



Изв. вузов «ПНД», т.11, № 1, 2003

УДК 517.9

## СРЕДНЯЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

*А.А. Короновский, А.Е. Храмов, И.А. Хромова*

В настоящей работе рассматривается зависимость средней длительности переходных процессов в одномерных системах с дискретным временем (отображениями) от точности определения длительности и от выбранных значений управляющих параметров. На примере эталонных одномерных отображений (логистическое отображение и отображение окружности на себя) показано, что средняя длительность переходного процесса определяется мультипликатором устойчивого цикла. Предложено соотношение, характеризующее среднюю длительность переходного процесса в зависимости от точности ее определения и значения мультипликатора устойчивого цикла, реализующегося при выбранных значениях управляющих параметров.

Динамические системы с дискретным временем (отображения) являются в последнее время одним из классических объектов исследований, направленных на изучение сценариев перехода к хаосу [1, 2, 3], управления хаосом, синхронизации [4, 5] и ряда других феноменов. Как правило, в подобных случаях исследуется поведение динамических систем после того, как заканчивается переходный процесс, то есть изображающая точка в фазовом пространстве достигает аттрактора. Сам переходный процесс представляется чем-то бесполезным и ненужным. Тем не менее, следует отметить, что переходный процесс также несет информацию о системе. В ряде случаев оказывается важным рассматривать поведение системы, находящейся на стадии переходного процесса [6,7,8], а не тогда, когда система вышла на аттрактор.

Длительность переходного процесса зависит, во-первых, от управляющих параметров, и соответственно от того, какие аттракторы реализуются в фазовом пространстве системы. Во-вторых, длительность переходного процесса существенным образом зависит от выбора начальных условий. В работе [9] на примере логистического отображения было показано, что зависимость длительности переходного процесса от начальных условий имеет достаточно сложный вид и подчиняется ряду определенных закономерностей. Можно ввести интегральную характеристику переходного процесса системы, не зависящую от начальных условий, определив среднюю длительность переходного процесса по всему множеству начальных условий при фиксированных значениях управляющих параметров. В этом случае средняя длительность переходного процесса будет характеризовать поведение системы в целом в зависимости от выбранных значений управляющих параметров.

В настоящей работе рассматривается вопрос о зависимости средней длительности переходного процесса в одномерных системах с дискретным временем от управляющих параметров и от точности, с которой определяется длительность переходного процесса.

Под длительностью переходного процесса  $T_\varepsilon(x_0)$ , определяемой с точностью, характеризуемой параметром  $\varepsilon$ , в одномерной динамической системе с дискретным временем

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1)$$

понимаем число итераций, по истечении которых значение переменной  $x_n$  достигнет аттрактора, реализующегося при выбранных значениях управляющих параметров<sup>1</sup>. Как уже отмечалось выше, длительность переходного процесса зависит существенным образом от начального условия  $x_0$ , выбранных значений управляющих параметров и точности, с которой она (длительность) определяется. Усредненное по начальным условиям значение длительности переходного процесса  $\langle T_\varepsilon \rangle$  зависит исключительно от точности и характеристик аттрактора, существующего в фазовом пространстве системы, а следовательно, от выбранных значений управляющих параметров, и может характеризовать состояние системы.

Оказывается, что в том случае, когда в динамической системе реализуется периодический режим (устойчивый цикл периода  $n$ ), важную роль в формировании характера переходного процесса играет мультиликатор. Для одномерных отображений мультиликатор цикла периода  $n$ , состоящего из элементов  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ , определяется как  $\mu = f'(x_1^0) \times f'(x_2^0) \times \dots \times f'(x_n^0)$ . В случае неподвижной точки  $x^0$  мультиликатором является значение производной от функции отображения, вычисленной в этой точке:  $\mu = f'(x^0)$  (см., например, [10]). На рис. 1 показана зависимость средней длительности переходного процесса  $\langle T_\varepsilon \rangle$  от величины мультиликатора  $\mu$  для неподвижной устойчивой точки логистического отображения

$$x_{n+1} = f(x, \lambda) = \lambda x_n (1 - x_n) \quad (2)$$

для различных значений  $\varepsilon$ . Отчетливо видно, что с повышением точности (увеличением  $\varepsilon$ ) средняя длительность переходного процесса (при одном и том же значении управляющего параметра  $\lambda$ ) увеличивается. Наличие «изрезанности» зависимости  $\langle T_\varepsilon \rangle(\mu)$  связано с характерным масштабом наблюдения (параметром  $\varepsilon$ ).

На рис. 2 приведены зависимости длительности переходных процессов от начальных условий для логистического отображения (2) при двух значениях управляющего параметра  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , выбранных таким образом, чтобы  $\lambda_1 < \lambda_c < \lambda_2$ , где  $\lambda_c$  - значение управляющего параметра, при котором имеет место особенность на графике зависимости  $\langle T_\varepsilon \rangle(\mu)$  (показана стрелкой на врезке рис. 1). Видно, что резкое увеличение средней длительности переходного процесса  $\langle T_\varepsilon \rangle$  связано с появлением «пиков» на зависимости длительности переходного процесса от начальных условий  $T_\varepsilon(x_0)$  (рис. 2, б). Это, в свою очередь, происходит при фиксированных значениях управляющих параметров  $\lambda_{c,i}(\varepsilon)$ ,  $i = \pm 1, \pm 2, \dots$ <sup>2</sup>, когда точка экстремума отображения (2)  $x=1/2$  отображается за  $|i|$  итераций в одну из

<sup>1</sup> В данной работе не рассматриваются мультистабильные состояния, то есть мы предполагаем, что в фазовом пространстве рассматриваемой динамической системы при выбранных значениях управляющих параметров существует единственный аттрактор.

