



## **ВОЛНА КЛАСТЕРИЗАЦИИ В ЦЕПОЧКЕ СИСТЕМ, КАЖДАЯ ИЗ КОТОРЫХ СОДЕРЖИТ НАБОР ЭЛЕМЕНТОВ С ВНУТРЕННЕЙ ГЛОБАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ**

*А.С. Иванова, С.П. Кузнецов*

Исследуются цепочки систем (ячеек), каждая из которых содержит набор элементов с внутренней глобальной связью. Показано, что при определенных условиях в этих моделях реализуется феномен распространения волны кластеризации, состоящий в том, что образ, записанный первоначально в одной ячейке, в ходе временной эволюции системы формируется и в связанных с ней ячейках.

### **Введение**

Исследование и использование принципов обработки информации, реализующихся в естественных нейросистемах (мозг человека и животных) представляет фундаментальный интерес и является одним из магистральных направлений развития современной науки [1].

Известны два основных подхода к построению моделей нейроподобных систем. Первый подразумевает по возможности точное воспроизведение деталей, выявленных при изучении биологических систем [2]. Второй заимствует из биологии только самые общие моменты - существование большого числа элементов (каждый из которых отвечает индивидуальному нейрону) и развитой системы связей между этими элементами [3]. С точки зрения формулирования общих принципов обработки информации, которые воспроизводили бы свойства биологических нейронных сетей, и для построения технических систем, реализующих эти принципы, именно второй подход представляет большой интерес.

В его рамках, в свою очередь, можно выделить два направления. Классической реализацией одного считается модель Хопфилда [4], когда в качестве индивидуального элемента берется система с предельно простой динамикой, а все нетривиальные динамические и информационные свойства и процессы (например, способность к распознаванию образов, ассоциативная память) обусловлены сложной (и варьируемой в процессе «обучения») структурой связей между элементами. Другой подход, изначально предложенный японским исследователем Канеко [5], в каком-то смысле противоположен: индивидуальный элемент предполагается способным демонстрировать сложную динамику и хаос, а структура связей считается достаточно простой. Эта модель обладает сложной нетривиальной динамикой и представляет собой набор эволюционирующих в дискретном времени элементов (квадратичных отображений), каждый из которых

связан с каждым другим одинаковым образом (глобальная связь). Исследования Канеко и других авторов продемонстрировали богатую феноменологию этой модели [5-8]. В частности, было обнаружено явление, названное кластеризацией, которое состоит в том, что в процессе динамики спонтанно формируются группы элементов - кластеры, такие, что мгновенные состояния точно совпадают для элементов, относящихся к одному кластеру. Возможность сосуществования аттракторов с различным числом кластеров при одних и тех же значениях параметров системы, очевидно, дает возможность для хранения информации, а управление этими состояниями можно использовать для обработки информации.

Как известно, одной из первых продуктивных концепций, предложенных в контексте проблемы создания искусственного интеллекта, был перцептрон [9]. Это нейросеть, в которой элементы («нейроны») расположены в виде нескольких слоев, а передача возбуждения осуществляется от слоя к слою (рис. 1, а). Интересное развитие идеи Канеко состоит в том, чтобы соединить ее с идеей перцептрона и рассмотреть сеть из последовательности слоев, такую, что

