



О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ В ОТОБРАЖЕНИИ ЭНО

Часть I. Периодическая динамика

Г.Б. Астафьев, А.А. Короновский, А.Е. Храмов, А.Е. Храмова

В работе рассматриваются переходные процессы в двумерной динамической системе с дискретным временем (отображении Эно), демонстрирующей периодические режимы колебаний. Обсуждается методика определения длительности переходного процесса, зависимость длительности переходного процесса от точности определения и начальных условий, выявляются механизмы, ответственные за усложнение этой зависимости. Во второй части работы планируется обсудить зависимость средней длительности переходных процессов при изменении значений управляющих параметров.

Анализ поведения нелинейных динамических систем в последнее время привлекает к себе большое внимание со стороны исследователей в различных областях естествознания. При этом независимо от того, изучаются ли динамические системы с дискретным или непрерывным временем, со сосредоточенными или распределенными параметрами, основной интерес вызывают установившиеся режимы колебаний и то, каким образом происходит смена этих режимов при изменении управляющих параметров системы [1-6]. При этом переходные процессы в большинстве случаев рассматриваются как нечто второстепенное, не вызывающее особого интереса. В то же время, следует отметить, что переходный процесс несет информацию о системе, и в ряде случаев оказывается более целесообразным рассматривать поведение системы, находящейся именно в стадии переходного процесса [7-10], а не в установившемся режиме.

Следует также отметить, что круг задач, связанных с исследованием переходных процессов, достаточно широк: это исследование строения бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов и их границ в случае мультистабильности [11-12]; изучение переходного хаоса [13-16], который возникает при кризисе хаотического аттрактора [17-21] и который по своей сути также является переходным процессом; определение времени ожидания изображающей точки в малой окрестности фазового пространства системы при управлении хаосом [22-24]. Таким образом, детальное исследование переходных процессов весьма важно

для понимания поведения динамических систем. В качестве объектов исследования переходных процессов удобно выбрать динамические системы с дискретным временем (отображения) в силу того, что, с одной стороны, они относительно просты, а с другой стороны, в них имеют место основные нелинейные явления, свойственные для потоковых и распределенных динамических систем.

Ранее, в работах [10,25,26], были изучены переходные процессы и свойственные им закономерности для одномерных динамических систем с дискретным временем на примере логистического отображения. В то же время понятно, что в системах с большей размерностью (в самом простейшем случае в двумерных отображениях) переходные процессы могут подчиняться несколько иным закономерностям, нежели в одномерных отображениях. При этом результаты, полученные для двумерных динамических систем с дискретным временем, могут быть применимы к трехмерным системам с непрерывным временем, поскольку возможен переход от трехмерных потоковых систем к двумерным отображениям с помощью процедуры сечения Пуанкаре [27,28]. Поэтому целью настоящей работы является подробное изучение переходных процессов в двумерной динамической системе с дискретным временем (отображении Эно [29-30])

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda x_n(1-x_n) + by_n, \\y_{n+1} &= x_n\end{aligned}\tag{1}$$

и выявление основных закономерностей, свойственных переходным процессам. В рамках настоящей работы основное внимание акцентируется на периодических режимах. Некоторые аспекты, связанные с переходными процессами для отображения Эно, находящегося в хаотическом режиме, можно найти в работах [31,32]. Выбор в качестве объекта исследования отображения Эно обусловлен еще и тем, что при выборе значения управляющего параметра $b=0$ отображение (1) переходит в логистическое, а следовательно, результаты, полученные для него, можно легко сопоставить с результатами, полученными ранее для логистического отображения.

Методика определения длительности переходного процесса. Влияние точности на длительность переходного процесса

Под длительностью переходного процесса понимается интервал времени, который необходим динамической системе, эволюционирующей с произвольных начальных условий, для того, чтобы изображающая точка в фазовом пространстве достигла аттрактора с некоторой наперед заданной точностью ϵ . Понятно, что, с формальной точки зрения, переходный процесс в системе, как правило, длится бесконечно долго, изображающая точка лишь асимптотически стремится к аттрактору при $t \rightarrow \infty$ и за конечный интервал времени никогда его не достигает [33]. В то же самое время, в натуральных экспериментах и при численном моделировании поведения динамических систем во временной реализации обычно легко удается выделить участки, отвечающие соответственно установившемуся режиму и переходному процессу. Длительность переходного процесса зависит от начальных условий и точности, с которой определяется выход фазовой траектории на аттрактор.

В том случае, если состояние, к которому асимптотически стремится система при $t \rightarrow \infty$, является периодическим, существует достаточно простой и эффективный метод определения длительности переходного процесса [25,31], суть

которого заключается в следующем. Пусть рассматривается динамическая система с дискретным временем

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \quad (2)$$

где $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn})$ - вектор, характеризующий состояние системы в n -й момент времени; \mathbf{F} - вектор-функция, задающая эволюцию вектора состояния с течением времени. В этом случае длительность переходного процесса определяется следующим образом.

1. Система (2) итерируется достаточно большое число раз N (N должно быть заведомо больше максимальной длительности переходного процесса) со случайным начальным условием \mathbf{x}_0 , после чего предполагается, что система достигла асимптотического состояния, а изображающая точка вышла на аттрактор. Иными словами, полагается, что точка \mathbf{x}_N находится в непосредственной близости к какой-либо точке \mathbf{x}_i^0 аттрактора G_0 , и, следовательно, при численном моделировании точка \mathbf{x}_N может рассматриваться как элемент аттрактора. После этого последовательность $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$ анализируется, начиная с предпоследнего элемента x_{N-1} . Элементы $x_{N-1}, x_{N-2}, \dots, x_k$ последовательно сравниваются с x_N до тех пор, пока в первый раз не будет выполнено условие $|x_k - x_N| < \epsilon_{\text{attr}}$ ($\epsilon_{\text{attr}} < \epsilon$), где ϵ_{attr} - точность, с которой определяется период асимптотического режима, а ϵ - точность определения длительности переходного процесса. В этом случае период τ асимптотического режима системы (2) может быть определен как $\tau = N - k$. Соответственно, аттрактор G_0 будет состоять из τ точек $\{\mathbf{x}_i^0\}_{i=1}^{\tau}$, где $\mathbf{x}_1^0 = \mathbf{x}_{k+1}$, $\mathbf{x}_2^0 = \mathbf{x}_{k+2}$, ..., $\mathbf{x}_{\tau}^0 = \mathbf{x}_N$.

2. После определения точек $\{\mathbf{x}_i^0\}_{i=1}^{\tau}$ аттрактора G_0 , длительность переходного процесса может быть определена для любого начального условия \mathbf{x}_0 с некоторой наперед заданной точностью ϵ . Для того, чтобы определить длительность переходного процесса $T_{\epsilon}(\mathbf{x}_0)$, необходимо анализировать последовательность $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$, начиная с начальной точки \mathbf{x}_0 , до тех пор, пока некоторая точка \mathbf{x}_k временной реализации $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$ не попадет в ϵ -окрестность одного из элементов $\{\mathbf{x}_i^0\}_{i=1}^{\tau}$ аттрактора G_0 , то есть до тех пор, пока не будет выполняться условие $|x_k - x_i^0| < \epsilon$ ($1 \leq i \leq \tau$). Если переходный процесс в системе (2) завершился в момент дискретного времени $t=k$, то все точки \mathbf{x}_i ($k < i \leq N$) последовательности $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ должны также находиться в ϵ -окрестностях элементов $\{\mathbf{x}_i^0\}_{i=1}^{\tau}$ аттрактора G_0 . В том случае, если это условие выполняется, длительность переходного процесса может быть определена как $T_{\epsilon}(\mathbf{x}_0) = k$.

3. Для того, чтобы определить длительность переходного процесса $T_{\epsilon}(\mathbf{x}_0)$ для любого другого начального условия \mathbf{x}_0 или другого значения точности ϵ , необходимо повторить п. 2 с новыми величинами \mathbf{x}_0 и ϵ .

Следует отметить некоторые ограничения вышеописанного метода: во-первых, в случае мультистабильности, если в фазовом пространстве системы (2) сосуществуют несколько периодических аттракторов, необходимо повторять п. 1 метода для каждого начального условия \mathbf{x}_0 . Во-вторых, данный метод не работает при значениях параметров системы (2), равных бифуркационным, а в точках, близких к точкам бифуркации, длительность переходного процесса оказывается большой, что влечет за собой необходимость увеличения числа итераций на каждом этапе.

Из интуитивных соображений ясно, что чем больше точность, с которой определяется длительность переходного процесса $T_{\epsilon}(\mathbf{x}_0)$ (то есть, чем меньше величина ϵ), тем больше у временной реализации $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$ участок, отвечающий переходному процессу. Оказывается, что важную роль в формировании участка временной реализации, соответствующего переходному процессу, играют мультипликаторы μ , устойчивого τ -цикла.

Предположим для простоты, что в фазовом пространстве динамической системы с дискретным временем (2) существует единственный аттрактор¹ G_0 , представляющий собой цикл периода τ . В этом случае τ раз проитерированное отображение (2)

$$x_{n+\tau} = \underset{\tau \text{ раз}}{F(F(\dots(F(x_n))\dots))} = F^{(\tau)}(x_n) \quad (3)$$

будет иметь τ неподвижных устойчивых точек, при этом каждому элементу x_i^0 ($i=1,2,\dots,\tau$) устойчивого цикла периода τ отображения (2) будет соответствовать неподвижная устойчивая точка x_i^τ отображения (3).

Для того, чтобы рассматривать поведение системы (3) в малой окрестности одной из неподвижных точек x_i^τ , имеет смысл ввести в рассмотрение величину δx , характеризующую отклонение переменной x от неподвижной устойчивой точки x_i^τ ,

$$\delta x = x - x_i^\tau. \quad (4)$$

В этом случае в линейном приближении поведение системы (3) в окрестности неподвижной устойчивой точки x_i^τ будет определяться как

$$\delta x_{n+1} = M \delta x_n, \quad (5)$$

где M - матрица монодромии

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{s1} & m_{s2} & \dots & m_{ss} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $m_{kj} = \partial F_k^{(\tau)} / \partial x_j(x_i^\tau)$. Собственные числа μ_j ($j=1,2,\dots,s$) матрицы монодромии M характеризуют каждую из неподвижных устойчивых точек x_i^τ системы (3) и устойчивый цикл периода τ отображения (2) и называются мультипликаторами неподвижной устойчивой точки x_i^τ и устойчивого цикла $\{x_i^0\}_{i=1}^\tau$, соответственно. Из предположения об устойчивости τ -цикла следует, что все мультипликаторы μ_j должны быть по абсолютной величине меньше единицы.

Для двумерной динамической системы, каковой является отображение Эно, матрица монодромии M будет представлять из себя квадратную матрицу 2×2 . Соответственно, мультипликаторы $\mu_{1,2}$ могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными. Линейной заменой переменных [34,35]

$$\delta v = B \delta x, \quad (7)$$

где B - матрица преобразования, соотношение (5) может быть приведено к виду

$$\delta v_{n+1} = L \delta v_n, \quad (8)$$

где $L = BMB^{-1}$, B^{-1} - обратная матрица для матрицы B .

