



СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

А.С. Дмитриев, Г.А. Касьян, Л.В. Кузьмин

В статье предлагается подход к очистке хаотических сигналов от шума (фильтрации хаотических сигналов), основанный на использовании того факта, что хаотическим сигналам, в отличие от случайных процессов, соответствуют в фазовом пространстве динамических систем предельные множества (аттракторы) относительно низкой размерности.

Введение

Очистке хаотических сигналов от шума (фильтрации хаотических сигналов) уделяется большое внимание в литературе (см., например, книги [1, 2] и ссылки в них). Хорошо известно, что проблема очистки хаотических сигналов от шума значительно отличается от очистки регулярных сигналов в силу неустойчивости фазовых траекторий хаотических систем. В частности, на примере одномерных и двумерных отображений было показано существование некоторого порогового значения шума, ниже которого очистка хаотического сигнала возможна с любой степенью точности, а выше - значительное снижение уровня шума не представляется возможным [3-5].

Большинство результатов по фильтрации хаотических сигналов относятся к малоразмерным системам. В данной работе мы рассматриваем дополнительные возможности, которые связаны с тем, что размерность фазового пространства динамической системы может быть, значительно больше размерности хаотического аттрактора.

Идея фильтрации заключается в использовании следующего факта. Пусть имеется высокоразмерная динамическая система

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

обладающая относительно низкоразмерным хаотическим аттрактором A

$$A \in R^{n_0}, \quad n_0 \ll n, \quad (2)$$

где R^{n_0} - линейное подпространство в R^n ; $n_0 \ll n$ в силу низкой размерности A .

Пусть на систему (1) воздействует внешний шум $\eta(t)$. Какова будет реакция системы на этот шум (при малой, для определенности, интенсивности шума)? Поскольку все траектории автономной системы «втягиваются» в то

подпространство, где лежит хаотический аттрактор, трансверсальные по отношению к подпространству аттрактора возмущения, создаваемые шумом, будут подавляться. С другой стороны, проекции возмущения на аттрактор могут усиливаться. Последнее обстоятельство затрудняет очистку хаотических сигналов от шума в маломерных системах. Однако первое обстоятельство способствует такой очистке и задача данной работы это продемонстрировать.

1. Модель фильтрации

Ниже под фазовым пространством понимаем как «естественное» фазовое пространство, в котором координатами являются переменные динамической системы, так и «искусственное» фазовое пространство, для которого искусственные переменные получаются из одного компонента процесса путем применения процедуры, основанной на взятии задержанных значений одной из фазовых переменных [6]. Заметим, что для одной и той же динамической системы размерность искусственного фазового пространства (пространства вложения) может значительно превышать размерность естественного фазового пространства. На использовании этой разницы и основан рассматриваемый подход к фильтрации. Пусть m' - размерность некоторого пространства вложения $R^{m'}$ и пусть d - корреляционная размерность аттрактора. Как было показано теоретически [7] и подтверждено численным моделированием, m' должно удовлетворять следующему неравенству

$$m' \geq 2d + 1. \quad (3)$$

Векторы пространства вложения формируются путем взятия отсчетов хаотической траектории через интервалы времени Δt (Δt выбирается по определенным правилам). Первый вектор в m' -мерном пространстве образован из m' подряд идущих элементов хаотической последовательности (с 1-го по m' -й), второй вектор образован путем сдвига на один элемент, то есть используются отсчеты со 2-го по $(m'+1)$ -й и т.д.

Пусть m - минимальная размерность пространства вложения

$$m' > m \geq 2d + 1. \quad (4)$$

Рассмотрим m -мерное пространство вложения R^m и обозначим через $m_0 \leq m$ - минимальное подпространство R^{m_0} , в котором аттрактор может быть аппроксимирован с некоторой заданной точностью ϵ .

Рассмотрим также пространство вложения $R^{m'}$ с размерностью m' и обозначим через m'_0 - минимальную размерность его подпространства, в котором аттрактор может быть аппроксимирован с той же точностью ϵ .

В дальнейшем предполагаем, что m'_0 слабо зависит от m' , то есть $m'_0 \approx m_0$.