<sup>2</sup> Значение  $i$  полагается положительным для ветви зависимости  $\langle T_\varepsilon \rangle(\mu)$ , соответствующей положительным значениям  $\mu$ , и отрицательным - для ветви отрицательных значений мультиликатора.

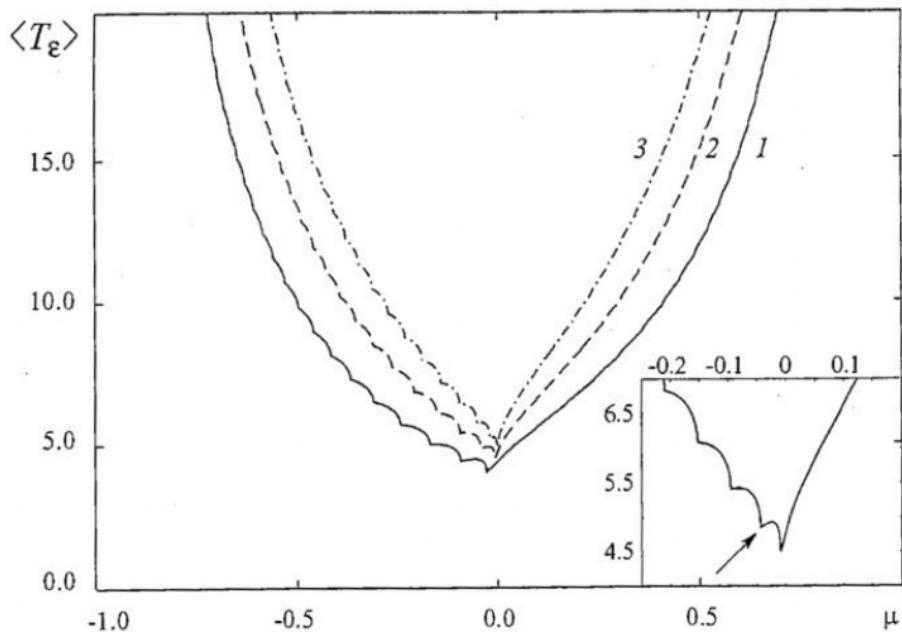


Рис. 1. Зависимость средней длительности переходного процесса от величины мультипликатора  $\mu$  для цикла периода 1 логистического отображения для различных значений  $\epsilon$ :  $10^{-4}$  (кривая 1);  $10^{-5}$  (2);  $10^{-6}$  (3). На врезке показан фрагмент кривой 2 в окрестности  $\mu=0$

границ отрезка  $[x^0 - \epsilon, x^0 + \epsilon]$ , внутри которого переходный процесс считается законченным

$$|f^{[l]}(1/2, \lambda_{c,i}(\epsilon)) - x^0| = \underbrace{|f(f(\dots f(1/2, \lambda_{c,i}(\epsilon)) \dots)) - x^0|}_{[l] \text{ раз}} = \epsilon, \quad (3)$$

$x^0$  - неподвижная устойчивая точка отображения (2). Значение управляющего параметра  $\lambda_{c,\pm 1}(\epsilon)$ , при котором возникает первая «особенность» на графике зависимости  $\langle T_\epsilon \rangle(\mu)$ , определяется соотношением

$$\lambda_{c,\pm 1}(\epsilon) = 2 + 2\epsilon \mp 2[(2+\epsilon)\epsilon]^{1/2}, \quad (4)$$

которое является решением (3) для  $i=\pm 1$ . В то же самое время, «изрезанность» ветви зависимости  $\langle T_\epsilon \rangle(\mu)$ , отвечающей отрицательным значениям мультипликатора ( $i=-1, -2, \dots$ ), более ярко выражена, нежели ветви, отвечающей положительным значениям  $\mu$  (см. рис. 1). Это обусловлено тем, что для отрицательных значений мультипликатора возникающий пик на зависимости  $T_\epsilon(x_0)$  бесконечное число раз транслируется вдоль оси начальных условий  $x$  (см. рис. 2, б), чего не происходит для положительных значений  $\mu$  (рис. 3, б).

Понятно, что аналогичная «изрезанность» графика зависимости  $\langle T_\epsilon \rangle(\mu)$  имеет место и для устойчивых циклов периода  $2l$ , возникающих при увеличении управляющего параметра  $\lambda$ . Следует обратить внимание на то, что, хотя подобное явление носит объективный характер, оно является следствием существования характерного масштаба наблюдения  $\epsilon$  и не несет большой смысловой нагрузки.