В том случае, если мультипликаторы $\mu_{1,2}$ являются действительными, выбором матрицы B можно добиться того, что матрица L будет являться диагональной, причем по главной диагонали будут находиться собственные числа μ_j ,

$$L = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

¹ Иными словами, мы будем считать, что при выбранных значениях управляющих параметров в системе (2) отсутствует мультистабильность.

В этом случае изменение каждой компоненты $v_{1,2}$ вектора $\delta v = (v_1, v_2)^T$ будет определяться только одним («своим») мультипликатором μ_j ($j=1,2$)

$$(v_j)_{n+1} = \mu_j \times (v_j)_n. \quad (10)$$

Чем ближе величина мультипликатора μ_j к нулю, тем быстрее уменьшается v_j компонента вектора δv . Следовательно, длительность переходного процесса в случае действительных мультипликаторов будет определяться динамикой компоненты v_m вектора δv , которой соответствует наибольший по абсолютной величине мультипликатор μ_m , для которого, однако, в силу устойчивости τ -цикла, выполняется соотношение $|\mu_m| < 1$.

В том случае, если мультипликаторы $\mu_{1,2}$ матрицы монодромии \mathbf{M} оказываются комплексно сопряженными $\mu_1 = \mu_2^* = \text{Re}(\mu_1) + i\text{Im}(\mu_1)$, может быть найдена такая матрица² \mathbf{B} , что в результате линейного преобразования (7) матрица монодромии \mathbf{M} будет преобразована к матрице \mathbf{L} , имеющей вид

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mu_1) & \text{Im}(\mu_1) \\ \text{Im}(\mu_2) & \text{Re}(\mu_2) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

а для вектора δv будет справедливо соотношение

$$|\delta v_{n+1}| = |\mu_{1,2}| \times |\delta v_n|, \quad (12)$$

причем из условия устойчивости τ -цикла отображения (2) будет следовать, что $|\mu_{1,2}| < 1$.

Исходя из всего вышеизложенного получаем, что длительности переходных процессов $T_\epsilon^\tau(x_0)$ и $T_{\epsilon_1}^\tau(x_0)$ отображения (3), определенные для одного и того же начального условия x_0 и одних и тех же значений управляющих параметров, но с разными значениями точности ϵ и ϵ_1 (для определенности будем полагать, что $\epsilon_1 > \epsilon$), будут связаны между собой как

$$T_\epsilon^\tau(x_0) = T_{\epsilon_1}^\tau(x_0) + K. \quad (13)$$

Здесь K - число итераций системы (3), которые необходимо совершить, чтобы был завершен переходный процесс, определяемый с точностью ϵ , после того, как завершается переходный процесс, определяемый с точностью ϵ_1 . Из соотношений (10) и (12) следует, что $|\epsilon| \approx |\mu|^K |\epsilon_1|$, где μ - наибольший по абсолютной величине мультипликатор в том случае, если мультипликаторы $\mu_{1,2}$ являются действительными, и любой мультипликатор, если $\mu_{1,2}$ - комплексно-сопряженные. Нетрудно видеть, что $K = \log_{|\mu|}(\epsilon/\epsilon_1)$ и

$$T_\epsilon^\tau(x_0) = T_{\epsilon_1}^\tau(x_0) + \log_{|\mu|}(\epsilon/\epsilon_1). \quad (14)$$

Поскольку одна итерация отображения (3) соответствует τ итерациям отображения (2), длительности переходных процессов $T_\epsilon(x_0)$ и $T_{\epsilon_1}(x_0)$ отображения (2), определенные для одного и того же начального условия x_0 и одних и тех же значений управляющих параметров, но с разными значениями точности ϵ и ϵ_1 , будут связаны между собой как

$$T_\epsilon(x_0) = T_{\epsilon_1}(x_0) + \tau \log_{|\mu|}(\epsilon/\epsilon_1). \quad (15)$$

Соотношение (15) получено в линейном приближении динамики системы и неприменимо для больших значений ϵ и значений мультипликатора μ , близких по

²Точнее говоря, существует бесконечное число таких матриц \mathbf{B} и, соответственно, бесконечное число преобразований.

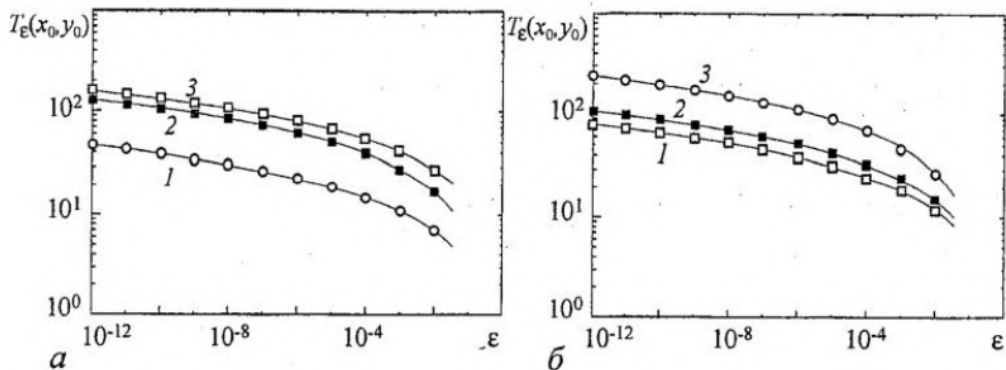


Рис. 1. Зависимость длительности переходного процесса от точности ϵ для различных начальных условий и значений управляющих параметров для цикла периода один отображения Эно. *а* - Значения управляющих параметров подобраны таким образом, что мультипликаторы неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) действительные: 1 - $\lambda=1.8, b=0.2, x_0=1.1, y_0=2.94, \mu_1=-0.558, \mu_2=0.358$ (\circ); 2 - $\lambda=1.2, b=0.5, x_0=1.4, y_0=1.388, \mu_1=-0.814, \mu_2=0.614$ (\blacksquare); 3 - $\lambda=0.6, b=0.7, x_0=1.352, y_0=2.72, \mu_1=-0.836, \mu_2=0.836$ (\square). *б* - Мультипликаторы комплексно-сопряженные: 1 - $\lambda=2.4, b=-0.5, x_0=0.7448, y_0=-0.0408, \mu_{1,2}=0.3\pm i0.64$ (\square); 2 - $\lambda=3.0, b=-0.6, x_0=0.722, y_0=0.48, \mu_{1,2}=0.1\pm i0.768$ (\blacksquare); 3 - $\lambda=4.1, b=-0.8, x_0=0.332, y_0=0.66, \mu_{1,2}=-0.25\pm i0.858$ (\circ)

модулю к единице или к нулю. Для отображения Эно (1), являющегося отображением с постоянным Якобианом, справедливо соотношение $\mu_1\mu_2=b$, а следовательно, в данном случае мультипликатор μ не может быть равен нулю (если, конечно, параметр b не равен нулю). Необходимо также отметить, что с уменьшением значения ϵ соотношение (15) будет выполняться с более высокой степенью точности.

На рис. 1 и 2 приведены в двойном логарифмическом масштабе зависимости длительности переходного процесса от точности ϵ для различных начальных условий (x_0, y_0) , разных значений управляющих параметров и соответствующих различным периодическим режимам отображения Эно. В качестве величины ϵ , фигурирующей в соотношении (15), для длительности переходного процесса было выбрано значение точности $\epsilon_1=10^{-2}$, а длительность переходного процесса, определенная с точностью ϵ_1 , обозначена как $T_{\epsilon_1}(x_0)$. Все значения длительности

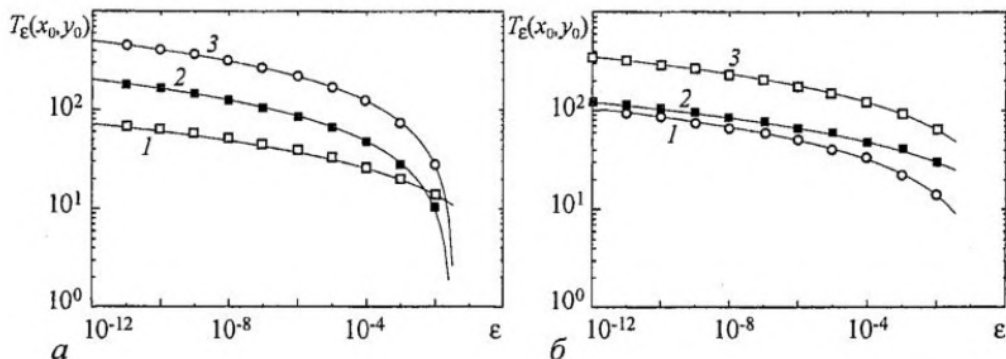


Рис. 2. Аналогичная приведенной на рис. 1 зависимость длительности переходного процесса от точности ϵ для цикла периода два отображения Эно. *а* - Значения управляющих параметров подобраны таким образом, что мультипликаторы устойчивого цикла являются действительными: 1 - $\lambda=2.4, b=0.25, x_0=0.968, y_0=2.4, \mu_1=0.138, \mu_2=0.451$ (\square); 2 - $\lambda=3.2, b=-0.05, x_0=0.674, y_0=2.56, \mu_1=0.786, \mu_2=0.003$ (\blacksquare); 3 - $\lambda=3.3, b=0.05, x_0=0.782, y_0=2.0, \mu_1=-0.907, \mu_2=-0.002$ (\circ). *б* - Мультипликаторы комплексно-сопряженные: 1 - $\lambda=5.0, b=-0.6, x_0=0.644, y_0=1.24, \mu_{1,2}=0.02\pm i0.6$ (\circ); 2 - $\lambda=2.0, b=0.6, x_0=1.16, y_0=1.288, \mu_{1,2}=-0.28\pm i0.53$ (\blacksquare); 3 - $\lambda=1.1, b=0.85, x_0=0.218, y_0=0.16, \mu_{1,2}=0.455\pm i0.717$ (\square)

переходных процессов, определенные численно итерированием отображения Эно, представлены в виде точек, а зависимости, соответствующие (15), показаны линиями. Видно, что кривые аналитической зависимости (15) хорошо соответствуют результатам, полученным численно.

Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий и механизмы ее усложнения

Цикл периода один. Перейдем теперь к обсуждению вопроса о том, как выглядит зависимость длительности переходного процесса $T_{\epsilon_1}(x_0, y_0)$ от начальных условий (x_0, y_0) . Начнем рассмотрение с наиболее простого динамического режима, реализующегося в отображении Эно, - устойчивого цикла периода один. Неподвижная точка (x^0, y^0) отображения Эно имеет координаты

$$x^0 = y^0 = (\lambda + b - 1) / \lambda \quad (16)$$

и является устойчивой при $1 - b < \lambda < 3(1 - b)$ (рис. 3, области A, B). Параметр b изменяется в диапазоне $-1 < b < 1$, отображение Эно при этом является диссипативным.

Как уже говорилось ранее, длительность переходного процесса зависит от

значения мультипликатора периодического аттрактора (см. (15)). При этом характер зависимости длительности переходных процессов от начальных условий также во многом определяется мультипликаторами.