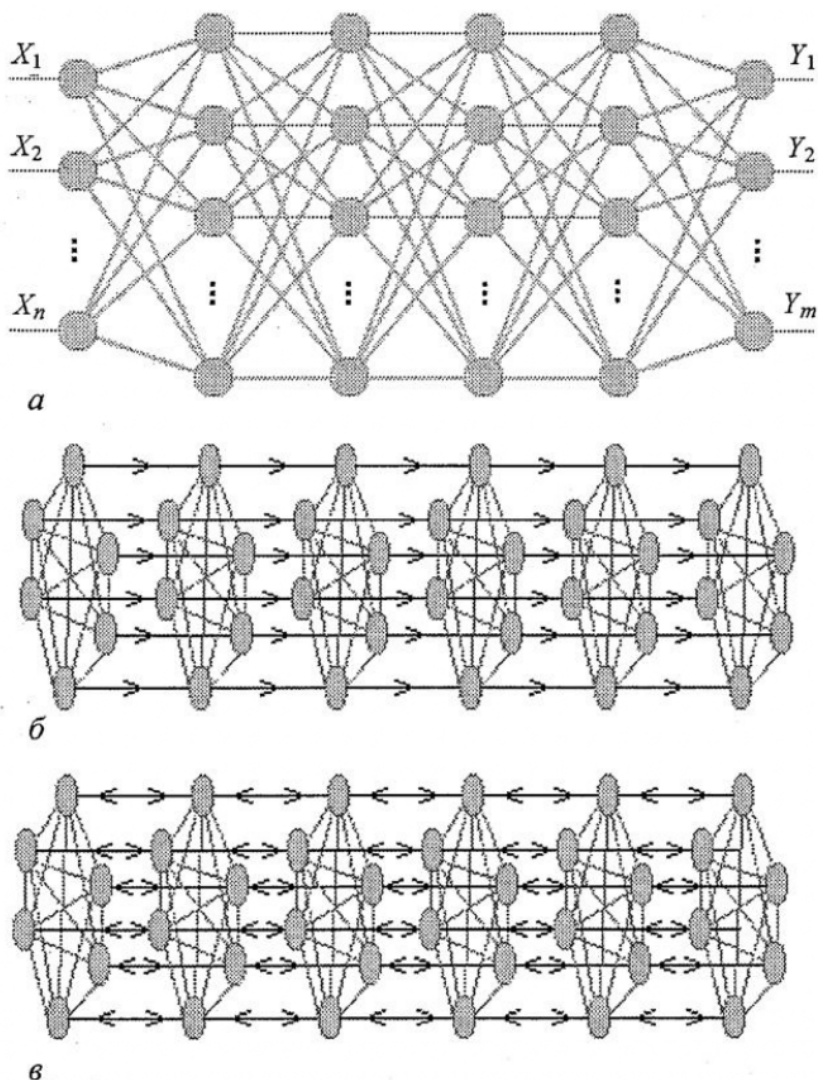


Рис. 1. Схематическое изображение многослойного перцептрона [9] (а), цепочки ячеек с глобальной внутренней связью и однонаправленной связью элементов с партнерами в соседней ячейке (б) и цепочки ячеек со взаимной связью (в)

индивидуальные элементы представлены квадратичными отображениями, связь между элементами в пределах каждого одного слоя является глобальной, и добавлена попарная связь между элементами, относящимися к соседним слоям. Таким образом, мы приходим к одномерной дискретной среде, построенной из связанных между собой ячеек, каждая из которых состоит из набора элементов с глобальной связью (рис. 1, б, в). Цель данной работы заключается в исследовании динамики такой модели, что представляет очевидный интерес с точки зрения выяснения возможностей подхода Канеко и его обобщений для описания и объяснения информационных процессов в нейросетях.

В разделе 1 вводится система, представляющая собой строительный блок для конструирования рассматриваемых далее цепочек. Это обобщение модели Канеко - совокупность элементов, динамика которых описывается одномерными квадратичными отображениями, с двумя типами глобальной связи. В разделе 2 строятся модели цепочек с однонаправленной и взаимной связью, а в разделе 3 изложены результаты численного моделирования динамики этих моделей. Основным результатом состоит в том, что продемонстрирован существенно новый феномен - волна кластеризации: в ходе временной эволюции системы кластерная структура, заданная первоначально в одной ячейке (которую можно трактовать как «образ»), передается соседним ячейкам, а затем постепенно распространяется на остальные элементы цепочки. В системе с однонаправленной связью реализуется совершенная волна кластеризации, в системе с взаимной связью ее распространение характеризуется своего рода диссипацией, проявляющейся в постепенном размывании образа.

## 1. Модель с двумя типами глобальной связи

Примем, что динамика изолированного индивидуального элемента описывается квадратичным отображением

$$X_{n+1} = f(X_n) = 1 - \lambda X_n^2, \quad (1)$$

и построим сначала систему с глобальной связью, которая далее будет использоваться как ячейка при конструировании цепочки.

В свое время для двух связанных элементов типа (1) на основе ренормгруппового (РГ) анализа было обнаружено, что слабая связь между отображениями представляется в общем случае как комбинация двух типов связи, инерционной и диссипативной [10-13]. В области перехода к хаосу оба этих типа связи характеризуются принципиально разными свойствами по отношению к РГ преобразованию, причем в отличие от диссипативной связи, инерционная может приводить к самопроизвольно возникающей нетривиальной динамике не только в области хаоса, но и в области регулярного поведения индивидуальных элементов.