Обсудим теперь вопрос о том, каким соотношением описывается зависимость средней длительности переходного процесса от  $\epsilon$ . В том случае, если поведению отображения (1) соответствует неподвижная устойчивая точка (цикл периода 1), то средняя длительность переходного процесса будет определяться соотношением

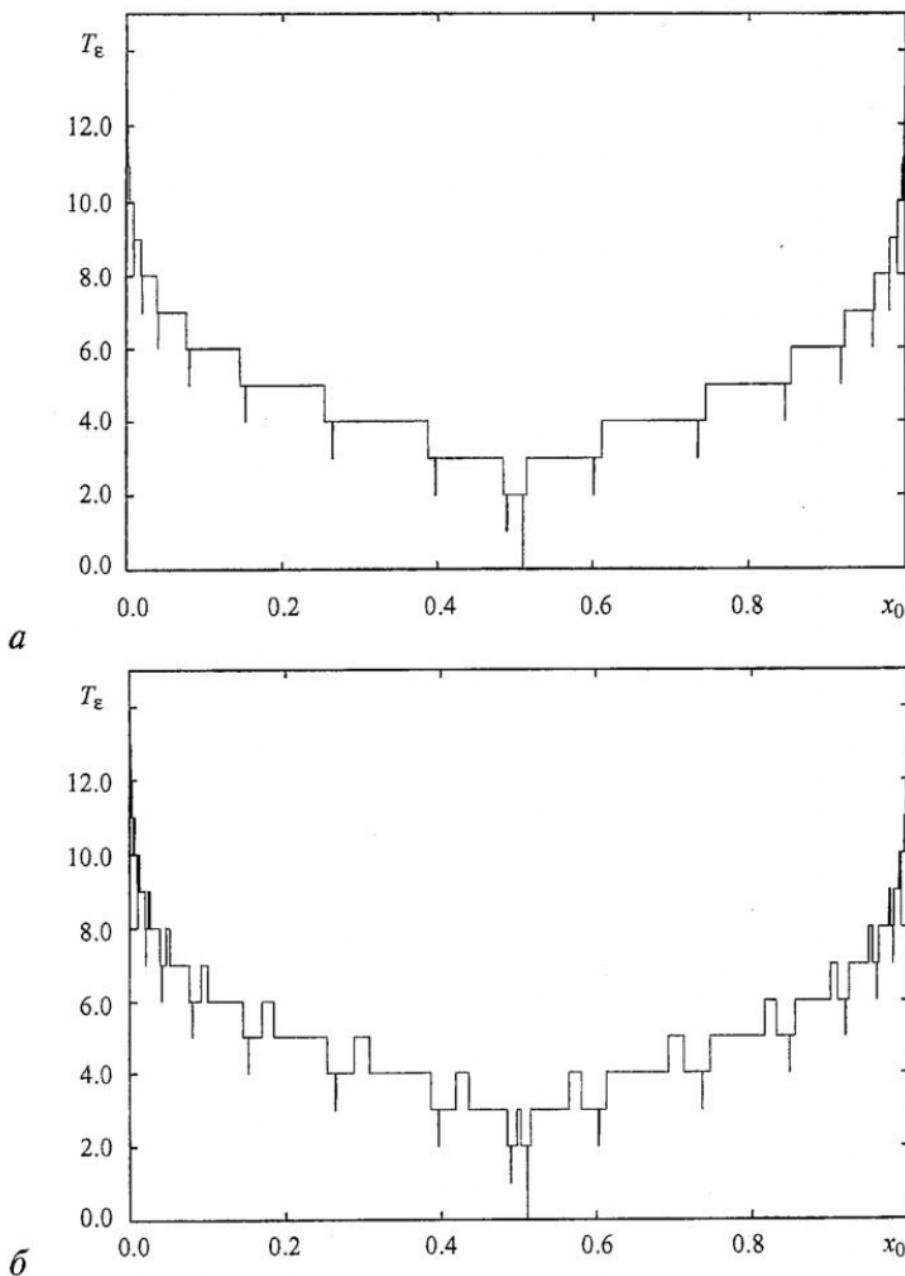


Рис. 2. Зависимость длительности переходного процесса от начальных условий  $x_0$  при  $\varepsilon=10^{-5}$  и различных значениях управляющего параметра  $\mu$ : а - 2.043 ( $\mu=-0.043$ ), б - 2.044 ( $\mu=-0.044$ )

$$\langle T_\varepsilon \rangle \simeq \log_{|\mu|} (\varepsilon/\chi). \quad (5)$$

В этом соотношении  $\mu$  - мультипликатор устойчивой неподвижной точки;  $\chi$  - функция, зависящая от значения управляющего параметра, вид которой обсуждается ниже. Соотношение (5) получено в линейном приближении динамики системы (1) в окрестности устойчивой неподвижной точки и тем лучше соответствует действительности, чем с большей точностью (и, соответственно, с меньшим  $\varepsilon$ ) определяется длительность переходного процесса, чем больше дискретного времени «проводит» система на линейном участке.

