов наблюдается при малой связи в окрестностях точек перехода к хаосу (снизу и сверху) для синхронных орбит. В закритической области в зависимости от выбора начальных условий можно обнаружить как регулярные, так и хаотические одновременно существующие аттракторы.

Таким образом, в системе (2) наблюдается явление синхронизации хаоса и явление мультистабильности. Потеря синхронизации хаоса сопровождается «пузырящимся» и «изрешечивающим» переходами. При потере синхронизации возникают устойчивые периодические орбиты определенного вида. Каждая из этих орбит порождает свое семейство характерных режимов. Сравнение карт динамических режимов показывает, чем выше период орбиты, на базе которой формируется семейство несинфазных режимов, тем меньшую область оно занимает на плоскости параметров. Однако имеются области значений параметров, при которых в фазовом пространстве системы одновременно существуют аттракторы различных семейств.

Бифуркационный анализ потери синхронизации хаоса и формирования мультистабильности

Для того чтобы получить более полное представление о «внутренних» процессах, приводящих к сложной разнообразной динамике взаимодействующих нейронов в виде связанных дискретных отображений (2), в данном разделе проведен двухпараметрический бифуркационный анализ системы. Его результаты ясно показывают, что в основе процессов потери полной синхронизации хаоса и формирования мультистабильности лежит один и тот же бифуркационный сценарий, который развивается на базе определенного семейства седловых циклов, расположенных в симметричном подпространстве системы.

На рис. 5 на плоскости управляющих параметров (θ, ϵ) построены линии бифуркационных значений. Ниже линии l_{s1}^1 в системе (2) существует устойчивая неподвижная точка C^0 , расположенная в симметричном подпространстве $x_n = y_n$ полного фазового пространства взаимодействующих отображений. Зафиксируем величину коэффициента связи при любом значении справа от бифуркационной линии l_t^1 (например, $\epsilon=0.4$) и рассмотрим динамику системы с увеличением параметра θ . В этом случае наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода симметричных периодических орбит $2^N C^0$ (где $N=0,1,2,\dots$) и переход к синхронному хаотическому аттрактору $2^N A^0$. Бифуркации периодических орбит происходят на линиях l_{s1}^i (где i - период орбиты). Выше линии l_{s1}^{inf} наблюдаются синхронные хаотические режимы. На бифуркационных линиях собственные значения