В том случае, когда мультипликаторы периодического аттрактора являются действительными (область A на рис. 3), важную роль в формировании вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий играют многообразия неподвижной устойчивой точки. Устойчивая неподвижная точка (x^0, y^0) характеризуется мультипликаторами

$$\mu_1 = \{2 - 2b - \lambda - [4b + (-2 + 2b + \lambda)^2]^{1/2}\} / 2, \quad (17)$$

$$\mu_2 = \{2 - 2b - \lambda + [4b + (-2 + 2b + \lambda)^2]^{1/2}\} / 2,$$

а также собственными векторами

$$e_1 = (\{2 - 2b - \lambda - [4b + (-2 + 2b + \lambda)^2]^{1/2}\} / 2, 1), \quad (18)$$

$$e_2 = (\{2 - 2b - \lambda + [4b + (-2 + 2b + \lambda)^2]^{1/2}\} / 2, 1).$$

Вдоль направлений, определяемых собственными векторами $e_{1,2}$, в линейной окрестности элемента τ -цикла отображения (1) проходят многообразия, которые, в зависимости от значений управляющих параметров,

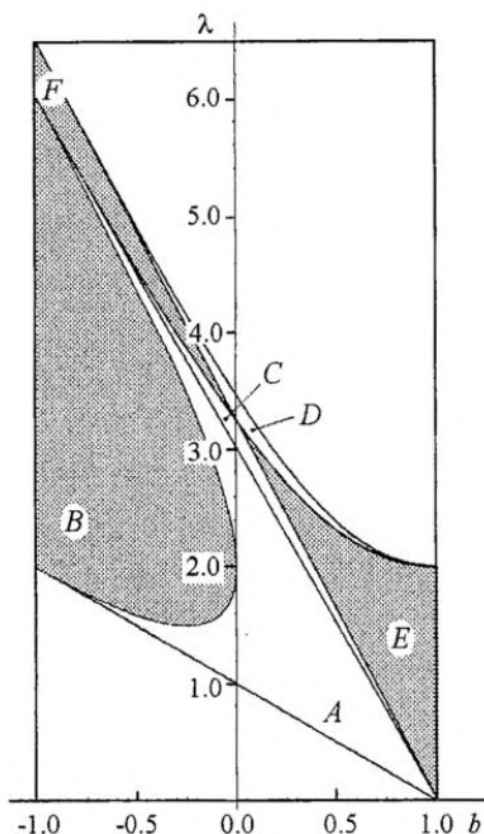


Рис. 3. Карта периодических динамических режимов (циклы периода один и два) для отображения Эно (1) на плоскости управляющих параметров (b, λ) . Серым цветом обозначены области, соответствующие комплексно-сопряженным значениям мультипликаторов $\mu_{1,2}$ периодического аттрактора

могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Следует отметить, что многообразия циклов играют важную роль в нелинейной динамике (например, при формировании границ бассейнов притяжения аттракторов [36,37]), а способы их построения описаны в [38-40].

Сопоставление проекции поверхности $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ на плоскость начальных условий (x_0, y_0) с расположением устойчивых многообразий устойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) показывает, что точки начальных условий, в которых длительность переходных процессов принимает минимальные значения, совпадают с точками одного из этих многообразий. Наименьшие значения зависимости $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ располагаются вдоль устойчивого многообразия устойчивой точки (x^0, y^0) , которое соответствует наименьшему по модулю значению мультипликатора. Именно вдоль этого многообразия, в силу соотношения (10), осуществляется наиболее быстрое приближение изображающей точки к аттрактору. С некоторой степенью условности можно сказать, что больший по абсолютной величине положительный мультипликатор μ_2 характеризует «медленные» движения в системе, в то время как отрицательный мультипликатор μ_1 , характеризующийся меньшим по модулю значением, - «быстрые» движения. Именно вдоль «быстрого» многообразия осуществляется скорейшее приближение изображающей точки к аттрактору³.

На графических иллюстрациях результатов, приведенных ниже, используются следующие обозначения. Длительность переходного процесса $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ (точность определения $\varepsilon=10^{-6}$) показана градациями серого цвета, белый цвет соответствует наименьшей длительности переходного процесса. Устойчивая точка (x^0, y^0) показана черным кружком, неустойчивая точка $(0,0)$ - светлым кружком. Штриховой линией 1 показано устойчивое многообразие неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) , соответствующее мультипликатору μ_1 ; штрихпунктирной линией 2 - второе устойчивое многообразие точки (x^0, y^0) , характеризующееся мультипликатором μ_2 ; жирная сплошная линия 3 соответствует устойчивому многообразию неустойчивой неподвижной точки $(0,0)$, которое формирует границу бассейна притяжения аттрактора (x^0, y^0) ; тонкая сплошная линия 4 соответствует неустойчивому многообразию точки $(0,0)$, лежащему вне бассейна притяжения аттрактора (x^0, y^0) .

На рис. 4, а изображена проекция на плоскость (x, y) зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$. На рис. 4, б для тех же значений управляющих параметров показано расположение многообразий для устойчивой точки (x^0, y^0) и неустойчивой точки $(0,0)$. Видно, что расположение точек начальных условий, в которых длительность переходного процесса минимальна, соответствует расположению устойчивого многообразия неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) , характеризующейся наименьшим по абсолютной величине мультипликатором. В то же самое время, второе «медленное» многообразие не играет видимой роли в формировании структуры поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий, хотя, как будет показано далее, значение второго мультипликатора

³Появление минимумов длительности переходных процессов можно с некоторой степенью условности достаточно наглядно объяснить следующим образом. Изображающая точка, эволюционируя из любых начальных условий, движется сразу вдоль двух направлений - «быстрого» и «медленного». Двигаясь вдоль направления «быстрого» многообразия, изображающая точка достаточно быстро «садится» на второе («медленное») многообразие и в дальнейшем движется вдоль него. Таким образом, момент завершения переходного процесса определяется движением вдоль «медленного» многообразия. В том случае, если точка начальных условий оказывается на «быстром» многообразии, вторая фаза движения вдоль «медленного» многообразия отсутствует, что приводит к тому, что длительность переходного процесса оказывается минимальной.

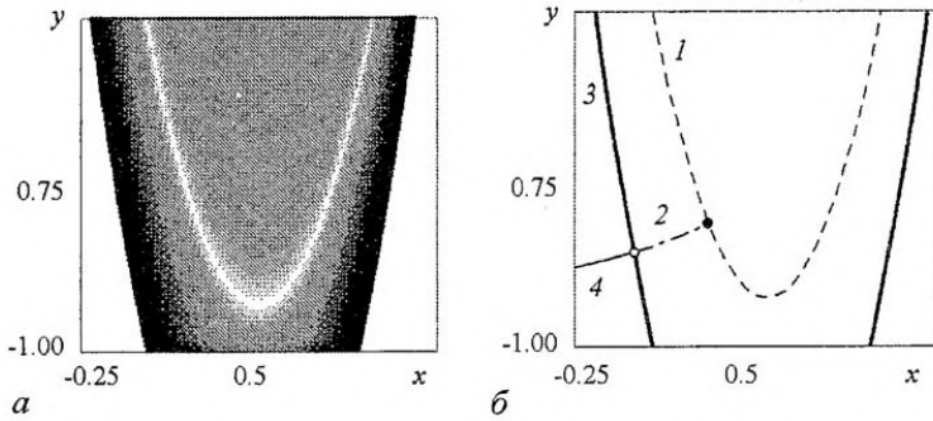


Рис. 4. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=1.3$, $b=0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 40 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. б - Расположение многообразий для устойчивой и неустойчивой точек отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. Здесь $\mu_1=-0.1531$ - меньший по величине мультипликатор, $\mu_2=0.6531$. Второе неустойчивое многообразие совпадает с устойчивым многообразием точки (x^0, y^0) , показанным штрихпунктиром

весьма важно - оно обуславливает расположение многообразий на плоскости (x, y) и, в конечном счете, влияет и на вид поверхности $T_\epsilon(x_0, y_0)$.

С увеличением значения управляющего параметра λ (при фиксированном значении второго управляющего параметра $b=0.1$) в пределах одного динамического режима - устойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) - зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ начинает изменяться. Это связано, прежде всего, с изменением значений мультипликаторов $\mu_{1,2}$ точки (x^0, y^0) и взаимного расположения устойчивых и неустойчивых многообразий на плоскости (x, y) .

На рис. 5 приведена зависимость мультипликаторов $\mu_{1,2}$ неподвижной устойчивой точки от управляющего параметра λ при фиксированных значениях параметра $b=0.1$. Из рисунка видно, что в диапазоне значений параметра $0.9 < \lambda < 2.7$ значения мультипликаторов оказываются по модулю меньше единицы.

При значениях параметра $\lambda < 1.8$ важную роль в расположении устойчивых многообразий точки (x^0, y^0) и формировании вида поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ играет положительный мультипликатор μ_2 , характеризующийся большим значением абсолютной величины.

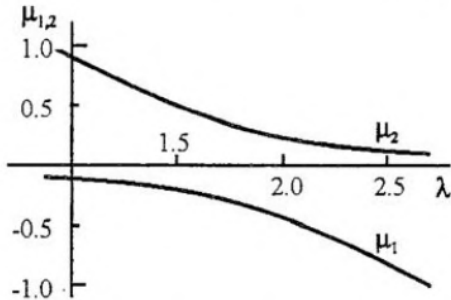


Рис. 5. Зависимость мультипликаторов неподвижной точки (x^0, y^0) от управляющего параметра λ при фиксированном значении параметра $b=0.1$

Следует отметить еще один важный момент: неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0, 0)$, принадлежащее бассейну притяжения аттрактора (x^0, y^0) , совпадает с «медленным» устойчивым многообразием, характеризующимся положительным мультипликатором μ_2 (см. рис. 4, б). Понимание механизма подобного поведения многообразий будет полезно в дальнейшем: любая точка начальных условий, принадлежащая неустойчивому многообразию точки $(0, 0)$ и

лежащая в бассейне притяжения устойчивой точки (x^0, y^0) , должна при последующем итерировании:

- по-прежнему принадлежать неустойчивому многообразию неустойчивой точки $(0,0)$;
- асимптотически стремиться к неподвижной точке (x^0, y^0) .

Из вышеперечисленных требований следует, что неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0,0)$ должно стремиться к устойчивой неподвижной точке (x^0, y^0) вдоль направления, определяемого собственным вектором $e_{1,2}$, соответствующим мультипликатору $\mu_{1,2}$, который имеет большее по модулю значение. Именно на это направление (следовательно, на «медленное» многообразие) «салятся» изображающие точки в малой окрестности точки (x^0, y^0) вследствие того, что второе направление характеризуется меньшим по абсолютной величине мультипликатором и, следовательно, в силу выражения (10), вдоль него все движения происходят быстрее.