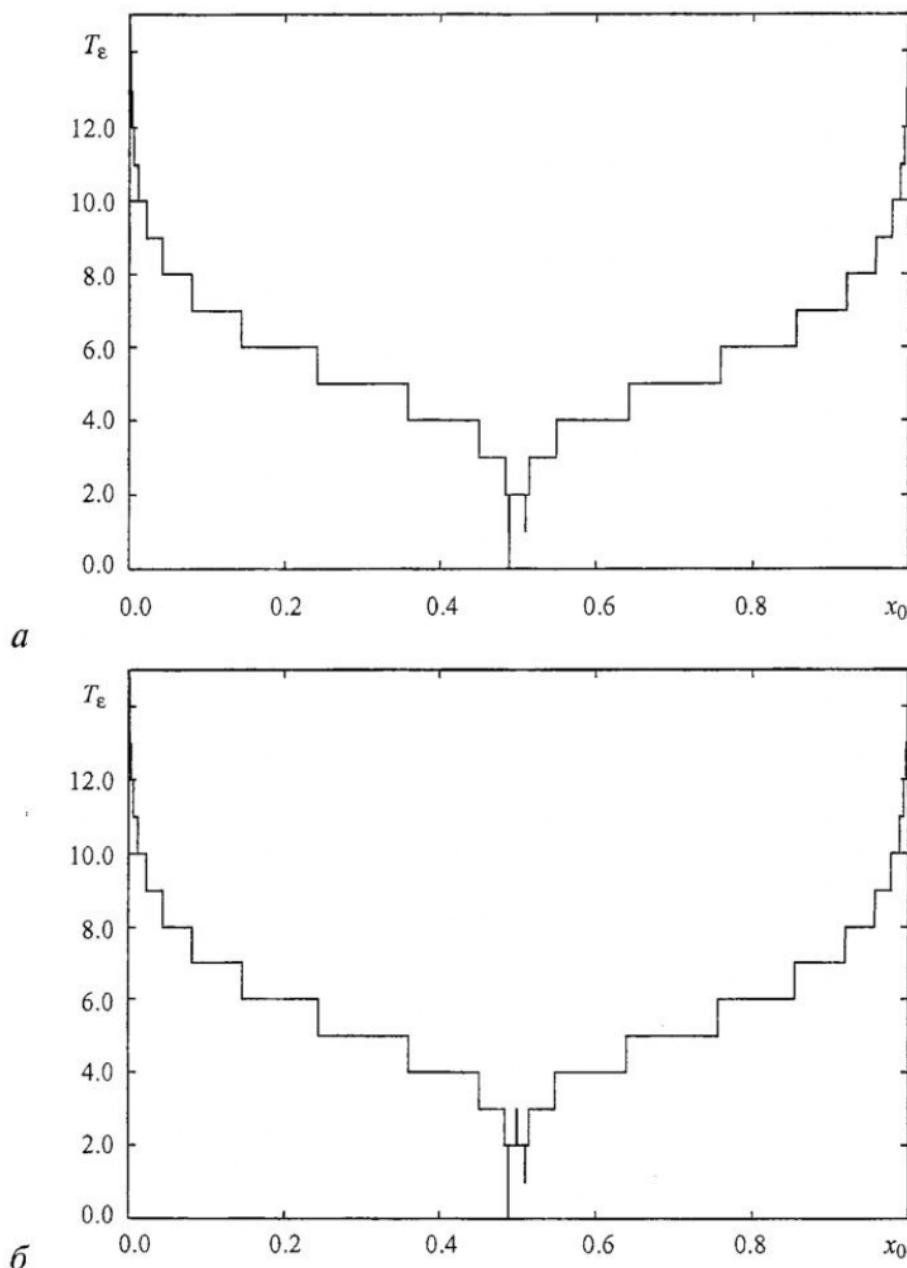


Рис. 3. Зависимость длительности переходного процесса от начальных условий  $x_0$  при  $\varepsilon=10^{-5}$  и различных значениях управляющего параметра  $\lambda$ :  $a$  - 1.958 ( $\mu=0.042$ ),  $b$  - 1.957 ( $\mu=0.043$ )

Исследование свойств  $n$ -циклов дискретных отображений типа (1) сводится к изучению  $n$ -кратно проитерированного отображения

$$F(x) = f(f(\dots f(x)\dots)), \quad (6)$$

$n$  раз

при этом элементам  $n$ -цикла отображения (1) соответствуют неподвижные точки отображения (6), а одна итерация отображения (6) соответствует  $n$  итерациям (1). Поэтому в случае, если в системе реализуется устойчивый цикл периода  $n$  (например, в результате бифуркации удвоения периода при увеличении управляющего

параметра  $\lambda$  в логистическом отображении (2)), соотношение (5) должно быть заменено на

$$\langle T_\epsilon \rangle \approx n \log_{|\mu|} (\epsilon/\chi), \quad (7)$$

где  $n$  - период, а  $\mu$  - мультипликатор соответствующего цикла. Таким образом, при каскаде бифуркаций удвоения периода в логистическом отображении среднее значение длительности переходного процесса  $\langle T_\epsilon \rangle$  возрастает при переходе от  $n$ -цикла к  $2n$ -циклу примерно в два раза (при условии равенства мультипликаторов  $\mu_n$  и  $\mu_{2n}$  соответствующих циклов).