Этим обстоятельством можно воспользоваться для фильтрации хаотического сигнала от шума. Действительно, пусть имеется хаотическая последовательность

$$x_1, x_2, \dots, x_{m'_0}, x_{m'_0+1}, \dots, x_N \dots \quad (5)$$

Построим систему векторов

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_1 \dots x_{m'}), \\ X_2 &= (x_2 \dots x_{m'+1}), \\ &\vdots \\ X_N &= (x_N \dots x_{m'+N+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Если аттрактор динамической системы принадлежит подпространству размерности m_0 , то из m' компонент каждого из этих векторов лишь m_0 должны быть линейно независимы. Один из вариантов выбора системы m_0 базисных векторов предложен в [8].

Рассмотрим матрицу

$$B = N^{-1/2}(X_1 \dots X_N)', \quad (7)$$

ее ранг равен m_0 . Следовательно, ранг матрицы $B'B$ также равен m_0 . Матрица $B'B$ симметрична и обладает ортогональным базисом из собственных векторов. Обозначим эти векторы как b_i и отсортируем их в порядке убывания соответствующих этим векторам собственных значений λ_i матрицы $B'B$.

Поясним смысл этой процедуры. Разложим каждый из векторов X_i по базису b_j ,

$$X_i = \sum_{j=1}^{m'} \alpha_{ij} b_j. \quad (8)$$

Тогда средняя энергия на вектор составляет

$$E = \langle X_i^2 \rangle = 1/N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m'} \alpha_{ij}^2 = 1/N \sum_{j=1}^{m'} \sum_{i=1}^N \alpha_{ij}^2 = \text{tr}(B'B). \quad (9)$$

Поскольку b_i является базисом из собственных векторов матрицы $B'B$, то в этом базисе эта матрица является диагональной, так что $(B'B)_{ii} = \lambda_i$, следовательно

$$E = \text{tr}(B'B) = \sum_{j=1}^{m'} \lambda_j = \sum_{j=1}^{m_0} \lambda_j + \sum_{j=m_0+1}^{m'} \lambda_j. \quad (10)$$

Если, как было сказано выше, аттрактор лежит в подпространстве размерности m_0 и ранг матрицы равен также m_0 , то лишь первые m_0 собственных значений отличны от нуля, так что вторая сумма в (10) равна нулю.

При численных расчетах собственные числа λ_i для $i > m_0$ не равны 0, но стремятся к нулю с ростом i . Поэтому возникает проблема оценки m_0 по наблюдаемому спектру собственных значений λ_i . Число m_0 выбирается таким, чтобы часть мощности, приходящаяся согласно формуле (10) на $(m' - m_0)$ векторов с малыми λ_i , была достаточно малой, так что первые m_0 векторов дадут необходимую нам аппроксимацию аттрактора динамической системы.

Выбрав m_0 , мы получим набор из m_0 ортонормированных базисных векторов b_i

$$(b_i, b_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (11)$$

И каждый из векторов X_i может быть представлен в виде разложения по указанной линейно независимой системе

$$X_i' = \sum_{i=1}^{m_0} \alpha_{ij} b_i. \quad (12)$$

Пусть теперь на хаотический сигнал в канале воздействует гауссов шум η_i

$$y_i = x_i + \eta_i, \quad (13)$$

где y_i - отсчеты, принимаемые приемником. Введем систему векторов

$$Y_i = X_i + N_i, \quad (14)$$

где $N_i = (\eta_i \dots \eta_{i+m'-1})$.

В отличие от векторов X_i , которые принадлежат пространству R^{m_0} размерности m_0 , векторы N_i принадлежат пространству $R^{m'}$ размерности m' , поскольку компоненты в них - независимые случайные величины.

Разложим векторы Y_i по базису (ортонормированной системе векторов) $b_i, i \in 1 \dots m_0$.

$$\beta_{ii} = (b_i, Y_i) = (b_i, X_i + N_i) = (b_i, X_i) + (b_i, N_i) = \alpha_{ii} + \delta_{ii}. \quad (15)$$

Обозначим через Y_i' проекцию вектора Y_i на подпространство R^{m_0}

$$Y_i' = \sum_{i=1}^{m_0} \beta_{ii} b_i = \sum_{i=1}^{m_0} (\alpha_{ii} + \delta_{ii}) b_i. \quad (16)$$

Эта проекция используется как сигнал-оценка исходного сигнала, то есть

$$\hat{X}_i = Y_i'. \quad (17)$$

Сравним векторы X_i и Y_i , X_i и \hat{X}_i

$$\|Y_i - X_i\| = (N_i, N_i) = \sum_{i=1}^{m'} \delta_{ii}^2, \quad (18)$$

где $\|\cdot\|$ означает квадратичную норму.