В том случае, если два многообразия устойчивой и неустойчивой точек имеют одну общую точку, эти многообразия должны либо бесконечное число раз пересекаться друг с другом (касаться друг друга) [41], либо совпадать. Действительно, если два многообразия пересекаются в некоторой точке x , то точка $F(x)$, получающаяся на следующей итерации (точно так же, как и точка $F^{-1}(x)$, получающаяся при одной итерации в обратном времени), снова должна одновременно принадлежать этим двум многообразиям. Возможно также асимптотическое касание многообразий в особой точке. При значениях параметра $\lambda < 1.8$ оказывается, что эти многообразия совпадают.

При значении управляющего параметра $\lambda = \lambda_c = 1.8$ (управляющий параметр b по-прежнему равен 0.1) значения мультипликаторов сравниваются по модулю и выполняется соотношение $|\mu_1| = |\mu_2|$. В этом случае оба устойчивых многообразия устойчивой точки (x^0, y^0) оказываются равноправными: по обоим собственным направлениям, задаваемым собственными векторами $e_{1,2}$, скорости приближения изображающей точки к аттрактору становятся одинаковыми. Вследствие этого вид поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ изменяется (рис. 6, а): исчезают светлые линии, ассоциированные с «быстрым» устойчивым многообразием и зависимость длительности переходного

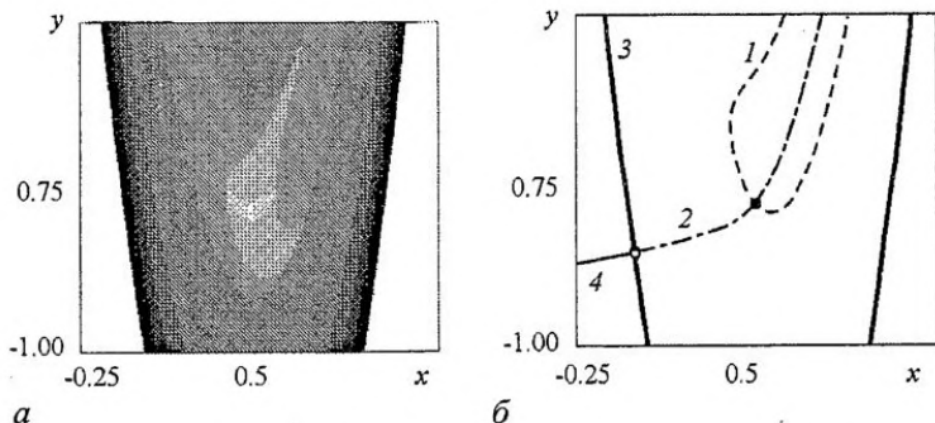


Рис. 6. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda = 1.8$, $b = 0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 20 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. б - Расположение многообразий неподвижных точек отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. Здесь $\mu_1 = -0.1^{1/2}$, $\mu_2 = +0.1^{1/2}$. Второе неустойчивое многообразие точки $(0,0)$ совпадает с устойчивым многообразием точки (x^0, y^0) , показанным штрихпунктиром

процесса от начальных условий становится более или менее однородной; лишь начальные условия, совпадающие с точностью ε с точкой аттрактора, характеризуются минимальной длительностью переходного процесса и показаны на рисунке светлой точкой (рис. 6, б).

При дальнейшем увеличении управляющего параметра λ отрицательный мультипликатор μ_1 становится по модулю больше положительного мультипликатора μ_2 , и многообразия «меняются ролями»: «быстрым» многообразием становится многообразие, характеризующееся мультипликатором μ_2 . Соответственно, светлые линии минимальных значений длительности переходных процессов располагаются уже вдоль многообразия, характеризующегося положительным мультипликатором μ_2 (рис. 7, а, б).

Одновременно, при превышении управляющим параметром λ значения λ_c происходит перестройка структуры многообразий неподвижных точек [42] на плоскости (x, y) , что, в свою очередь, влечет изменение характера поверхности зависимости длительности переходного процесса от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$. Как уже говорилось выше, неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0, 0)$ должно стремиться к устойчивой неподвижной точке (x^0, y^0) вдоль направления,

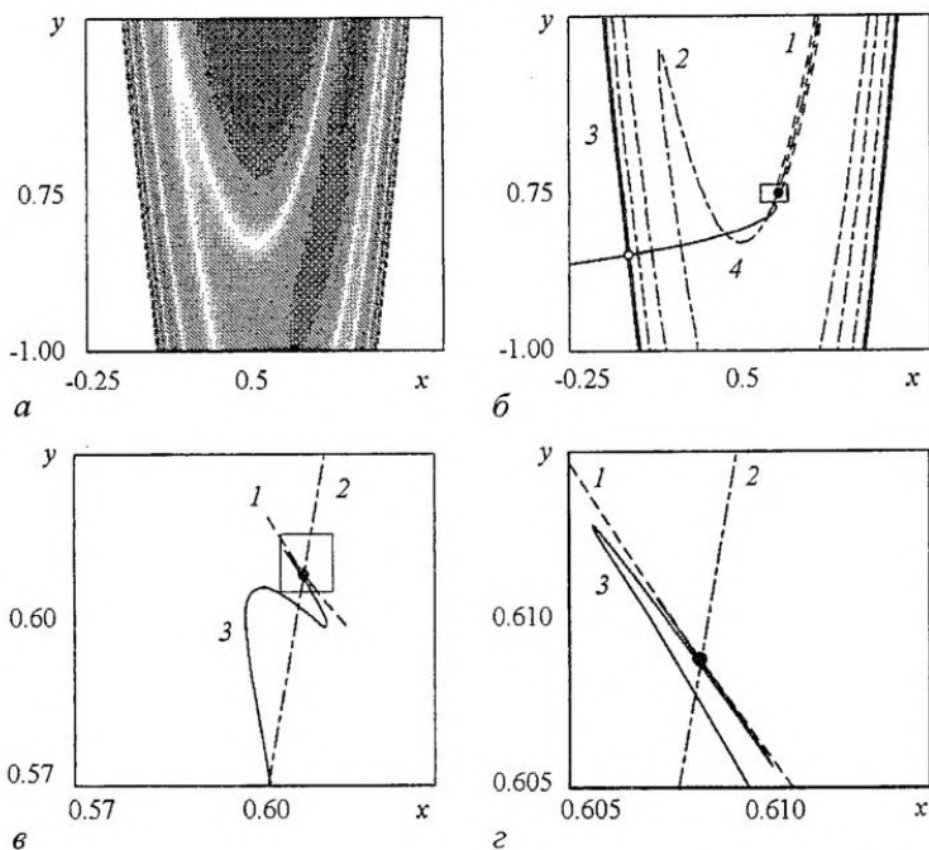


Рис. 7. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=2.3$, $b=0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 50 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. б - Расположение многообразий неподвижных точек отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. Здесь $\mu_1=-0.6531$, $\mu_2=0.1531$. в - Увеличенный фрагмент рис. б: поведение неустойчивого многообразия точки $(0, 0)$ в окрестности неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) . г - Увеличенный фрагмент рис. в: поведение неустойчивого многообразия точки $(0, 0)$ в окрестности неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0)

определяемого собственным вектором e , соответствующим мультипликатору μ , который имеет большее по модулю значение (см. рис. 5 и комментарии к нему в тексте), в данном случае, вдоль устойчивого многообразия, характеризующегося мультипликатором μ_1 . В силу того, что мультипликатор μ_1 отрицателен, изображающая точка будет приближаться вдоль устойчивого многообразия к неподвижной точке (x^0, y^0) то с одной, то с другой стороны. Вследствие этого неустойчивое многообразие неподвижной точки $(0,0)$ будет бесконечное число раз пересекать устойчивое многообразие устойчивой точки (x^0, y^0) , соответствующее собственному вектору e_2 так, как это показано на рис. 7, в. Соответственно, и в окрестности неустойчивой точки $(0,0)$ эти многообразия должны бесконечное число раз пересекаться, при этом точки пересечения устойчивого многообразия точки (x^0, y^0) и неустойчивого многообразия точки $(0,0)$ должны накапливаться. Характер расположения точек пересечения в окрестности неподвижных точек $(0,0)$ и (x^0, y^0) определяется мультипликаторами этих точек, характеризующими рассматриваемые многообразия.

Таким образом, при значении управляющего параметра $\lambda_c < \lambda < 2.7$ и фиксированном значении $b=0.1$ устойчивое многообразие устойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) , характеризующееся мультипликатором μ_2 , будет иметь сложный вид (см. рис. 7, б). Поскольку с многообразием, соответствующим большему по модулю мультипликатору, связаны точки начальных условий, в которых длительность переходного процесса минимальна, то и расположение светлых линий на проекции зависимости длительности переходного процесса от начальных условий $T_e(x_0, y_0)$ на плоскость (x, y) также будет иметь достаточно сложный вид (см. рис. 7, а), повторяющий расположение устойчивого многообразия точки (x^0, y^0) , характеризующегося положительным мультипликатором μ_2 (ср. рис. 7, а и б).

Итак, при изменении значений управляющих параметров в рамках одного динамического режима ($b=0.1, 0.9 < \lambda < 2.7$) при выполнении условия $|\mu_1| = |\mu_2|$ ($\mu_{1,2}$ - действительные) происходит бифуркация расщепления многообразий, связанная с тем, что многообразия устойчивой точки (x^0, y^0) фактически обмениваются ролями - «медленное» многообразие становится «быстрым» и наоборот. При этом на характер расположения многообразий оказывает влияние знак большего по модулю мультипликатора. Эта бифуркация приводит к качественной трансформации вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий.

Аналогичный механизм изменения расположения устойчивых и неустойчивых многообразий неподвижных точек на плоскости (x, y) , приводящий к изменению вида поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_e(x_0, y_0)$, реализуется и в том случае, когда управляющие параметры системы меняются таким образом, что мультипликаторы притягивающей неподвижной точки (x^0, y^0) выходят на комплексную плоскость (область B на плоскости управляющих параметров, см. рис. 3).

Типичная зависимость значений мультипликаторов неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) от управляющего параметра λ при фиксированном значении второго параметра $b=-0.1$ приведена на рис. 8. При данном выборе значения управляющего параметра b , неподвижная точка (x^0, y^0) является устойчивой в диапазоне изменения управляющего параметра $1.1 < \lambda < 3.3$. При этом, как легко видеть из формулы (17), в диапазоне параметров $(2-2(-b)^{1/2}-2b) < \lambda < (2+2(-b)^{1/2}-2b)$ мультипликаторы $\mu_{1,2}$ являются комплексно-сопряженными.