На рис. 4 приведена зависимость усредненной длительности переходного процесса  $\langle T_\epsilon \rangle$  от  $\epsilon$  для логистического отображения при различных значениях управляющего параметра  $\lambda$  в двойном логарифмическом масштабе. Значения усредненной длительности переходного процесса были получены итерированием отображения (2) при различных начальных условиях с последующим усреднением (точки на рисунке). Непрерывные линии соответствуют соотношениям (5), (7). Из рисунка видно, что усредненная длительность переходного процесса  $\langle T_\epsilon \rangle$  при значениях управляющего параметра  $\lambda=1.25$  и  $\lambda=2.75$ , когда в системе реализуется неподвижная устойчивая точка  $x^0=(\lambda-1)/\lambda$ , имеющая мультипликатор  $\mu=0.75$  (кривая 1) и  $\mu=-0.75$  (кривая 2), соответственно, совпадают тем лучше, чем с большей точностью определяется длительность переходного процесса  $T_\epsilon(x_0)$ . Аналогичная зависимость средней длительности переходного процесса  $\langle T_\epsilon \rangle$  от  $\epsilon$  для цикла периода 2 логистического отображения (2) и соответствующая кривая 5, полученная с помощью соотношения (7), также приведены на рис. 4.

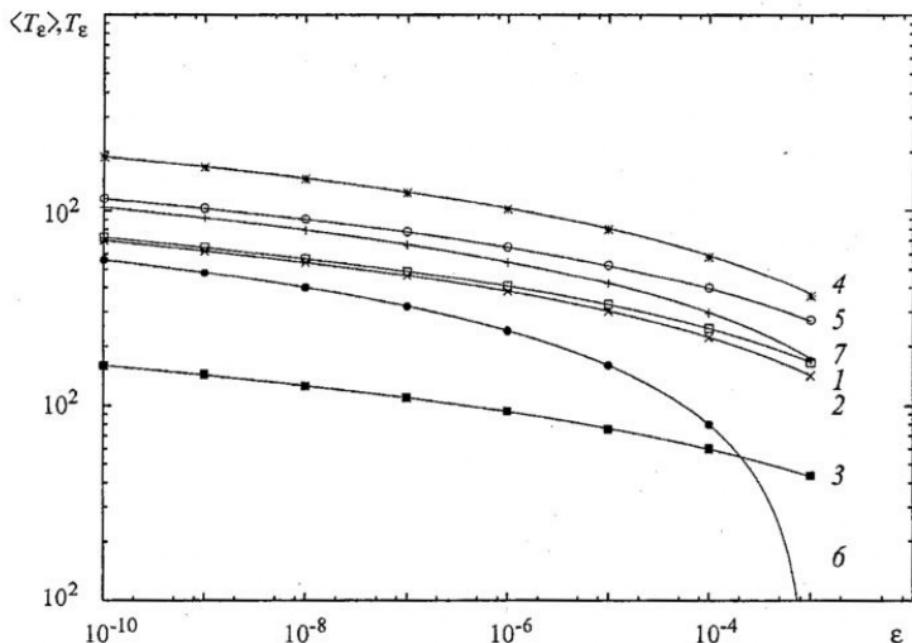


Рис. 4. Зависимость длительности переходного процесса от  $\epsilon$ : средняя длительность переходного процесса  $\langle T_\epsilon \rangle$  для цикла периода 1 логистического отображения для  $\lambda=1.25$  - кривая 1, точки ( $\square$ ),  $\mu=0.75$ ,  $\chi(\mu)=0.12$ ;  $\lambda=2.75$  - кривая 2, ( $\times$ ),  $\mu=-0.75$ ,  $\chi(\mu)=0.06$ ;  $\lambda=2.25$  - кривая 3, ( $\blacksquare$ ),  $\mu=-0.25$ ,  $\chi(\mu)=0.4$ ;  $\lambda=2.9$  - кривая 4, (\*),  $\mu=-0.9$ ,  $\chi(\mu)=0.05$ . Средняя длительность переходного процесса для цикла периода 2 логистического отображения при  $\lambda=3.075$  - кривая 5, ( $\circ$ ),  $\mu=-0.694375$ ,  $\chi(\mu)=0.135$ . Длительность переходного процесса  $T_\epsilon(x_0)$  для логистического отображения с начальным условием  $x_0=0.3645$  при  $\lambda=2.75$  (в системе реализуется неподвижная устойчивая точка) - кривая 6, (\*),  $\mu=-0.75$ ,  $\chi(\mu)=0.001$ . Средняя длительность переходного процесса  $\langle T_\epsilon \rangle$  для отображения окружности на себя (9) при  $\Omega=0.5$  и  $k=1.3$ ,  $\mu=1.3$ ,  $\chi(\mu)=0.025$  (цикл периода 2) - кривая 7 и точки (+).