Поступая аналогично выводу формулы (10) и снова воспользовавшись тем, что в базисе векторов b_i выполнено $(B' B)_{ii} = \lambda_i$, получим

$$\|\hat{X}_i - X_i\| = \|Y_i' - X_i\| = \|\sum_{i=1}^{m_0} (\alpha_{ii} + \delta_{ii}) b_i - \sum_{i=1}^{m'} \alpha_{ii} b_i\| = \sum_{i=1}^{m_0} \delta_{ii}^2 + \sum_{i=m_0+1}^{m'} \lambda_i^2. \quad (19)$$

Таким образом, если уровень шума достаточно высок, так что мы можем пренебречь вторым членом в сумме (19), то мощность шума в сигнале после фильтрации ниже, чем мощность исходного шума (18).

Обозначим отношение сигнал/шум на входе фильтра как $C/\Pi_{вх}$ и на выходе фильтра как $C/\Pi_{вых}$. Если шум распределен равномерно между ортогональными компонентами, то выигрыш в уровне шума составит

$$K = (C/\Pi_{вх}) / (C/\Pi_{вых}) = m'/m_0. \quad (20)$$

Величину K будем называть коэффициентом очистки сигнала от шума.

Представленное в децибелах, это выражение принимает вид:

$$K_{(dB)} = (C/\Pi_{вых} - C/\Pi_{вх})_{dB} = 10 \lg(m'/m_0). \quad (21)$$

Таким образом, выигрыш в подавлении шума пропорционален длине вектора m' и обратно пропорционален минимальной размерности пространства вложения m_0 , а следовательно, размерности аттрактора.

2. Компьютерное моделирование

Апробация алгоритма была проведена на примерах системы Ресслера

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Y - Z, \\ \dot{Y} &= X + aY, \\ \dot{Z} &= b + (X - c)Z \end{aligned} \quad (22)$$

при значениях параметров $a=0.15$, $b=0.2$, $c=10$ и для кольцевого генератора с 2.5 степенями свободы [9], описываемого системой уравнений

$$\begin{aligned}
T\dot{X} + X &= mF(Z_2) \\
\ddot{Z}_1 + \alpha_1 \dot{Z}_1 + \omega_1^2 Z_1 &= \omega_2^2 X_1 \\
\ddot{Z}_2 + \alpha_2 \dot{Z}_2 + \omega_2^2 Z_2 &= \omega_2^2 Z_1
\end{aligned}
\tag{23}$$

при значениях параметров $\alpha_1=0.06$, $\alpha_2=0.28$, $\omega_1=1$, $\omega_2=0.421$, $T=0.8$, $m=3.3$ и нелинейности $F(Z)$ вида

$$F(Z) = |Z+e_1| - |Z-e_1| + 0.5|Z-e_2| - 0.5|Z+e_2|. \tag{24}$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 1-3.

На рис. 1 показаны спектры собственных значений ковариационной матрицы В'В для систем (22) и (23).

Из рис. 1 видно, что величина собственных значений λ_i быстро падает с ростом i . Поэтому разложение по первым 5-10 собственным векторам позволяет получить достаточно точную аппроксимацию аттрактора системы.

На рис. 2, 3 представлен результат применения алгоритма фильтрации (при размерностях $m_0=10$ и $m'=40$) к сигналу, генерируемому системами (22) и (23), подвергнутому воздействию аддитивного гауссова шума. Кривые на рис. 2 показывают зависимость отношения сигнал/шум после применения процедуры фильтрации от отношения сигнал/шум до фильтрации. На рис. 3 представлен коэффициент очистки, полученный в результате фильтрации.