Рассмотрим характер изменения зависимости вида поверхности $T_e(x_0, y_0)$ в случае, когда при варьировании управляющих параметров мультипликаторы $\mu_{1,2}$ выходят на комплексную плоскость. Зафиксируем значение управляющего

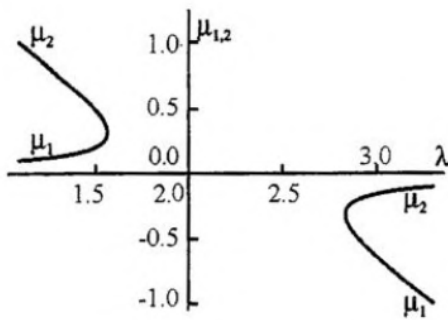


Рис. 8. Зависимость мультипликаторов неподвижной точки (x^0, y^0) от управляющего параметра λ при фиксированном значении параметра $b=-0.1$. Область разрыва соответствует значениям управляющих параметров, при которых мультипликаторы неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) являются комплексно-сопряженными (см. соотношение (17))

длительность переходного процесса минимальна, соответствует расположению устойчивого многообразия неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) , характеризующегося наименьшим по абсолютной величине мультипликатором, который в данном случае является положительным ($\mu_1=0.13$). В отличие от случая, приведенного на рис. 4, б ($\lambda=1.3, b=0.1$), неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0,0)$ и устойчивое многообразие устойчивой точки (x^0, y^0) , характеризующееся положительным мультипликатором μ_2 , не совпадают. Фактически, ситуации, приведенные на рис. 4 и 9 отличаются несколькими аспектами: во-первых, бассейн притяжения точки (x^0, y^0) оказывается «перевернутым» на рис. 9 по сравнению с рис. 4; во-вторых, для случая, приведенного на рис. 9, оба мультипликатора $\mu_{1,2}$ неподвижной устойчивой точки

параметра $b=-0.1$ и будем увеличивать параметр λ от величины 1.1, соответствующей касательной бифуркации ($\mu_2=+1$), до значения $\lambda=3.3$, когда неподвижная точка (x^0, y^0) теряет устойчивость и происходит бифуркация удвоения периода: мультипликатор μ_1 принимает значение -1 , в системе возникает устойчивый цикл периода два.

На рис. 9 приведен вид проекции на плоскость (x, y) зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ и расположение многообразий неподвижных точек на плоскости (x, y) при тех же самых значениях параметров. Видно, что ситуация во многом аналогична приведенной на рис. 4: расположение точек начальных условий, в которых

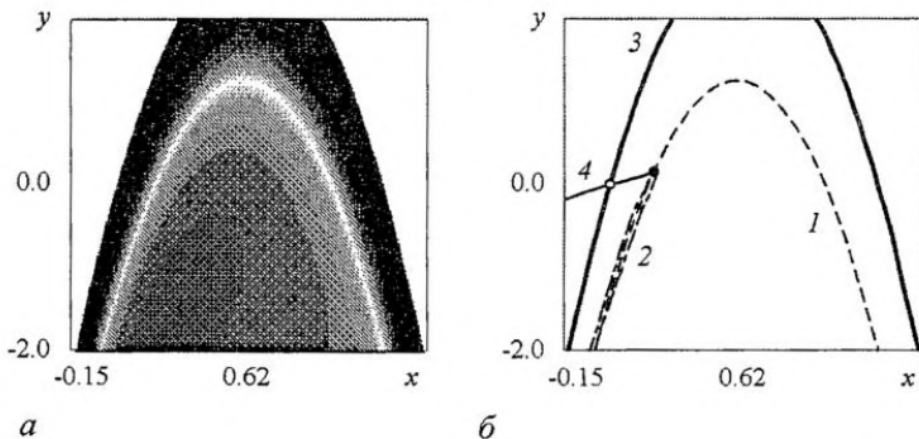


Рис. 9. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=1.3, b=-0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 50 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. б - Расположение многообразий неподвижных точек отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. 1 - «быстрое» устойчивое многообразие неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) , соответствующее положительному мультипликатору $\mu_1=0.13$; 2 - второе устойчивое многообразие точки (x^0, y^0) , характеризующееся положительным мультипликатором $\mu_2=0.77$, «вытянуто» вдоль «быстрого» многообразия

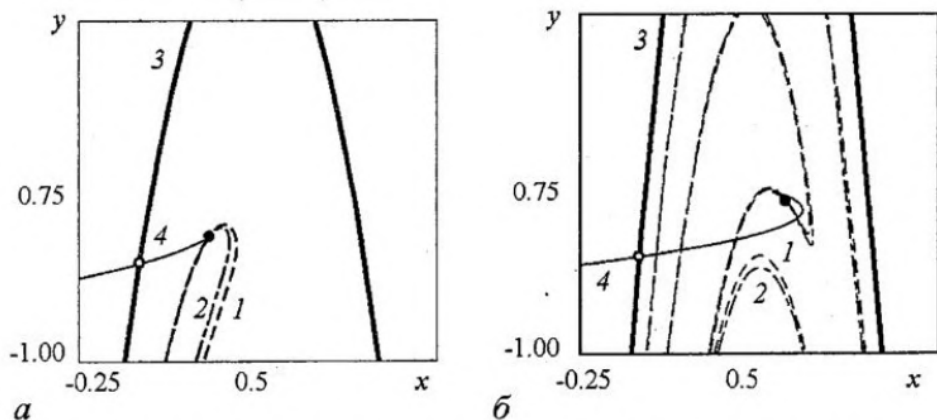


Рис. 10. Расположение многообразий неподвижных точек отображения Эно вблизи линий, на которых мультипликаторы устойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) становятся комплексно-сопряженными. Значения управляющих параметров $b=-0.1, \lambda=1.567$ (а), $\lambda=2.833$ (б)

(x^0, y^0) оказываются положительными, в отличие от случая, показанного на рис. 4, когда мультипликатор μ_1 являлся отрицательным; в-третьих, не совпадают неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0,0)$ и устойчивое многообразие устойчивой точки (x^0, y^0) .

С дальнейшим увеличением значения управляющего параметра λ ситуация (по сравнению со случаем $b=0.1$) изменяется: при достижении параметром λ значения $(2-2(-b)^{1/2}-2b)$ мультипликаторы $\mu_{1,2}$ неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) сравниваются друг с другом и выходят на комплексную плоскость, становясь комплексно-сопряженными. При этом, как видно из рис. 10, а, в момент выхода мультипликаторов на комплексную плоскость устойчивые многообразия точки (x^0, y^0) сливаются друг с другом и исчезают, что влечет за собой изменение вида поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$. В то же самое время, многообразия неустойчивой точки $(0,0)$ не претерпевают существенных изменений. При дальнейшем увеличении управляющего параметра λ мультипликаторы $\mu_{1,2}$ обходят начало координат по окружности радиуса $b^{1/2}$. В этом случае для комплексно-сопряженных мультипликаторов точки (x^0, y^0) поверхность $T_\epsilon(x_0, y_0)$ будет иметь глобальный минимум, совпадающий с неподвижной устойчивой точкой (x_0, y_0) , и никаких точек минимума не будет (рис.11, а).

После достижения параметром λ значения $(2+2(-b)^{1/2}-2b)$ мультипликаторы $\mu_{1,2}$ снова становятся действительными (рис. 10, б), но теперь они оба отрицательные (см. рис. 8). На плоскости (x, y) вновь возникают устойчивые многообразия неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) , при этом, как и раньше, точки начальных условий, принадлежащие «быстрому» многообразию (которое характеризуется наименьшим по абсолютной величине мультипликатором μ_2), соответствуют минимальным по длительности переходным процессам (рис. 12, а). Точно так же, как и для случая $b=0.1$ (в силу причин, описанных ранее), «быстрое» многообразие, характеризующееся мультипликатором μ_2 и собственным вектором e_2 , будет бесконечное число раз пересекаться с неустойчивым многообразием неустойчивой точки $(0,0)$ (рис. 12, б). Вследствие этого, зависимость длительности переходного процесса от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ при $(2+2(-b)^{1/2}-2b) < \lambda < 3(1-b)$ будет иметь более сложный вид, нежели при $(1-b) < \lambda < (2-2(-b)^{1/2}-2b)$. Отличием в усложнении вида зависимости $T_\epsilon(x_0, y_0)$ является то, что при положительных значениях параметра b изменение характера расположения многообразий на плоскости (x, y) происходит при $\lambda=2(1-b)$, в то время как при отрицательных b происходящее усложнение носит «распределенный» по плоскости параметров (b, λ)

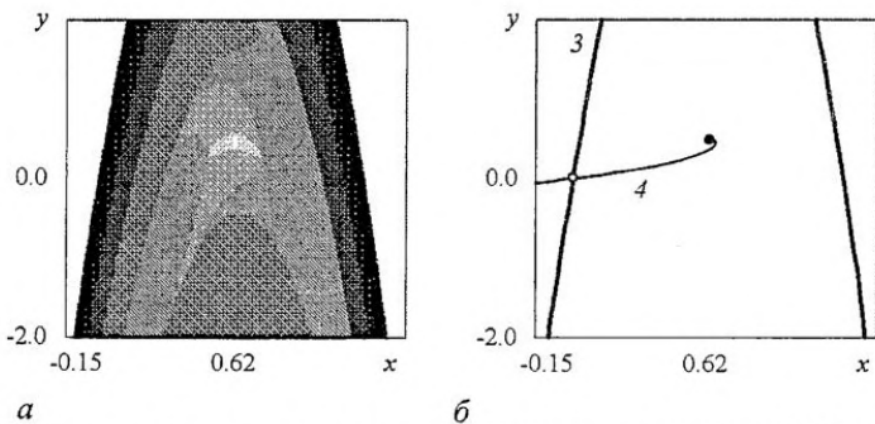


Рис. 11. *а* - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=2.2$, $b=-0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 20 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. Значения управляющих параметров таковы, что мультипликаторы неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) оказываются комплексно-сопряженными $\mu_{1,2} = \pm i 0.316$. В данном случае на плоскости (x, y) не существует многообразий неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) . *б* - Расположение многообразий неподвижной неустойчивой точки при тех же самых значениях управляющих параметров

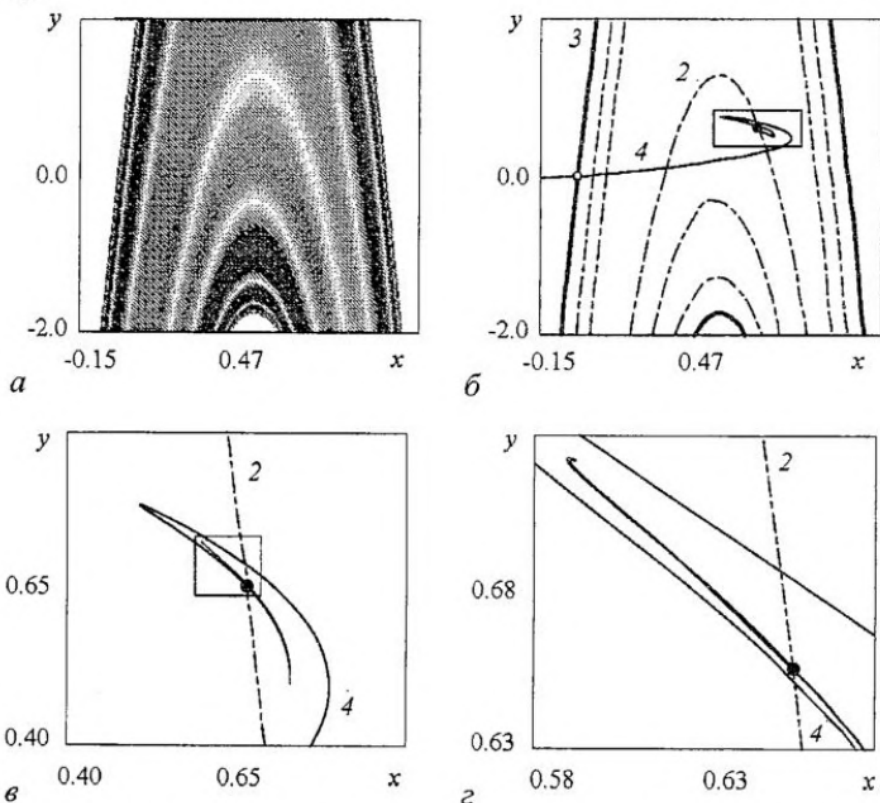


Рис. 12. *а* - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=3.2$, $b=-0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 100 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. *б* - Расположение многообразий неподвижных точек отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. 2 - «быстрое» устойчивое многообразие точки (x^0, y^0) , характеризующееся отрицательным мультипликатором $\mu_2 = -0.113$. *в* - Увеличенный фрагмент рис. *б*, иллюстрирующий поведение многообразий в окрестности неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) . *г* - Увеличенный фрагмент рис. *в*, иллюстрирующий поведение многообразий в окрестности неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0)

характер, связанный с тем, что мультипликаторы $\mu_{1,2}$ неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) становятся при определенных значениях управляющих параметров комплексно-сопряженными. Можно сказать, что при $b < 0$ усложнение характера зависимости длительности переходных процессов от начальных условий происходит на границе $\lambda = (2 \mp 2(-b)^{1/2} - 2b)$ выхода мультипликаторов на комплексную плоскость.