Как следует из соотношений (5) и (7), средняя длительность переходного процесса  $\langle T_\epsilon \rangle$  обращается в бесконечность при значениях управляющих параметров, соответствующих бифуркационным ситуациям, когда соответствующий  $n$ -цикл теряет устойчивость, а его мультипликатор  $\mu$  становится равным либо +1, либо -1. При значениях мультипликатора  $\mu$ , близких по модулю к единице, соотношение (7) может быть приближенно записано как

$$\langle T_\epsilon \rangle \approx n/(\lvert \mu \rvert - 1) \ln(\epsilon/\chi). \quad (8)$$

С уменьшением значения  $\lvert \mu \rvert$  величина  $\langle T_\epsilon \rangle$  уменьшается, и при стремлении значения мультипликатора к нулю, когда реализуется цикл максимальной устойчивости, формулы (5) и (7) становятся неприменимыми, а средняя длительность переходного процесса  $\langle T_\epsilon \rangle$  принимает наименьшее значение.

Понятно, что соотношения (5) и (7) применимы и для определения длительности переходного процесса  $T_\epsilon(x_0)$  при выбранных значениях начального условия  $x_0$ . Однако в данном случае величина  $\chi$  будет зависеть не только от значения управляющих параметров, но и от выбранного начального условия. Соответствующий график зависимости длительности переходного процесса  $T_\epsilon(x_0)$  для неподвижной точки логистического отображения ( $\lambda=2.75$ ) приведен на кривой 6 рис. 4.

Аналогичные зависимости средней длительности переходного процесса  $\langle T_\epsilon \rangle$  от параметра  $\epsilon$  и значения мультипликатора  $\mu$  были получены для отображения окружности на себя [11]

$$x_{n+1} = x_n + \Omega + (k/2\pi) \sin(2\pi x_n), \quad \text{mod} 1 \quad (9)$$

при фиксированном значении управляющего параметра  $\Omega=0.5$  и различных значениях параметра  $k$  ( $0 \leq k \leq 2^{1/2}$ ). При данных значениях управляющих параметров в системе реализуется устойчивый цикл периода два, мультипликатор которого определяется соотношением  $\mu=1-k^2$ . На рис. 4 приведена соответствующая зависимость  $\langle T_\epsilon \rangle$  от  $\epsilon$  (кривая 7). Видно, что и в данном случае зависимость  $\langle T_\epsilon \rangle$  подчиняется соотношению (7).

В соотношения (5) и (7) входит также величина  $\chi$ , которая характеризует структуру фазового пространства динамической системы, и, соответственно, зависит от управляющих параметров системы. На рис. 5, а (кривая 1) приведена зависимость  $\chi$  от значения мультипликатора  $\mu$  устойчивой неподвижной точки для логистического отображения (5) (диапазон изменения управляющего параметра  $\lambda$  от 1 до 3). Данная зависимость  $\chi(\mu)$  была получена с помощью метода наименьших квадратов подбором таких значений  $\chi$  для каждого  $\mu$ , при которых кривая, описываемая соотношениями (5) и (7), наилучшим образом соответствует значениям средней длительности переходного процесса  $\langle T_\epsilon \rangle$ , найденным численно. Из рисунка видно, что  $\chi$  стремится к нулю при значениях мультипликатора  $\mu \rightarrow \pm 1$ , соответствующих бифуркационным значениям управляющего параметра  $\lambda$ . С уменьшением значения  $\lvert \mu \rvert$  (по мере приближения к точке  $\lambda=2$ , то есть при приближении к циклу максимальной устойчивости) происходит возрастание величины  $\chi$  и при  $\mu \rightarrow 0$ , когда соотношения (5) и (7) неприменимы, а следовательно, величина  $\chi$  не имеет физического смысла,  $\chi(\mu)$  обращается в бесконечность.

Аналогичные зависимости  $\chi(\mu)$  для устойчивых циклов периода 2 и 4 логистического отображения (кривые 2, 3) также приведены на рис. 5, а. На рис. 5, б показана зависимость  $\chi(\mu)$  для устойчивого цикла периода два отображения окружности на себя (штриховая линия).

Из анализа приведенных кривых следует, что вид функции  $\chi(\mu)$  для одномерных отображений качественно подчиняется общей закономерности - при

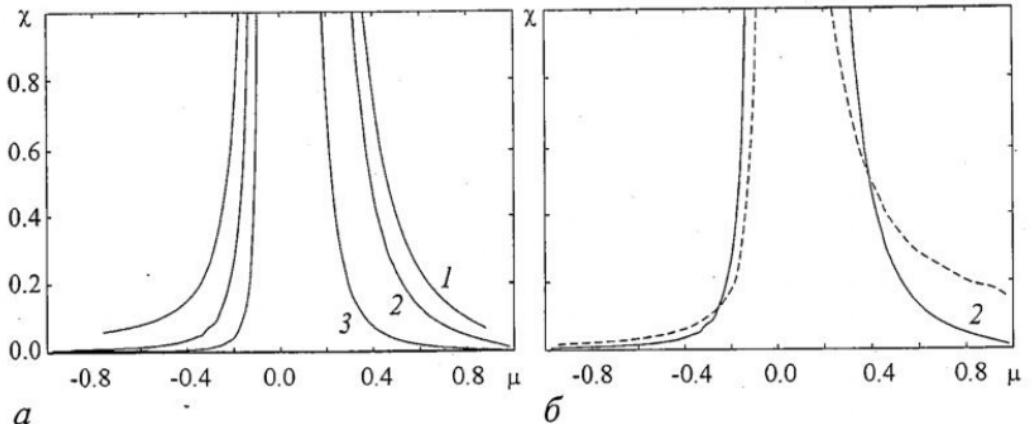


Рис. 5. а - Вид зависимости  $\chi(\mu)$  для неподвижной устойчивой точки (кривая 1), устойчивого цикла периода два (кривая 2) и устойчивого цикла периода 4 (кривая 3) логистического отображения; б - Вид зависимости  $\chi(\mu)$  для устойчивого цикла периода два отображения окружности на себя,  $\Omega=0.5$  (штриховая линия). Для сравнения на этом же рисунке приведена кривая 2. Особенности, возникающие из-за наличия масштаба наблюдения  $\epsilon$ , сглажены