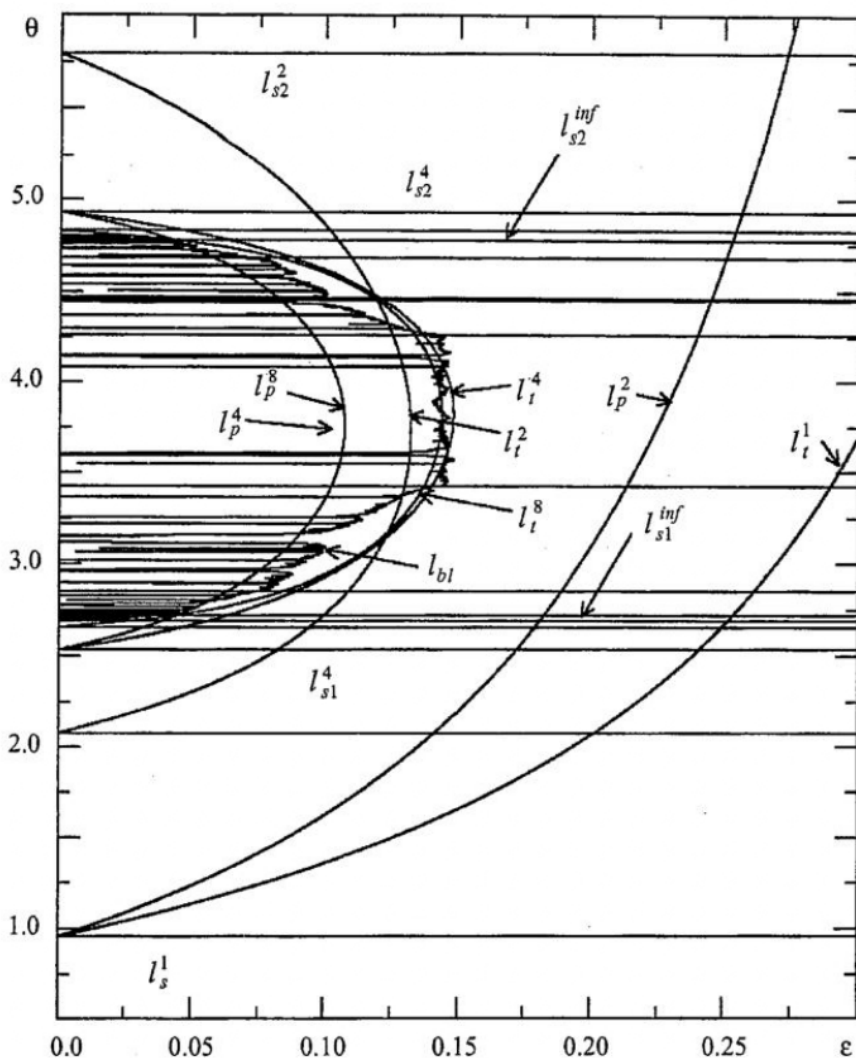


Рис. 5. Бифуркационные линии устойчивых и седловых периодических орбит на плоскости параметров (θ, ϵ)

периодических орбит $2^N C^0$ становятся равными (-1). Синфазные периодические орбиты теряют устойчивость по отношению к симметричным возмущениям и остаются устойчивыми в трансверсальном направлении. При указанных значениях коэффициента связи существуют только синхронные режимы. Устойчивые и седловые периодические орбиты располагаются в симметричном подпространстве полного фазового пространства связанных систем. При перемещении по плоскости параметров к линии l_{s1}^{inf} после каждой бифуркации удвоения увеличивается число циклов $2^N C^0$, лежащих в симметричном подпространстве. Так, например, ниже линии l_{s1}^1 имеется одна неподвижная точка C^0 . После ее бифуркации - устойчивая периодическая орбита $2C^0$ и седловая устойчивая в трансверсальном направлении точка C^0 . Затем устойчивая орбита $4C^0$ и седловые $2C^0$, C^0 и т.д. Выше линии критических значений l_{s1}^{inf} каждая орбита из основного семейства $2^N C^0$ является седловой, устойчивой в трансверсальном направлении. Часть периодических орбит встроена в симметричный хаотический аттрактор $2^N A^0$ и часть располагается между лентами данного хаотического аттрактора. С ростом надкритичности при завершении каскада бифуркаций слияния лент хаотического

аттрактора все седловые периодические орбиты данного семейства встроены в одноленточный хаотический аттрактор A^0 . При дальнейшем увеличении параметра θ наблюдается обратная последовательность бифуркаций, которая завершается переходом к устойчивой периодической орбите $2C^0$. В прямом и обратном каскаде бифуркаций принимают участие одни и те же периодические орбиты $2^N C^0$. Вначале они теряют устойчивость к симметричным возмущениям и становятся седловыми (при пересечении линий l_{s1}^i), затем данные седловые орбиты превращаются в устойчивые (при пересечении линий l_{s2}^i с увеличением θ). Синхронные хаотические аттракторы наблюдаются в закритической области значений θ , ограниченной линиями l_{s1}^{inf} и l_{s2}^{inf} .

Изменение величины коэффициента связи на поведение устойчивых периодических орбит не влияет. Они существуют в устойчивом состоянии во всем исследуемом интервале значений ϵ . На базе седловых симметричных периодических орбит с уменьшением ϵ происходит ряд бифуркаций. Потеря трансверсальной устойчивости седловых симметричных орбит происходит на линиях l_i^i (где i - период орбиты). Отметим, что данные седловые орбиты демонстрируют одинаковые бифуркации и в закритической области и вне ее. Однако в том случае, когда седловые орбиты встроены в хаотический аттрактор, их бифуркации ведут к потере полной синхронизации хаоса и рождению новых (несинфазных) видов колебаний. Соответствующие им аттракторы могут одновременно существовать в фазовом пространстве системы. В случае, если симметричные седловые орбиты не являются встроеными в синхронный хаотический аттрактор, то их бифуркации ведут только к формированию мультистабильности. В закритической области значений параметров, когда седловые орбиты располагаются между лентами хаотического аттрактора, их бифуркации не влияют на режим синхронизации хаоса. Симметричный хаотический аттрактор может сосуществовать с регулярными или хаотическими аттракторами, которые соответствуют несинфазным видам колебаний.