Таким образом, из всего вышеизложенного можно сделать вывод, что усложнение зависимости длительности переходного процесса от начальных условий имеет место при изменении управляющих параметров в рамках одного динамического режима, что связано с качественным изменением расположения многообразий устойчивой и неустойчивой точек отображения. Понятно, что при бифуркациях, приводящих к тому, что в системе реализуются другие динамические режимы, также меняется и характер зависимости длительности переходных процессов. Вопрос о том, как будет отражаться произошедшая бифуркация на характере зависимости длительности переходных процессов от начальных условий, обсуждается ниже.

Циклы периода два и выше. При $\lambda = 3(1-b)$ в отображении Эно (1) происходит бифуркация удвоения периода: мультипликатор μ_1 неподвижной точки (x^0, y^0) становится равным минус единице, точка (x^0, y^0) теряет устойчивость, и одновременно в системе возникает цикл периода два, являющийся устойчивым при $3(1-b) < \lambda < 1-b + (6-8b+6b^2)^{1/2}$, элементами которого являются точки (x_1^{2c}, y_1^{2c}) и (x_2^{2c}, y_2^{2c}) :

$$\begin{aligned} x_1^{2c} &= \{1 + \lambda - b + [\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2]^{1/2}\} / (2\lambda), \\ y_1^{2c} &= \{-1 - \lambda + b + [\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2]^{1/2}\} / (2\lambda), \\ x_2^{2c} &= \{-1 - \lambda + b + [\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2]^{1/2}\} / (2\lambda), \\ y_2^{2c} &= \{1 + \lambda - b + [\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2]^{1/2}\} / (2\lambda). \end{aligned} \quad (19)$$

Цикл периода два характеризуется мультипликаторами

$$\begin{aligned} \mu_1^{2c} &= [4 - \lambda^2 + 2\lambda(1-b) - 6b + 4b^2] / 2 - [-4b^2 + (-4 + \lambda^2 + 2\lambda(b-1) + 6b - 4b^2)^2]^{1/2} / 2, \\ \mu_2^{2c} &= [4 - \lambda^2 + 2\lambda(1-b) - 6b + 4b^2] / 2 + [-4b^2 + (-4 + \lambda^2 + 2\lambda(b-1) + 6b - 4b^2)^2]^{1/2} / 2. \end{aligned} \quad (20)$$

С возникновением в системе устойчивого цикла периода два вид зависимости длительности переходных процессов от начальных условий принципиально изменяется (рис. 13, а): на плоскости (x, y) появляются ярко выраженные линии, отвечающие максимумам длительности переходных процессов. В силу произошедшей бифуркации удвоения периода наибольший по абсолютной величине отрицательный мультипликатор μ_1 неподвижной точки (x^0, y^0) становится по модулю больше единицы, а следовательно, ассоциированное с ним (до момента бифуркации «медленное») многообразие перестает быть устойчивым и превращается в неустойчивое многообразие. Второе многообразие, бывшее ранее «быстрым» и характеризующееся мультипликатором μ_2 , по-прежнему остается устойчивым многообразием, но уже неустойчивой точки (x^0, y^0) . Именно это многообразие соответствует максимальным по длительности переходным процессам. Это связано с тем, что изображающая точка, лежащая вблизи устойчивого многообразия неустойчивой точки, долгое время двигается вдоль него к точке (x^0, y^0) до тех пор, пока не покинет окрестность этого многообразия в силу движения вдоль второго (неустойчивого) направления, характеризующегося

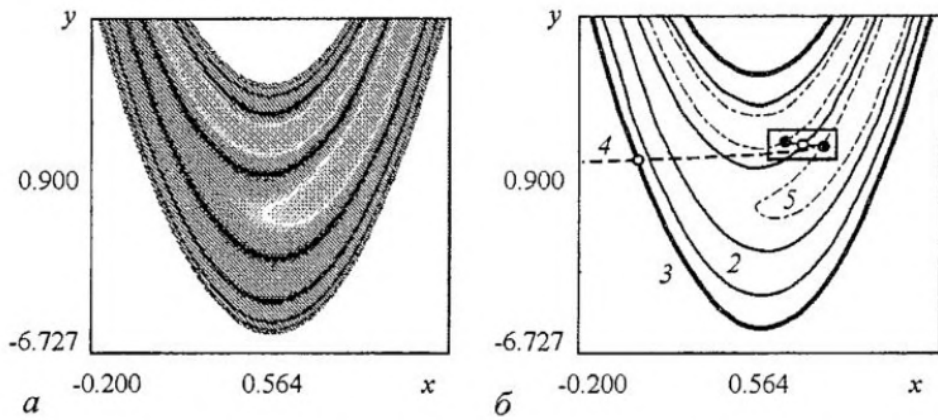


Рис. 13. *а* - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_{\varepsilon}(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=2.75$, $b=0.1$, при которых в системе реализуется устойчивый цикл периода два. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 200 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. Светло-серый цвет точек вне бассейна притяжения цикла периода два соответствует начальным условиям, имеющим аттрактор на бесконечности. *б* - Расположение многообразий неподвижных точек и цикла периода два отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. Мультипликаторы цикла периода два: $\mu_1^{2c}=0.0123$ и $\mu_2^{2c}=0.815$. Жирной сплошной линией 3, как и ранее, схематически показано устойчивое многообразие неподвижной неустойчивой точки $(0,0)$. Штриховой линией 4 - неустойчивое многообразие этой же точки. Тонкой сплошной линией 2 показано устойчивое многообразие неподвижной неустойчивой точки (x^0, y^0) . Вторая тонкая сплошная линия, проходящая через неподвижную неустойчивую точку (x^0, y^0) и элементы цикла периода два (черные кружки), является неустойчивым многообразием точки (x^0, y^0) . Штрихпунктирными линиями 5 показано устойчивое многообразие цикла периода два, характеризующееся наименьшим по модулю мультипликатором μ_1^{2c}

мультипликатором μ_1 . Рис. 14 иллюстрирует расположение устойчивых и неустойчивых многообразий в окрестности устойчивого цикла периода два.

Возникший в результате бифуркации удвоения периода на линии $\lambda=3(1-b)$ устойчивый цикл периода два имеет действительные мультипликаторы $\mu_2^{2c}=1$ и $\mu_1^{2c}=b^2$ и ассоциированные с этими мультипликаторами многообразия (рис. 13, б). При этом многообразии, соответствующее мультипликатору μ_2^{2c} , является «медленным», а второе многообразие, соответствующее μ_1^{2c} , - «быстрым». Минимальные по длительности переходные процессы реализуются в точках начальных условий, принадлежащих «быстрому» устойчивому многообразию

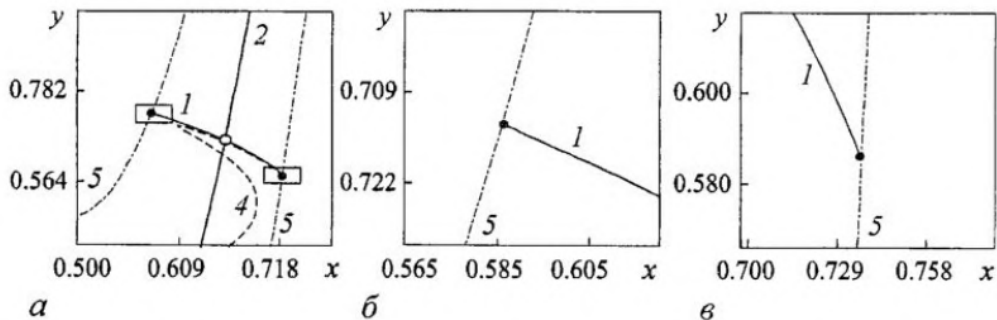


Рис. 14. *а* - Увеличенный фрагмент рис. 13. б показывающий расположение многообразий неустойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) и устойчивого цикла периода два. Тонкой сплошной линией 1 показано неустойчивое многообразие точки $(0,0)$, характеризующееся отрицательным мультипликатором μ_1 . *б*, *в* - Увеличенные фрагменты рис. *а*, иллюстрирующие расположение многообразий в окрестности элементов цикла периода два

цикла периода два. На проекции поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий на плоскость (x, y) эти минимумы выглядят как светлые линии (см. рис. 13).

С увеличением параметра λ мультипликаторы устойчивого цикла периода два становятся комплексно-сопряженными на линиях $\lambda=(1+5^{1/2})(b-1)$ и $\lambda=1-b+(5b^2-6b+5)^{1/2}$ (области E и F на рис. 3). Зависимость значений мультипликаторов устойчивого цикла периода два μ_1^{2c} и μ_2^{2c} от управляющего параметра λ при фиксированном значении параметра $b=0.1$ приведена на рис. 15.