значениях мультипликатора  $\mu$   $n$ -цикла, близких к бифуркационным, то есть, когда  $\mu \rightarrow \pm 1$ , величина  $\chi(\mu) \approx 0$ . С уменьшением  $|\mu|$  величина  $\chi(\mu)$  возрастает и при приближении мультипликатора устойчивого цикла периода  $n$  к нулю (то есть по мере приближения к циклу максимальной устойчивости)  $\chi(\mu)$  неограниченно нарастает и стремится к бесконечности. В то же самое время, количественно кривые 1-3 не совпадают. Так, функция  $\chi(\mu)$ , характеризующая устойчивый цикл периода 2 логистического отображения, возникающий после бифуркации удвоения периода (кривая 2), на границах изменения  $\mu \in (-1; 1)$  нарастает медленнее, чем  $\chi(\mu)$  для неподвижной устойчивой точки (кривая 1). Однако при значениях мультипликатора  $\mu$ , близких к нулю, функция  $\chi(\mu)$  для цикла периода 2 нарастает быстрее, нежели для устойчивой точки. Иными словами, для каждого аттрактора и, тем более, для каждого отображения вид зависимости  $\chi(\mu)$  определяется «топологией» всего фазового пространства рассматриваемой динамической системы.

Таким образом, средняя длительность переходного процесса в одномерных динамических системах с дискретным временем определяется видом динамической системы и значениями управляющих параметров. Наибольшее значение средняя длительность переходного процесса достигает при бифуркационных значениях управляющего параметра, а наименьшее - когда реализуется цикл максимальной устойчивости, мультипликатор которого обращается в нуль.

Наконец, следует обратить внимание также на то, что средняя длительность переходных процессов в логистическом отображении демонстрирует скейлинговые свойства, что обусловлено универсальностью Фейгенбаума для одномерных отображений [12], характеризующейся универсальной константой  $a = -2.503$ .

Скейлинговые свойства средней длительности переходного процесса для логистического отображения иллюстрируются рис. 6. Зависимости средней длительности переходного процесса  $\langle T \rangle_\epsilon$  от значения мультипликатора для циклов периода 1, 2 и 4 приведены на рисунке 6, а. На рис. 6, б-г даны те же самые зависимости, перемасштабированные по оси, отвечающей длительности переходного процесса  $\langle T \rangle_\epsilon$ , в  $d$  раз ( $d$  равно 1, 2 и 4 для циклов периода 4, 2 и 1, соответственно). Одновременно величина  $\epsilon$ , задающая точность определения длительности переходных процессов, перемасштабирована с коэффициентом  $a = -2.503$ , подобно тому, как осуществлялась перенормировка амплитуды шума при