Рассмотрим подробнее бифуркационный механизм потери синхронизации хаоса в связанных отображениях нейрона при уменьшении коэффициента связи ϵ .

В системе (1), (2) при $\theta=3.729$ и $\epsilon > \epsilon_{bl}$ (см. рис. 5) наблюдается одноленточный синхронный хаотический аттрактор A^0 . Он сформирован в результате последовательности бифуркаций удвоения периода симметричных орбит $2^N C^0$. Данные орбиты встроены в A^0 и определяют его «скелет». При уменьшении ϵ на базе седловых периодических орбит $2^N C^0$ происходит последовательность бифуркаций, которые индуцируют потерю синхронизации хаоса. Процесс потери полной синхронизации хаоса начинается с бифуркации седловой точки C^0 . На линии l_i^i ее собственное значение становится равным (-1) , и происходит бифуркация удвоения периода. Седловая точка C^0 превращается в репеллер. В ее окрестности вне симметричного подпространства рождается седловая орбита $2C^1$. При уменьшении связи точки данной орбиты плавно расходятся от симметричного подпространства. Эта бифуркация ведет к потере грубости режима синхронизации хаоса и определяет «пузырящийся» переход. В интервале значений ϵ , ограниченном линиями l_i^1 и l_p^2 , наблюдаются переходные процессы, которые имеют характер перемежаемости. Переходные процессы завершаются синхронными колебаниями. Шум малой интенсивности или слабая расстройка по параметрам индуцируют «пузырящееся» поведение. Следующий этап процесса потери синхронизации хаоса связан с бифуркацией несинхронной периодической орбиты, расположенной вне симметричного подпространства $x_n = y_n$. На линии l_p^2 собственное значение седловой периодической орбиты $2C^1$ становится равным $+1$. Происходит бифуркация вил. Периодическая орбита $2C^1$ становится устойчивой. В ее окрестности рождается пара симметричных друг другу седловых орбит $2C_1^1$ и

$2C_2^1$. Эти седловые орбиты и их устойчивые многообразия определяют границы бассейна притяжения устойчивой периодической орбиты $2C^1$. Устойчивые многообразия седловых орбит опираются на репеллер C^0 . В результате бифуркации вил возникает область притяжения орбиты $2C^1$, которая сужается к симметричному подпространству и опирается на C^0 . В этой области фазовая траектория покидает синхронное хаотическое множество и притягивается к $2C^1$. При удалении от бифуркационного значения седловые орбиты $2C_1^1$ и $2C_2^1$ расходятся и область захвата расширяется. Бифуркация вил орбиты $2C^1$ ведет к «изрешечиванию» бассейна синхронного хаотического аттрактора A^0 . Изрешеченный бассейн наблюдается в интервале значений коэффициента связи, ограниченном линиями l_p^2 и l_{bl} . На рис. 6 построены бассейны симметричного хаотического множества A^0 (белый цвет) и устойчивой периодической орбиты $2C^1$ (черный цвет). Видно, что бассейн хаотического множества A^0 «изрешечен дырками», которые относятся к бассейну притяжения орбиты $2C^1$. При дальнейшем уменьшении ϵ на линии l_{bl} происходит бифуркация «прорыва». Хаотическое множество A^0 становится хаотическим седлом. Из рис. 5 видно, что другие симметричные седловые орбиты с более высокими периодами $2C^0, 4C^0, 8C^0$, встроенные в хаотическое множество A^0 , также демонстрируют бифуркации удвоения периода на линиях l_t^2, l_t^4, l_t^8 , соответственно. В результате они становятся репеллерами и в их окрестности вне симметричного подпространства рождаются седловые периодические орбиты $4C^2, 8C^4, 16C^8$. С уменьшением ϵ эти несинхронные седловые периодические орбиты претерпевают бифуркации вил, в результате которых они становятся устойчивыми. Процесс потери синхронизации хаоса завершается бифуркациями удвоения периода симметричных периодических орбит $2^N C^0$ с $N > 2$. Бифуркационные линии этих орбит накапливаются к линии бифуркации «прорыва».