Отношение сигнал/шум на выходе фильтра определяется двумя факторами. Во-первых, точностью аппроксимации сигнала при его разложении по нескольким векторам базиса. Это шум аппроксимации. Во-вторых, шумами в канале, поступающими вместе с сигналом. Алгоритм фильтрации добавляет к сигналу шум аппроксимации и осуществляет очистку сигнала от шумов в канале. Пусть S - мощность хаотического сигнала, N_k - мощность шума в канале, N_θ - мощность шума ошибок аппроксимации. Тогда отношение сигнал/шум на входе фильтра равно

$$C/Ш_{\text{вх}} = S/N_k. \tag{25}$$

Отношение сигнал/шум на выходе фильтра при отсутствии шума в канале или при полной очистке от него сигнала равно

$$C/Ш_{\text{вых}} = S/N_\theta. \tag{26}$$

В общем случае уровень шума на выходе фильтра будет функцией от уровня шума в канале и уровня шума аппроксимации

$$N_{\text{вых}}(N_k, N_\theta): \tag{27}$$

Как видно из рис. 2, отношение сигнал/шум на входе фильтра при уменьшении уровня шума в канале стремится к фиксированной величине, которая определяется уровнем шума аппроксимации. При малом уровне шумов в канале коэффициент очистки падает и может стать отрицательным (рис. 3).

Это можно объяснить следующим образом. Работа алгоритма фильтрации основана на том факте, что $m_0 \ll m'$ и это позволяет снизить уровень шума

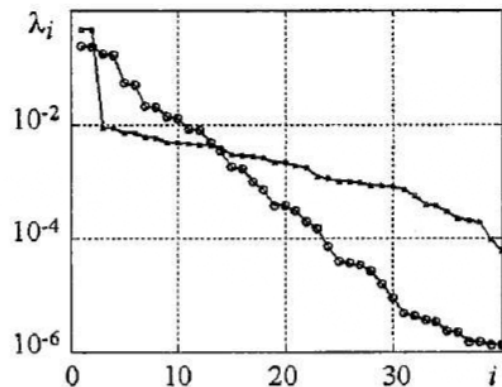


Рис. 1. Зависимость величины собственного значения λ_i от его номера i

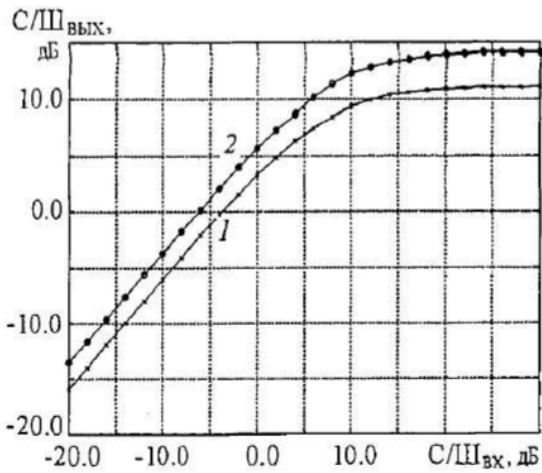


Рис. 2. Зависимость отношения С/Ш после применения алгоритма фильтрации от отношения С/Ш в канале. 1 - кольцевая система с 2.5 степенями свободы, 2 - система Рёсслера

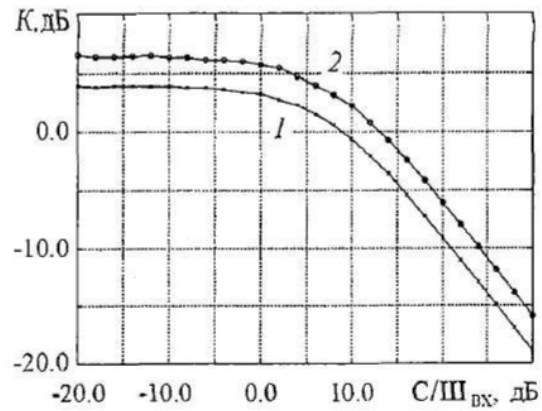


Рис. 3. Зависимость коэффициента очистки от отношения С/Ш в канале. 1 - кольцевая система с 2.5 степенями свободы, 2 - система Рёсслера

приблизительно в m'/m_0 раз, практически не влияя на мощность сигнала. Однако при этом при применении фильтра используется аппроксимация сигнала его проекцией на некоторый базис, приводящая к возникновению ошибки (шум) аппроксимации. Если эта ошибка становится сравнимой с величиной ошибки, вносимой шумом, то отношение сигнал/шум будет определяться не уровнем шума в канале, а уровнем ошибки аппроксимации, вносимой при проецировании траектории на m_0 -мерное подпространство.