Достаточно общая форма записи уравнений двух связанных систем имеет вид

$$\begin{aligned} X_{n+1}(1) &= f(X_n(1)) + \varepsilon_1(f(X_n(2)) - f(X_n(1))) + \varepsilon_2(X_n(2) - X_n(1)), \\ X_{n+1}(2) &= f(X_n(2)) + \varepsilon_1(f(X_n(1)) - f(X_n(2))) + \varepsilon_2(X_n(1) - X_n(2)), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $X_n(i)$ ,  $i=1,2$  обозначает состояние  $i$ -го элемента в  $n$ -й момент дискретного времени,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  - два параметра связи. В уравнении (2) член с  $f(X)$  соответствует диссипативной связи, тогда как линейный член представляет собой комбинацию инерционной и диссипативной связи, хотя вклад диссипативной связи относительно мал. Как следует из анализа в работе [14], коэффициенты  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  выражаются через коэффициенты диссипативной  $\varepsilon_D$  и инерционной  $\varepsilon_I$  связи следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_D + 0.088\varepsilon_p, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_I \quad (3)$$

Систему с глобальной связью можно мыслить как набор элементов, каждый из которых попарно связан с каждым другим. Тогда рассмотренные выше два типа взаимодействия также могут быть отнесены к системам с глобальной связью. Уравнение для системы, в которой присутствуют оба типа глобальной связи, можно записать в следующем виде:

$$X_{n+1}(i) = (1-\varepsilon_1)f(X_n(i)) - \varepsilon_2 X_n(i) + (\varepsilon_1/N) \sum_{j=1}^N f(X_n(j)) + (\varepsilon_2/N) \sum_{j=1}^N X_n(j), \quad (4)$$

где  $N$  - полное количество элементов в системе, предполагающееся достаточно большим.

## 2. Модель в виде цепочки связанных ячеек с внутренней глобальной связью

Перейдем теперь к моделям в виде совокупности слоев или ячеек, каждая из которых описывается с помощью уравнения (4). Положим, что для любых двух соседних слоев установлено попарное соответствие между элементами одного и другого слоя, и связь вводится между соотнесенными друг с другом элементами. Эта связь может быть задана по-разному.

Одна возможность состоит в том, что информация может передаваться от слоя к слою только в одном направлении, и динамика последующих слоев не влияет на динамику предыдущих. Это однонаправленная связь. Другой вариант таков, что связь между слоями является взаимно симметричной, то есть каждый слой оказывает влияние на соседние с ним слои.

В общем случае связь между элементами, относящимися к разным слоям, должна представляться как комбинация инерционной и диссипативной связи. В данной работе, однако, для определенности будем считать, что эта связь чисто диссипативная.

С учетом сделанных предположений, систему уравнений для цепочки с однонаправленной связью формулируем следующим образом:

$$X_{n+1}^j(i) = f(X_n^j(i)) + (\varepsilon_1/N) \sum_{k=1}^N [f(X_n^j(k)) - f(X_n^j(i))] + (\varepsilon_2/N) \sum_{k=1}^N [X_n^j(k) - X_n^j(i)] + q[f(X_n^{j+1}(i)) - f(X_n^j(i))], \quad (5)$$

а для цепочки с взаимной связью - в виде

$$X_j^{n+1}(i) = f(X_n^j(i)) + (\varepsilon_1/N) \sum_{k=1}^N [f(X_n^j(k)) - f(X_n^j(i))] + (\varepsilon_2/N) \sum_{k=1}^N [X_n^j(k) - X_n^j(i)] + q[2f(X_n^j(i)) - f(X_n^{j-1}(i)) - f(X_n^{j+1}(i))], \quad (6)$$

где, напомним,  $f(X) = 1 - \lambda X^2$  есть нелинейная функция, отвечающая логистическому отображению;  $n$  - дискретное время;  $i$  - индекс элемента;  $j$  - индекс ячейки;  $N$  - число элементов в каждой ячейке;  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  - параметры глобальной связи;  $q$  - параметр связи между элементами, относящимися к разным ячейкам.

## 3. Численные эксперименты и волна кластеризации

Говоря об информационных аспектах динамических процессов в моделях рассматриваемого класса, будем иметь ввиду плоские изображения (образы). Будем полагать, что элементы, относящиеся к каждой ячейке (слою), в количестве

$N=r^2$ , где  $r$  - целое число, расположены в виде двумерной квадратной решетки пикселей размера  $r \times r$  ( $r=10$ , следовательно, в каждой ячейке 100 элементов).

Значения динамической переменной, отвечающей каждому элементу, будем ассоциировать с цветом, приданным соответствующему пикселю. Пиксель обозначается белым, если значение динамической переменной соответствующего элемента  $X_n^j(i) < X^*$ , и черным, если  $X_n^j(i) > X^*$ . Здесь  $X^* = [(1+4\lambda)^{1/2} - 1] / (2\lambda)$  отвечает неподвижной точке индивидуального одномерного отображения (1). В одной из ячеек начальные условия таковы, что записан образ - круг, а во всех остальных заданы случайными.