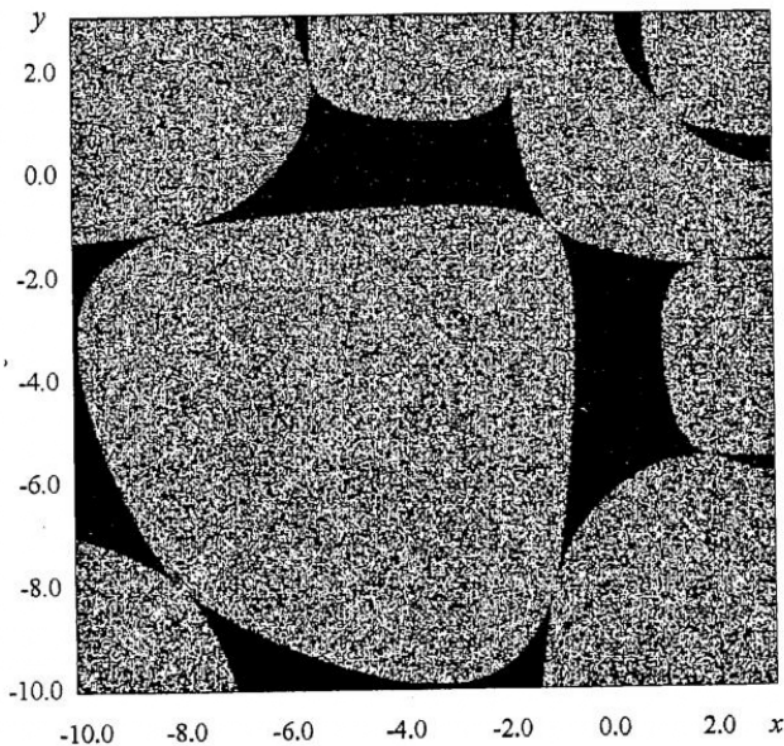


Рис. 6. Бассейны притяжения A^0 (белый цвет) и орбиты $2C^1$ (черный цвет)

При других значениях θ , если режим синхронизации хаоса соответствует многолеточным симметричным хаотическим аттракторам $2^N A^0$ ($N > 0$), мы можем наблюдать такую же последовательность бифуркаций на базе того же семейства седловых периодических орбит $2^N C^0$. Однако процесс потери синхронизации хаоса определяется бифуркациями на базе только тех седловых периодических орбит, которые встроены в хаотический аттрактор. Например, в случае двухленточного симметричного хаотического аттрактора $2A^0$ бифуркации на базе седловой точки C^0 не влияют на процесс потери синхронизации хаоса. После бифуркации вил (на линии $l_p^{(2)}$) устойчивая периодическая орбита $2C^1$ сосуществует с синхронным хаотическим аттрактором $2A^0$. Развитие трансверсальной неустойчивости данного синхронного хаотического аттрактора начинается с бифуркаций удвоения симметричных седловых орбит более высокого периода. По взаимному расположению бифуркационных линий видно, что на плоскости параметров можно выбрать направления движения, на которых вначале происходит бифуркация удвоения периода седловой орбиты $2C^0$, затем, практически одновременно, бифуркации орбит $4C^0$ и $8C^0$. Вне симметричного подпространства рождаются неустойчивые несинхронные орбиты $4C^2$, $8C^4$, $16C^8$. Эти бифуркации индуцируют появление и развитие «пузырящегося» поведения. При дальнейшем уменьшении ϵ имеет место бифуркация вил орбиты $4C^2$, в результате которой режим становится устойчивым. Наблюдается изрешечивающий переход. Далее по параметру происходит бифуркация «прорыва». В то же время на плоскости параметров в области существования $2A^0$ можно выбрать иные направления, на которых при незначительном изменении коэффициента связи наблюдается ряд бифуркаций удвоения периода симметричных седловых орбит с более высокими периодами ($N > 2$). Они полностью определяют потерю трансверсальной устойчивости хаотического аттрактора $2A^0$. После этих бифуркаций происходит бифуркация «прорыва». Бифуркации вил, в результате которых становятся устойчивыми $4C^2$, $8C^4$, $16C^8$, наблюдаются при значительно меньших значениях коэффициента связи. В таких сечениях плоскости параметров потеря синхронизации хаоса происходит без «изрешечивающего» перехода, а только в результате развития «пузырящегося» поведения.