Комплексные значения мультипликаторов (при $2.91246 < \lambda < 3.0095$) образуют на рис. 15 область разрыва. При значениях параметра $\lambda = 2.91246$ и $\lambda = 3.0095$, соответствующих границам области разрыва, значения мультипликаторов μ_1^{2c} и μ_2^{2c} совпадают. Из рис. 15 видно, что при $\lambda < 2.91246$ мультипликатор μ_1^{2c} , принимающий положительные значения, близкие к нулю, с увеличением значения параметра λ возрастает и стремится к 0.1. В то же самое время мультипликатор μ_2^{2c} принимает положительные значения, начиная с 1.0, и с ростом λ уменьшается, стремясь к тому же значению 0.1. Таким образом, в рассматриваемой области значений $2.7 < \lambda < 2.91246$, мультипликатор μ_1^{2c} меньше по модулю мультипликатора μ_2^{2c} . После области разрыва в точке $\lambda = 3.0095$ значения мультипликаторов μ_1^{2c} и μ_2^{2c} равны -0.1. При $\lambda > 3.0095$ наименьшим по абсолютному значению становится мультипликатор μ_2^{2c} . Мультипликатор μ_1^{2c} при увеличении параметра λ от 3.0095 до 3.1935 стремится к -1.0. Для области $2.91246 < \lambda < 3.0095$ мультипликаторы μ_1^{2c} и

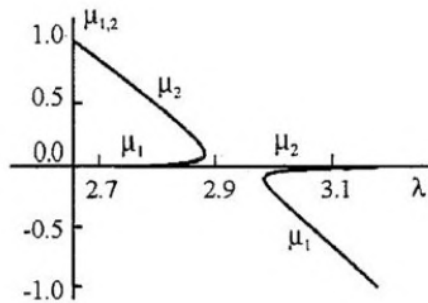


Рис. 15. Зависимость мультипликаторов цикла периода два отображения Эно от управляющего параметра λ при фиксированном значении параметра $b=0.1$

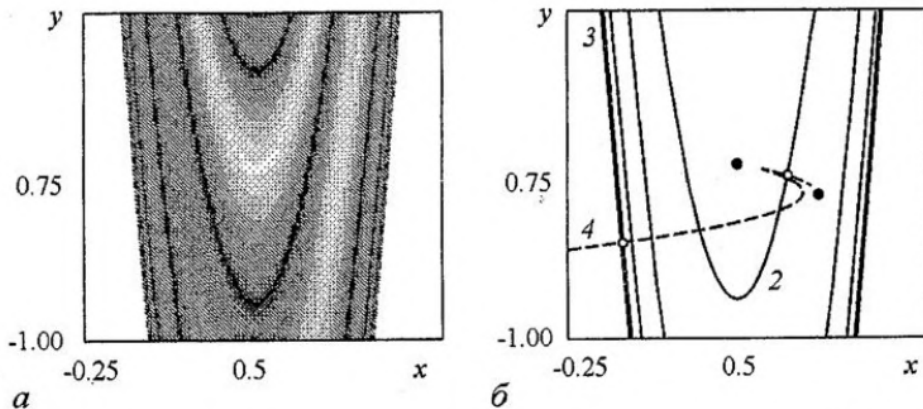


Рис. 16. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_e(x_0, y_0)$ при значениях управляющих параметров $\lambda=2.95$, $b=0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 40 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. Мультипликаторы устойчивого цикла периода два комплексно-сопряженные $\mu_{1,2}^{2c}=0.0237 \pm i0.1$. На плоскости (x, y) не существует многообразий устойчивого цикла периода два. б - Расположение многообразий неподвижных неустойчивых точек (черные точки - элементы устойчивого цикла периода два, светлые - неустойчивые точки) при тех же самых значениях управляющих параметров. Жирная сплошная линия 3, формирующая границу бассейна притяжения аттрактора (x^0, y^0) , соответствует устойчивому многообразию неустойчивой неподвижной точки $(0,0)$. Штриховая линия 4 соответствует неустойчивому многообразию неустойчивой неподвижной точки $(0,0)$. Тонкая сплошная линия 2 отвечает устойчивому многообразию неустойчивой точки (x^0, y^0)

μ_2^{2c} являются комплексно-сопряженными и удовлетворяют соотношению $|\mu_1^{2c}| = |\mu_2^{2c}|$.

Механизм усложнения зависимости длительности переходного процесса от начальных условий для цикла периода два остается таким же, как и описанный выше для неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) в случае прохождения мультипликаторов через комплексную область (ср. рис. 11, а и 16, а). При значениях управляющих параметров, соответствующих комплексно-сопряженным мультипликаторам $\mu_{1,2}^{2c}$ цикла периода два, его устойчивые многообразия исчезают, а неустойчивое многообразие точки (x^0, y^0) «наматывается» на элементы цикла периода два (рис. 16, б) также, как раньше (см. рис. 11, б) неустойчивое многообразие точки $(0,0)$ «наматывалось» на устойчивую точку (x^0, y^0) . В силу этого, зависимость длительности переходных процессов от начальных условий имеет два ярко выраженных минимума, совпадающих с элементами устойчивого цикла периода два. Максимальная длительность переходных процессов по-прежнему соответствует начальным условиям, принадлежащим устойчивому многообразию неустойчивой точки (x^0, y^0) .

При $\lambda > 3.0095$ (рис. 17) вид зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ усложняется подобно тому, как это происходило для неподвижной устойчивой точки (x^0, y^0) (см. рис. 7 и 12), что выражается в появлении бесконечного числа минимумов поверхности $T_\epsilon(x_0, y_0)$, накапливающихся к устойчивому многообразию неустойчивого цикла периода один.

Данный эффект связан с усложнением структуры расположения многообразий. Устойчивое многообразие неустойчивой точки $(0,0)$, как и раньше, образует границу бассейна притяжения аттрактора. Неустойчивое многообразие неустойчивой точки $(0,0)$ асимптотически стремится к неустойчивой неподвижной

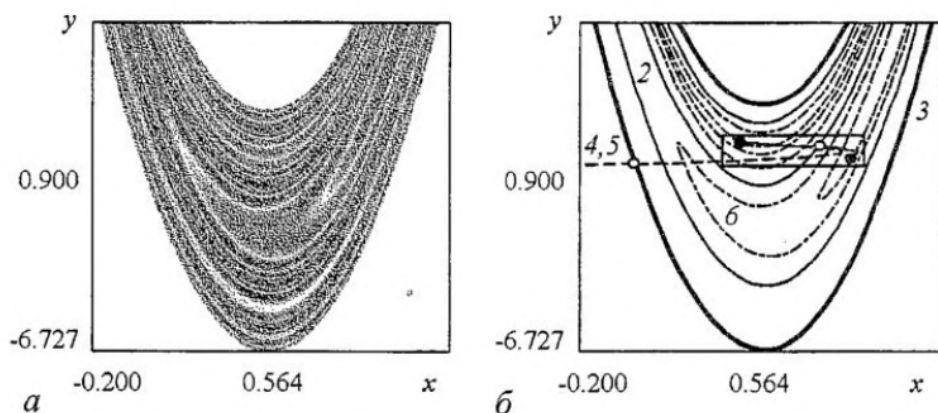


Рис. 17. а - Зависимость длительности переходных процессов от начальных условий $T_\epsilon(x_0, y_0)$ для значений управляющих параметров $\lambda=3.16$, $b=0.1$, при которых в системе реализуется устойчивый цикл периода два. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 200 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. Светло-серый цвет точек вне бассейна притяжения цикла периода два соответствует начальным условиям, имеющим аттрактор на бесконечности. б - Расположение многообразий неподвижных точек и цикла периода два отображения Эно при тех же самых значениях управляющих параметров. Здесь $\mu_1^{2c} = -0.846$ и $\mu_2^{2c} = -0.012$. Линии 2-4 означают то же, что и на рис. 16, б. Вторая тонкая сплошная линия, проходящая через неподвижную неустойчивую точку (x^0, y^0) - светлый кружок и элементы цикла периода два - черные кружки, является неустойчивым многообразием точки (x^0, y^0) . Штрихпунктирными линиями б показано устойчивое многообразие цикла периода два, характеризующееся наименьшим по модулю мультипликатором μ_2^{2c} . Устойчивое многообразие цикла периода два, характеризующееся мультипликатором μ_1^{2c} , совпадает с неустойчивым многообразием неустойчивой неподвижной точки $(0,0)$ и обозначено штриховой линией 5

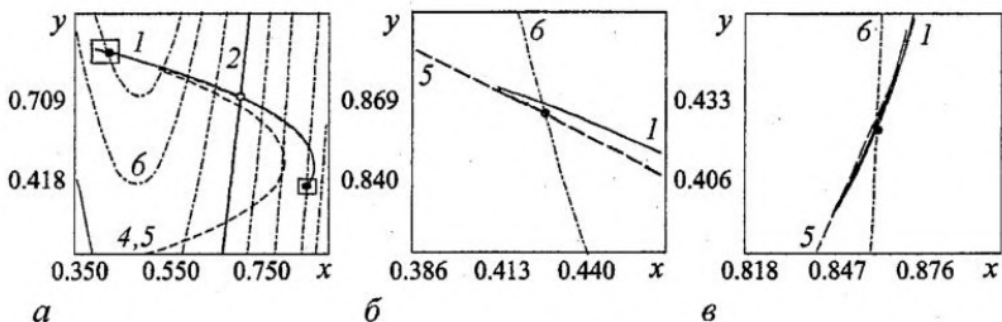


Рис. 18. *а* - Увеличенный фрагмент рис. 17, *б* показывающий расположение многообразий неустойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) и устойчивого цикла периода два. Тонкой сплошной линией 1 показано неустойчивое многообразие неустойчивой точки (x^0, y^0) , характеризующееся отрицательным мультипликатором μ_1 . *б, в* - Увеличенные фрагменты рис. *а*, иллюстрирующие расположение устойчивых многообразий в окрестности элементов цикла периода два. Штриховой линией 5 показано устойчивое многообразие цикла периода два, характеризующееся мультипликатором μ_1^{2c}

точке (x^0, y^0) вдоль неустойчивого многообразия неустойчивой неподвижной точки (x^0, y^0) и не оказывает значительного влияния на характер зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_e(x_0, y_0)$. В силу того, что неустойчивое многообразие точки $(0,0)$ бесконечное число раз пересекает устойчивое многообразие точки (x^0, y^0) в ее окрестности, устойчивое многообразие неустойчивой точки (x^0, y^0) также бесконечное число раз пересекает неустойчивое многообразие точки $(0,0)$ в окрестности этой точки. Как уже говорилось выше, устойчивому многообразию точки (x^0, y^0) на проекции поверхности $T_e(x_0, y_0)$ на плоскость начальных условий (x_0, y_0) соответствуют максимумы длительности переходных процессов (темная линия на рис. 17, *а*).

Неустойчивое многообразие неустойчивой точки (x^0, y^0) стремится к каждому из элементов устойчивого цикла периода два (см. формулу (19)) по направлению устойчивого многообразия цикла периода два, которое характеризуются большим по модулю мультипликатором, то есть тому, по которому осуществляется более медленная сходимость к аттрактору (см. рис. 14 и 18). При значениях управляющего параметра $2.7 < \lambda < 2.91246$ поведение неустойчивого многообразия неустойчивой точки (x^0, y^0) вблизи каждого из элементов устойчивого цикла периода два обуславливается мультипликатором μ_2^{2c} , а при $3.0095 < \lambda < 3.1935$ - мультипликатором μ_1^{2c} .

Как видно из рис. 15, при $2.7 < \lambda < 2.91246$ ($b=0.1$) мультипликаторы μ_1^{2c} и μ_2^{2c} являются положительными, а при $3.0095 < \lambda < 3.1935$ мультипликаторы принимают отрицательные значения. Таким образом, при $3.0095 < \lambda < 3.1935$ неустойчивое многообразие точки (x^0, y^0) бесконечное число раз пересекает устойчивые многообразия устойчивого цикла периода два, характеризующиеся отрицательными мультипликаторами, «наматываясь» на неподвижную точку. Как следствие, в окрестности неустойчивой точки (x^0, y^0) «быстрое» устойчивое многообразие цикла периода два, характеризующееся наименьшим по модулю мультипликатором μ_1^{2c} , также бесконечное число раз пересекает неустойчивое многообразие неустойчивой точки (x^0, y^0) , что приводит к появлению бесконечного числа минимумов на проекции поверхности $T_e(x_0, y_0)$ (см. рис. 17, *б*).