Поэтому при высоких отношениях сигнал/шум требуется более высокая степень аппроксимации, которая, в принципе, может быть достигнута путем искусственного завышения размерности m_0 , то есть выбором большего количества векторов в качестве базисных. Однако в этом случае снижается эффективность фильтрации, поскольку, уменьшая отношение m'/m_0 , мы уменьшаем возможности для снижения уровня шума (см. также (18)). Заметим, что в соответствии с формулой (21) максимальный выигрыш в отношении сигнал/шум, получаемый при $m'=40$ и $m_0=10$ должен быть около 6 дБ. На рис. 2 можно видеть, что при больших шумах это значение практически достигается для обеих систем. С понижением уровня шума в канале выигрыш уменьшается.

Заключение

Проблеме фильтрации хаотических сигналов уделяется значительное внимание в литературе. Однако развитые методы, как правило, предназначены для обработки либо записанных данных, либо медленных потоков данных. Поэтому их сложно применить в телекоммуникационных системах. Подход, рассмотренный в настоящей статье, принадлежит к классу субоптимальных подходов. Его основным преимуществом является то, что он может быть применен в ситуациях, когда скорость фильтруемого сигнала высока. Концептуально этот подход близок к схеме обработки данных при помощи фильтров в коммуникационных системах.

Заметим, что, хотя данный алгоритм и похож на алгоритмы, рассмотренные в [8, 10], результаты их применения существенно различаются. В предложенном алгоритме проецирование осуществляется на заранее подготовленный базис, полученный благодаря нашему знанию динамики системы, в то время как в статьях [8] и [10] базис получается на основе наблюдаемых значений реализации. Поэтому, в отличие от методов, рассмотренных в [8, 10], наш подход, благодаря знанию

чистой фазовой траектории система, применим в ситуациях, когда уровень шума превышает уровень сигнала.

Библиографический список

1. *Abarbanel H.D.I.* Analysis of observed Chaotic Data. Berlin. Springer, 1997.
2. *Kantz H., Schreiber T.* Nonlinear Time Series Analysis. Cambridge University Press, 1997.
3. *Stojanovski T., Kocarev L., Herris K.* Application of symbolic dynamics to chaos synchronization // IEEE Trans. Circuit and Systems. 1997. Vol. CAS-44, № 10. P. 1014.
4. *Rosa E., Hayes S., Grebogi C.* Noise filtering in communications with chaos // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 7. P. 1247.
5. *Dmitriev A.S., Kassian G., Khilinsky A.* Limit efficiency of chaotic signal clearing off noise // Proc. NDES'99. Ronne. Denmark. 1999. P. 187.
6. *Takens F.* // Lect. Notes in Math. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1981. Vol. 898. P. 366.
7. *Mane R.* // Lect. Notes in Math. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1981. Vol. 898. P. 230.
8. *Broomhead D.S., King G.P.* // Physica D. 1986. Vol. 20. P. 217.
9. *Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O.* Ring oscillating systems and their application to the synthesis of chaos generators // Int. J. of Bif. and Chaos, 1996. Vol. 6. № 5. P. 851.
10. *Ланда П.С., Розенблюм М.Г.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. С. 13.

Институт радиотехники
и электроники РАН,
Москва, Россия

Поступила в редакцию 02.08.03

MATCHED FILTRATION OF CHAOTIC SIGNALS

A.S. Dmitriev, G.A. Kassian, L.V. Kuzmin

In this paper an approach to cleaning chaotic signals from noise (filtration of chaotic signals) is proposed that is based on the fact that, in contrast to random processes, chaotic signals are related in the phase space to limit sets (attractors) of relatively low dimension.



Дмитриев Александр Сергеевич - родился в 1948 году, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов: теория динамических хаотических систем, информационные технологии с использованием динамического хаоса.

E-mail: chaos@mail.cplire.ru.



Касьян Геннадий Александрович - родился в 1978 году, аспирант МФТИ. Область научных интересов: динамический хаос и его приложения в радиофизических системах, обработка информации с использованием динамического хаоса.

E-mail: chaos@mail.cplire.ru.



Кузьмин Лев Викторович - родился в 1974 году, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов: хаотическая динамика и ее использование в информационных технологиях.

E-mail: chaos@mail.cplire.ru.