Точки бифуркации прорыва на плоскости параметров образуют сложную ломаную линию l_{br} . Длинные «пики» соответствуют окнам устойчивости периодических орбит различных семейств, которые появляются в закритической области значений параметров между линиями l_{s1}^{inf} и l_{s2}^{inf} . Сформированные в результате бифуркаций удвоения периода на базе этих орбит хаотические аттракторы теряют трансверсальную устойчивость при других значениях параметров. Для них наблюдается такой же бифуркационный сценарий, но на базе «своего» семейства периодических орбит.

Таким образом, при уменьшении значений коэффициента связи ϵ на базе седловых периодических орбит, расположенных в симметричном подпространстве полного фазового пространства связанных систем, наблюдается определенная последовательность бифуркаций, которая приводит к потере синхронизации хаоса. Помимо потери синхронизации, данная последовательность бифуркаций ведет к появлению новых и новых устойчивых несимметричных орбит, которые располагаются вне симметричного подпространства. Устойчивая орбита $2C^1$ появляется после двух бифуркаций (бифуркация удвоения периода и субкритическая бифуркация вил) на базе седловой точки C^0 , устойчивая орбита $4C^2$ - на базе $2C^0$, $8C^4$ - на базе $4C^0$ и т.д. При вариации значений управляющих параметров каждая из этих несимметричных орбит порождает свое семейство несинфазных режимов, что приводит к развитию мультистабильности.

Для связанных систем с бифуркациями удвоения периода характерно явление

мультистабильности. В качестве примера на рис. 7 представлены четыре устойчивые орбиты с периодом четыре ($4C^0$, $4C^2$, $4C^1$ и $4C^3$), их бассейны притяжения и неустойчивые периодические орбиты, которые определяют границы бассейнов данных регулярных аттракторов при $\theta=2.5$ и $\epsilon=0.02$. При других значениях управляющих параметров можно наблюдать другие виды аттракторов, сосуществующих в фазовом пространстве системы. Рассмотрим более детально бифуркационный механизм формирования мультистабильности, используя пример сосуществующих аттракторов, представленных на рис. 7. Из бифуркационной диаграммы на рис. 5 видно, что при $\theta=2.5$ и сильной связи (например, $\epsilon=0.4$) в системе существует устойчивая периодическая орбита $4C^0$ и седловые орбиты $2C^0$ и C^0 , расположенные в симметричном подпространстве полного фазового пространства связанных отображений. При уменьшении значений ϵ устойчивая симметричная орбита $4C^0$ не претерпевает каких-либо бифуркаций. Она наблюдается при любых значениях связи, в том числе и при $\epsilon=0.02$ (см. рис. 7). Седловые орбиты C^0 и $2C^0$ демонстрируют бифуркации удвоения периода. На линии l_1^2 второе собственное значение орбиты $2C^0$ становится равным (-1) . Вне симметричного подпространства рождается седловая орбита $4C^2$. На линии l_p^4 второе собственное значение этой орбиты входит в единичную окружность через $+1$. Происходит бифуркация вил, в окрестности $4C^2$ появляются седла $4C_1^2$, $4C_2^2$ и орбита становится устойчивой. Данные орбиты существуют при $\epsilon=0.02$ и показаны на рис. 7. На базе седловой точки C^0 при уменьшении ϵ происходят такие же бифуркации на линиях l_1^1 и l_p^2 . Здесь после бифуркации вил появляется устойчивая орбита $2C^1$. При вариации значений управляющих параметров она порождает свое семейство несинфазных режимов, в частности, устойчивые орбиты $4C^1$ и $4C^3$, изображенные на рис. 7. На рис. 8