Аналогичный механизм приводит к усложнению характера зависимости длительности переходных процессов от начальных условий в рамках одного динамического режима для циклов периода четыре, восемь и т.д. На рис. 19 показано усложнение зависимости длительности переходного процесса от начальных условий $T_e(x_0, y_0)$ в рамках одного режима - устойчивого цикла периода

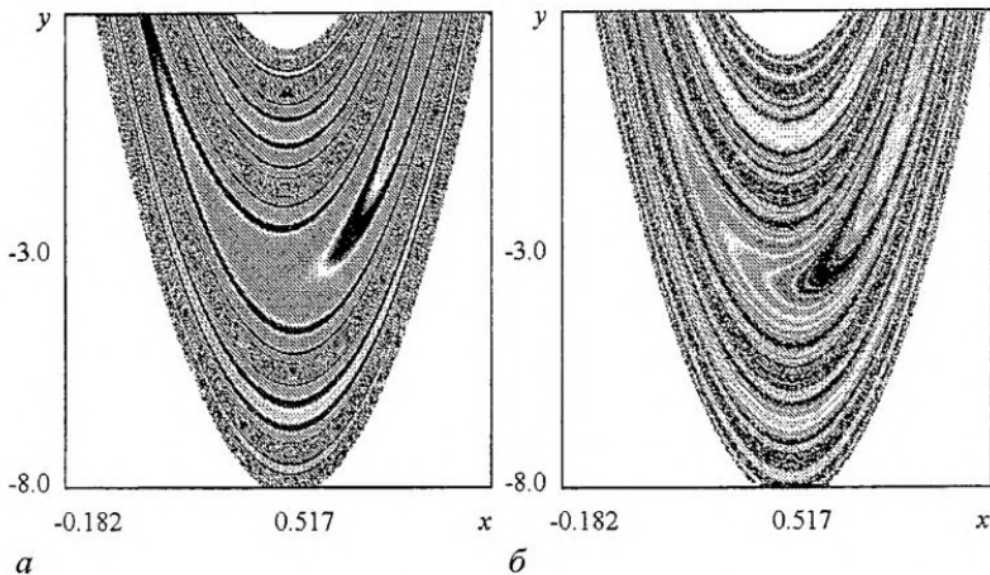


Рис. 19. Усложнение зависимости длительности переходных процессов от начальных условий $T_e(x_0, y_0)$ для значений управляющих параметров, при которых в системе реализуется устойчивый цикл периода четыре: *а* - $\lambda=3.198$, $b=0.1$; *б* - $\lambda=3.27$, $b=0.1$. Черный цвет соответствует длительности переходного процесса в 200 единиц дискретного времени, белый цвет - 0 единиц. Светло-серый цвет точек вне бассейна притяжения периодического аттрактора соответствует начальным условиям, имеющим аттрактор на бесконечности

четыре. Видно, что, как и ранее для устойчивых циклов периода один и два, с увеличением управляющего параметра λ происходит увеличение числа минимумов длительности, связанное с усложнением структуры многообразий периодических циклов.

Выводы

Итак, переходные процессы минимальной длительности в динамических системах с дискретным временем соответствуют начальным условиям (x_0, y_0) , принадлежащим устойчивому многообразию устойчивого цикла, которое характеризуется наименьшим по модулю мультипликатором («быстрому» многообразию). При этом значения мультипликаторов должны быть действительными. Второе многообразие, характеризующееся большим по модулю мультипликатором («медленное» многообразие), не играет видимой роли в формировании структуры зависимости длительности переходных процессов от времени. Однако вдоль этого многообразия в окрестности элементов устойчивого цикла проходит неустойчивое многообразие неустойчивого цикла. В тот момент, когда при изменении управляющих параметров (в рамках одного динамического режима) наибольший по модулю мультипликатор устойчивого цикла становится отрицательным, происходит перестройка и усложнение структуры поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий. При этом подобное усложнение, связанное с «обменом ролями» мультипликаторов, может быть обусловлено как выходом значений мультипликаторов в комплексную плоскость, (например, для циклов периода два, четыре и т.д. отображения Эно), так и одновременным ростом/уменьшением значений мультипликаторов, остающихся действительными (например, для неподвижной устойчивой точки [41]).

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 01-02-17392 и 02-02-16351).

Библиографический список

1. *Venkatesan A. and Lakshmanan M.* Different routes to chaos via strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced system // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58, № 3. P. 3008.
2. *Depassier M.C., Mura J.* Variational approach to a class of nonlinear oscillators with several limit cycles // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 056217.
3. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть 1: Сценарий Фейгенбаума // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. Том 1, № 1,2. С. 15.
4. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть 2. Двухпараметрический переход к хаосу // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. Том. 1, № 3,4. С. 17.
5. *Кузнецов А.П., Савин А.В.* О проблеме границы хаоса и типичных структурах на плоскости параметров неавтономных дискретных отображений с удвоениями периода // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2000. Том 8, № 4. С. 25.
6. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Влияние внешнего сигнала на автоколебания распределенной системы винтовой электронный пучок - встречная электромагнитная волна // *Известия вузов. Радиофизика.* 2002. Том XLV, № 9. С. 773.
7. *Кальянов Э.В.* Переходные процессы в автостохастическом генераторе с запаздыванием // *Письма в ЖТФ.* 2000. Том 26, № 15. С. 26.
8. *Bezruchko V.P., Dikanev T.V., Smirnov D.A.* Role of transient processes for reconstruction of model equations from time series // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 036210.
9. *Безручко Б.П., Диканев Т.В., Смирнов Д.А.* Глобальная реконструкция уравнений динамической системы по временной реализации переходного процесса // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2001. Том 9, № 3. С. 3.
10. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* Универсальные скейлинговые закономерности переходных процессов // *Докл. РАН.* 2002. Том 383, № 3. С. 322.
11. *Pisarchik A.N.* Controlling the multistability of nonlinear systems with coexisting attractors // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 046203.
12. *Morua A.P.S., Grebogi C.* Output functions and fractal dimensions in dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, № 13. P. 2778.
13. *Janosi I.M. and Tél T.* Time-series analysis of transient chaos // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 4. P. 2756.
14. *Dhamala M., Lai Y.-C., and Kostelich E.J.* Detecting unstable periodic orbits from transient chaotic time series // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61, № 6. P. 6485.
15. *Dhalama M., Lai Y.-C., Kostelich E.J.* Analyses of transient chaotic time series // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 056207.
16. *Zhu L., Raghu A., Lai Y.-C.* Experimental observation of superpersistent chaotic transients // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, № 18. P. 4017.
17. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Chaotic attractors in crisis // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48, № 22. P. 1507.
18. *Grebogi C., Ott E., Romeiras F., Yorke J.A.* Critical exponents for crisis-induced intermittency // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 36, № 11. P. 5365.
19. *Szabó K.G., Lai Y.-C., Tél T., Grebogi C.* Topological scaling and gap filling at crisis // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61, № 5. P. 5019.
20. *Stewart H.B., Ueda Y.* Double crisis in two-parameter dynamical system // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 13. P. 2478.

21. *Gallas J.A.C., Grebogi C., Yorke J.A.* Vertices in parameter space: double crisis which destroy chaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, № 9. P. 1359.
22. *Meucci R., Gadowski W., Ciofini M., Arecchi F.T.* Transient statistics in stabilizing periodic orbit // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 5.
23. *Aston P.J., Marriot P.K.* Waiting time paradox applied to transient times // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 57, № 1. P. 1181.
24. *Paar V., Buljan H.* Bursts in the chaotic trajectory lifetimes preceding controlled periodic motion // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 4. P. 4869.
25. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* Универсальные закономерности переходных процессов // *Известия вузов. Радиофизика.* 2002. Том XLV, № 10. С. 880.
26. *Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова И.А.* Средняя длительность переходных процессов в динамических системах с дискретным временем // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Том 11, № 1.
27. *Hénon M.* On the numerical computation of Poincaré maps // *Physica D.* 1982 Vol. 5. P. 412.
28. *Kaufmann Z., Lustfeld H.* Comparison of averages of flows and maps // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 055206(R).
29. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. P. 69.
30. *Хенон М.* Двумерное отображение со странным аттрактором // *Странные аттракторы / под ред. Л.П. Шильникова и Я.Г. Синая.* М.: Мир, 1981. С. 152.
31. *Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е.* Методика определения длительности переходного процесса для динамической системы с дискретным временем, находящейся в режиме хаотических колебаний // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2002. Том 10, № 5. С. 25.
32. *Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е.* Методика определения длительности переходного процесса для динамических систем, находящихся в режиме хаотических колебаний // *Письма в ЖТФ.* 2003. Том 29, № 8. С. 32.
33. *Анищенко В.С.* Аттракторы динамических систем // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Том 5, № 1. С. 109.
34. *Ефимов Н.В.* Квадратичные формы и матрицы. М.: Физматгиз, 1963.
35. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967.
36. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Fractal basin boundaries, long lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50, № 13. P. 935.
37. *Grebogi C., Ott E., and Yorke J.A.* Metamorphoses of basin boundaries in nonlinear dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56, № 10. P. 1011.
38. *Parker T.S., Chua L.O.* Practical numerical algorithms for chaotic systems. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
39. *You Z.P., Kostelich E.J., Yorke J.A.* Calculating stable and unstable manifolds // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. Vol. 1, № 1. P. 605.
40. *Kostelich E.J., Yorke J.A., You Z.* Plotting stable manifolds: error estimates and noninvertible maps // *Physica D.* 1996. Vol. 93. P. 210.
41. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
42. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Изменение зависимости длительности переходных процессов от начальных условий в системах с дискретным временем // *Письма в ЖТФ.* 2002. Vol. 28, № 15. P. 61.

TRANSIENT PROCESSES IN HÉNON MAP

Part I. Periodical dynamics

G.B. Astafyev, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov, A.E. Khramova

In this paper we analyze the transient processes in two-dimensional dynamical system with discrete time (Hénon map) demonstrating periodical oscillations. The method of calculation of the transient process duration and its dependence on the accuracy of determination of the process and on the initial conditions is considered. Mechanisms leading to complication of this dependence are revealed. In the second part of the work we plan to consider the dependence of the mean duration of the transient process when controlling parameters change.



Астафьев Геннадий Борисович - родился в Саратове (1980). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2002). Ассистент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика. Автор ряда статей в центральной печати.



Короновский Алексей Александрович - родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), кандидат физико-математических наук (1997). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Соавтор монографий «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж». Автор ряда статей в центральной печати.



Храмов Александр Евгеньевич - окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» Том 1 (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ, 2002).



Храмова Анастасия Евгеньевна - родилась в Саратове (1983). Студентка четвертого курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов - нелинейная динамика.