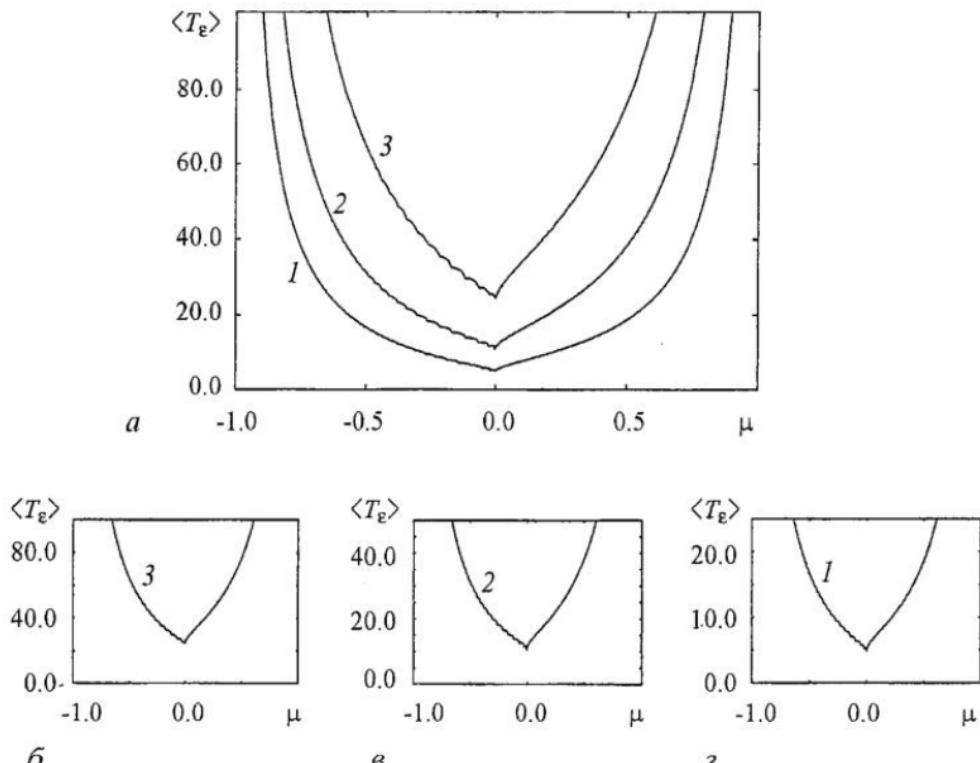


Рис. 6. *a* - Зависимость средней длительности переходного процесса  $\langle T_\varepsilon \rangle$  от мультипликатора  $\mu$  для логистического отображения. Кривые 1, 2, 3 отвечают реализации в системе устойчивых циклов периода один, два и четыре, соответственно. Для каждого  $2n$ -цикла длительность переходного процесса определяется с  $\varepsilon_{2n} = \varepsilon_n / |a|$ , где  $\varepsilon_n$  - характерный масштаб определения длительности переходного процесса для  $n$ -цикла,  $a = -2.503$  - универсальная константа Фейгенбаума. *б* - Неизмененная кривая зависимости для цикла периода четыре. *в*, *г* - Кривые зависимости для цикла периода два и неподвижной точки, перемасштабированные вдоль оси  $\langle T_\varepsilon \rangle$  с масштабными коэффициентами  $d_1 = 2$  и  $d_2 = 4$ , соответственно

изучении скейлинга в отображениях при наличии шума [13]. Из рисунка видно, что после проведения масштабных преобразований соответствующие зависимости средней длительности переходных процессов для циклов периода  $2n$  логистического отображения с хорошей степенью точности совпадают друг с другом.

Таким образом, в работе исследована зависимость средней длительности переходных процессов в одномерных динамических системах с дискретным временем (на примере эталонных объектов нелинейной динамики - логистического отображения и отображения окружности на себя), выявлены скейлинговые закономерности, показана важная роль мультипликаторов устойчивых циклов, а также рассмотрен вопрос о влиянии точности определения длительности переходных процессов на полученные результаты.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01-02-17392 и 02-02-16351), а также научно-образовательного центра «Нелинейная динамика и биофизика» при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)).*

## Библиографический список

1. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений. Часть 1: Сценарий Фейгенбаума // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1, 2. С. 15-33.
2. То же. Часть 2: Двухпараметрический переход к хаосу // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3, 4. С. 17-35.
3. Кузнецов А.П., Савин А.В. О проблеме границы хаоса и типичных структурах на плоскости параметров неавтономных дискретных отображений с удвоениями периода // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 4. С. 25-36.
4. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем // Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. 368 с.
6. Bezruchko B.P., Dikanov T.V., Smirnov D.A. Role of transient processes for reconstruction of model equations from time series // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, 036210 () .
7. Безручко Б.П., Диканев Т.В., Смирнов Д.А. Глобальная реконструкция уравнений динамической системы по временной реализации переходного процесса // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 3. С. 3-14.
8. Кальянов Э.В. Переходные процессы в автостохастическом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, № 15. С. 26-31.
9. Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е. Универсальные скейлинговые закономерности переходных процессов // Доклады академии наук. 2002. Т. 383, № 3. С. 322-325.
10. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука. 1990.
11. Glass L., Peres R. Fine structure of phase locking // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1772.
12. Feigenbaum M.J. The universal metric properties of nonlinear transformation // J. Stat. Phys. 1979. Vol. 21, № 6. P. 669-706.
13. Кузнецов А.П., Капустина Ю.В. Свойства скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С. 78-87.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 24.07.02

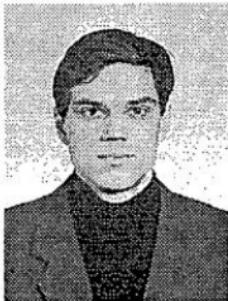
## MEAN DURATION OF TRANSIENT PROCESSES IN DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISCRETE TIME

A.A. Koronovskii, A.E. Hramov, I.A. Khromova

In this work the dependence of mean duration of transient processes upon the exactness of duration computation and upon the control parameters is discussed. On the example of sample one-dimensional maps (logistic map and circle map) it is shown that the mean duration of transient process is determined by the multiplicator of the stable cycle. The analytic form characterizing this dependence at the different values of control parameters is offered.



*Короновский Алексей Александрович* - родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), кандидат физико-математических наук (1997). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Опубликовал в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым монографию «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996 год; 2-е издание - 2002 год). Автор ряда статей в центральной печати.



*Храмов Александр Евгеньевич* - окончил Саратовский государственный университет (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика распределенных систем, методы анализа и моделирования динамических систем, мощная СВЧ-электроника.

E-mail:aeh@cas.ssu.runnet.ru



*Хромова Ирина Анатольевна* - родилась в Саратове (1983). В настоящее время студентка третьего курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского. Область научных интересов: сложное поведение и переходные процессы в нелинейных динамических системах, устойчивость и неустойчивость стационарных и периодических режимов, динамический хаос. Автор ряда статей в центральной печати.