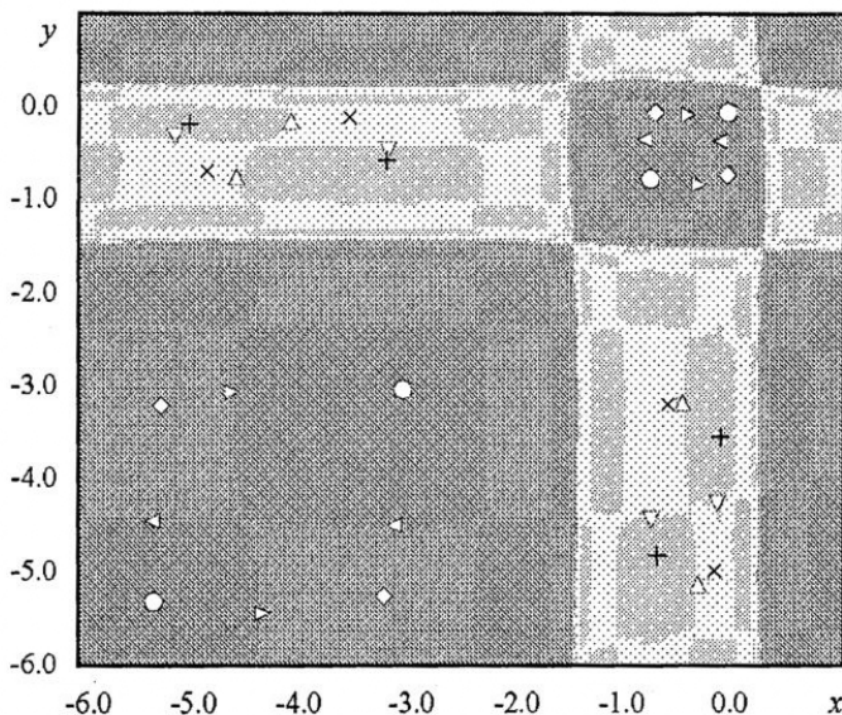


Рис. 7. Устойчивые орбиты периода четыре: $4C^0$ (O), $4C^2$ (◇), $4C^1$ (x), $4C^3$ (+), их бассейны притяжения и неустойчивые периодические орбиты $4C_{S1}^2$ (), $4C_{S2}^2$ (), $4C_{S1}^1$ (▽), $4C_{S3}^1$ (△), которые определяют границы бассейнов данных регулярных аттракторов

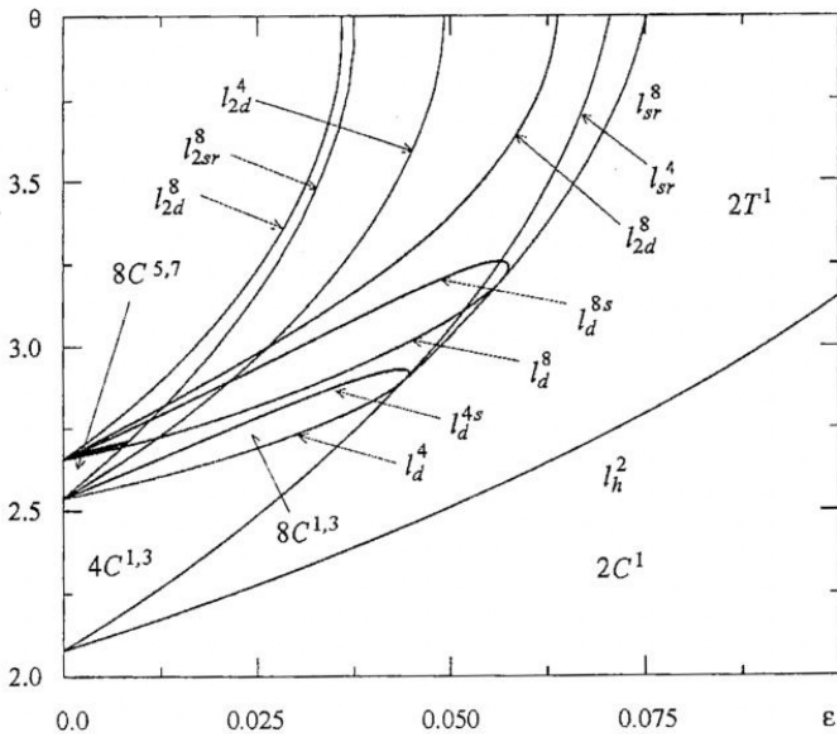


Рис. 8. Бифуркационные линии периодических орбит, возникших на базе $2C^1$

показана двухпараметрическая бифуркационная диаграмма семейства периодических орбит, которые возникли на базе устойчивой орбиты $2C^1$. Здесь видно, что для $\theta=2.5$ при уменьшении ϵ орбита $2C^1$ претерпевает бифуркацию Хопфа на линии l_h^2 . При дальнейшем уменьшении величины связи имеет место седло-узловая бифуркация на торе $2T^1$. В результате рождаются две пары периодических орбит: устойчивая $4C_N^1$ и седловая $4C_N^3$, устойчивая $4C_N^3$ и седловая $4C_N^5$. (Появление двух пар обусловлено симметрией системы (2).) Таким образом, мы полностью описали бифуркационный сценарий появления четырех сосуществующих аттракторов, представленных на рис. 7, и неустойчивых периодических орбит, которые определяют границы их бассейнов притяжения.

Рассмотрим более детально эволюцию семейства режимов на базе орбиты $2C^1$. Результаты двухпараметрического бифуркационного анализа представлены на рис. 8. Устойчивые орбиты периода четыре ($4C_N^{1,3}$) существуют в области значений параметров, ограниченной бифуркационными линиями l_d^4 и l_{2d}^4 . При увеличении параметра θ устойчивые орбиты $4C_N^1$ и $4C_N^3$ претерпевают бифуркации удвоения периода при пересечении линии l_d^4 . В результате рождаются устойчивые орбиты $8C_N^1$ и $8C_N^3$, которые существуют в области значений параметров, ограниченной линиями l_d^4 и l_d^8 . Ставшие седловыми орбиты $4C_N^1$ и $4C_N^3$ на линии l_{2d}^4 претерпевают еще одну бифуркацию удвоения периода. Они становятся репеллерами и в их окрестности рождаются седловые орбиты периода восемь. При пересечении линии l_{2sr}^8 эти орбиты ($8C_N^{5,7}$) претерпевают субкритическую бифуркацию вил и становятся устойчивыми. Таким образом, в области значений параметров, ограниченной справа линией l_{2sr}^8 и сверху линией l_{sr}^8 существует четыре устойчивых орбиты периода восемь ($8C_N^1, 8C_N^3, 8C_N^5$ и $8C_N^7$). То есть при слабой связи с увеличением параметра θ наблюдается каскад бифуркаций, который сопровождается увеличением числа мультистабильных

состояний в два раза: $(2C^1) \rightarrow (4C^2, 4C^3) \rightarrow (8C^4, 8C^5, 8C^6, 8C^7), \dots$ Перечисленные орбиты периода восемь демонстрируют такие же бифуркации, как и орбиты периода четыре. На линиях l_d^8 и l_{2d}^8 орбиты $8C^{1,3}$ претерпевают последовательно первую и вторую бифуркацию удвоения периода (вначале переходит через (-1) одно собственное значение, а затем на линии l_{2d}^8 - второе собственное значение). Орбиты $8C^{5,7}$ также претерпевают бифуркацию удвоения периода дважды. Бифуркационные линии l_d^{4s} и l_d^{8s} на рис. 8 отвечают бифуркациям удвоения седловых орбит $4C_S^{1,3}$ и $8C_S^{1,3}$, соответственно. На линии l_{sr}^8 происходит седло-узловая бифуркация для двух пар периодических орбит $8C_N^{1,3}$ и $8C_S^{1,3}$.

Описанный бифуркационный каскад увеличения числа мультистабильных состояний на базе орбиты $2C^1$ завершается переходом к хаосу. С увеличением θ на базе каждой из периодических орбит происходит формирование хаотического аттрактора. При дальнейшем увеличении θ наблюдается последовательность бифуркаций слияния лент, которая сопровождается объединением определенных хаотических множеств: $\dots(8A^1, 8A^3, 8A^5, 8A^7) \rightarrow (4A^1, 4A^3) \rightarrow (2A^1)$. Формирование хаотического аттрактора $2A^1$ завершает эволюцию мультистабильных состояний данного семейства. При дальнейшем увеличении θ происходит переход к объединенному хаотическому аттрактору A^2 , который включает хаотические множества многих семейств.

Рассмотренный случай является одним из возможных примеров сосуществующих мультистабильных состояний. Как уже было отмечено выше, каждая из несимметричных устойчивых орбит $2C^1$, $4C^2$, $8C^4$ и т.д. при вариации значений управляющих параметров порождает свое семейство несинфазных режимов, что приводит к развитию мультистабильности. Области существования данных семейств несинфазных режимов на плоскости параметров ограничены соответствующими линиями бифуркаций ви: l_p^2 , l_p^4 , l_p^8 и т.д. (см. рис. 5). Из структуры плоскости параметров на рис. 5 видно, что имеются области значений параметров, при которых в фазовом пространстве системы будут существовать одновременно аттракторы различных семейств. Для каждого семейства наблюдаются схожие бифуркационные процессы, однако различаются периоды орбит $2C^1$, $4C^2$, $8C^4$, которые порождают соответствующие семейства несинфазных режимов, и чем выше период базовой орбиты, тем меньшую область на плоскости параметров занимает семейство несинфазных режимов.

Заключение

В работе проведено детальное исследование динамики модели взаимодействующих нейронов в виде связанных дискретных отображений. Показано, что для данной системы, так же как и для многих других взаимодействующих систем с удвоениями периода, типичны явления синхронизации хаоса и мультистабильности. В результате двухпараметрического бифуркационного анализа определенного семейства периодических орбит выявлены механизмы процессов десинхронизации и формирования мультистабильности. Установлено, что бифуркационный механизм процессов десинхронизации и формирования мультистабильности одинаков.

Авторы выражают признательность Фонду Развития Гражданских Исследований (CRDF, грант REC-006) и Российскому Фонду Фундаментальных Исследований (грант 00-02-17512) за частичное финансирование данной работы.

Библиографический список

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // *Prog. Theor. Phys.*, 1983. Vol. 69. P. 32.
2. *Pikovsky A.S.* On the interaction of strange attractors // *Z. Phys.* 1984. Vol. 55 B. P. 149.
3. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28, № 8. С.991.
4. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 29. С.1050.
5. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P.821.
6. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Квазигодородные стохастические движения и их разрушение в системе связанных нелинейных осцилляторов // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1988. Т. 31. С.627.
7. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, вып. 3. С. 60.
8. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *ЖТФ.* 1990. Т. 60, № 10. С. 19.
9. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // *Радиотехника и электроника.* 1997. Т. 42, № 8. С.974.
10. *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V.* Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. № 6. P. 1014.
11. *Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V.* Effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled system // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 5620-5628.
12. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Механизмы разрушения хаотической синхронизации в системе связанных кубических отображений // *Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1999. Т. 7, № 2, 3. С. 3-11.
13. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* Multistability formation and synchronization loss in coupled Henon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. 056212.
14. *Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.* Multistability and delayed recurrent loops // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol.76. P. 708.
15. *Foss J., Moss F., Milton J.* Noise, multistability, and delayed recurrent loops // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55. P. 4536.
16. *Pasemann F.* A simple chaotic neuron // *Physica D.* 1997. Vol. 104. P. 205.
17. *Pasemann F.* Synchronized chaos and other coherent states for two coupled neurons // *Physica D.* 1999. Vol. 128. P. 236.
18. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Lett A.* 1994. Vol. 193. P. 126.
19. *Venkataramani S.C., Hunt B.R., Ott E.* Bubbling transition // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P. 1346.
20. *Pikovsky A.S., Grassberger P.* Symmetry breaking bifurcations for coupled chaotic attractors // *J. Phys. A. Math. Gen.* 1991. Vol. 24. P. 4587.

DYNAMICS OF COUPLED MAPS MODELLING NEURON BEHAVIOUR

A.A. Akopov, V.V. Astakhov, A.V. Shabunin

Synchronization phenomenon in a system of two coupled neuron maps is considered. This system possess rich behaviour with developed multistability. Performed two-parametric analysis of bifurcations demonstrates that loss of complete chaotic synchronization and multistability formation are based on the same bifurcational mechanisms.



Акопов Артем Александрович - родился в Сочи (1973), окончил физический факультет Саратовского университета (2000). В настоящее время учится в аспирантуре на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ.



Астахов Владимир Владимирович - окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил кандидатскую диссертацию (1983) и докторскую (1999). Работает доцентом кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов - теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 50 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



Шабунин Алексей Владимирович - родился в Саратове (1966). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности радиофизика (1990). Защитил кандидатскую диссертацию (1998) по синхронизации и управлению хаосом в связанных колебательных системах. Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов - теория колебаний и динамический хаос. Автор 18 опубликованных работ.