На рис. 2 показана серия диаграмм, относящаяся к случаю цепочки с однонаправленной связью и иллюстрирующая состояние цепочки на нескольких временных шагах. Глобальная связь элементов внутри ячеек считается линейной, то есть преимущественно инерционной:  $\epsilon_1=0$ ,  $\epsilon_2=0.2$ . Остальные параметры  $\lambda=0.8$ ,  $q=0.2$ .

Если бы связи между ячейками не было, то изображение в каждой ячейке (слое) оставалось бы таким же, как в первой строке, с изменением цвета каждого пикселя со светлого на темный на каждом шаге, поскольку заданное значение параметра соответствует циклу периода 2.

В присутствии связи, однако, можно видеть, как после примерно 10 итераций тот же образ, какой был записан в первой ячейке, появляется во второй и третьей ячейках, то есть в них реализуется двукластерное состояние, повторяющее по структуре состояние первой ячейки. В двух последующих ячейках он также

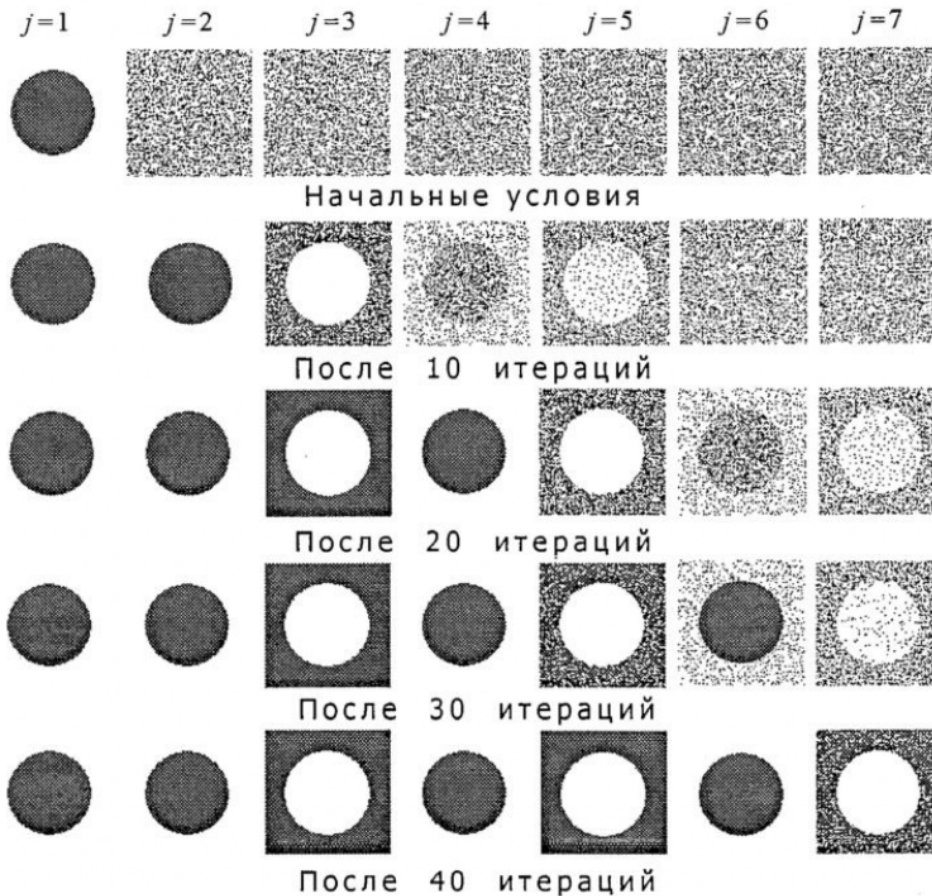


Рис. 2. Распространение волны кластеризации в ячейках глобально линейно связанных отображений с однонаправленной связью при  $\lambda=0.8$ ,  $\epsilon=0.2$ ,  $q=0.2$

различается, но не так четко. В дальнейшем образ постепенно формируется во всех последующих ячейках.

В силу однонаправленного характера связи, обратного воздействия ячеек со случайным состоянием на предыдущие нет, и образ в итоге приобретает совершенную структуру - происходят только колебания элементов внутри каждой ячейки между двумя значениями, отвечающими циклу периода 2.

В случае, когда значения параметров соответствуют турбулентной фазе Канеко [5] и каждая подсистема демонстрирует хаотическую динамику, происходит разрушение четкой структуры образа в первой ячейке и сложной структуры остальных. Но при этом перед разрушением образ, задававшийся в первой ячейке, формируется во всех последующих, хотя и в размытом виде (рис. 3).

Таким образом, при указанном выборе связи между ячейками и внутри них осуществляется передача информации вдоль по цепочке. В случае периодической динамики каждой ячейки эта передача происходит без искажения. С динамической точки зрения, процесс можно интерпретировать как распространение волны

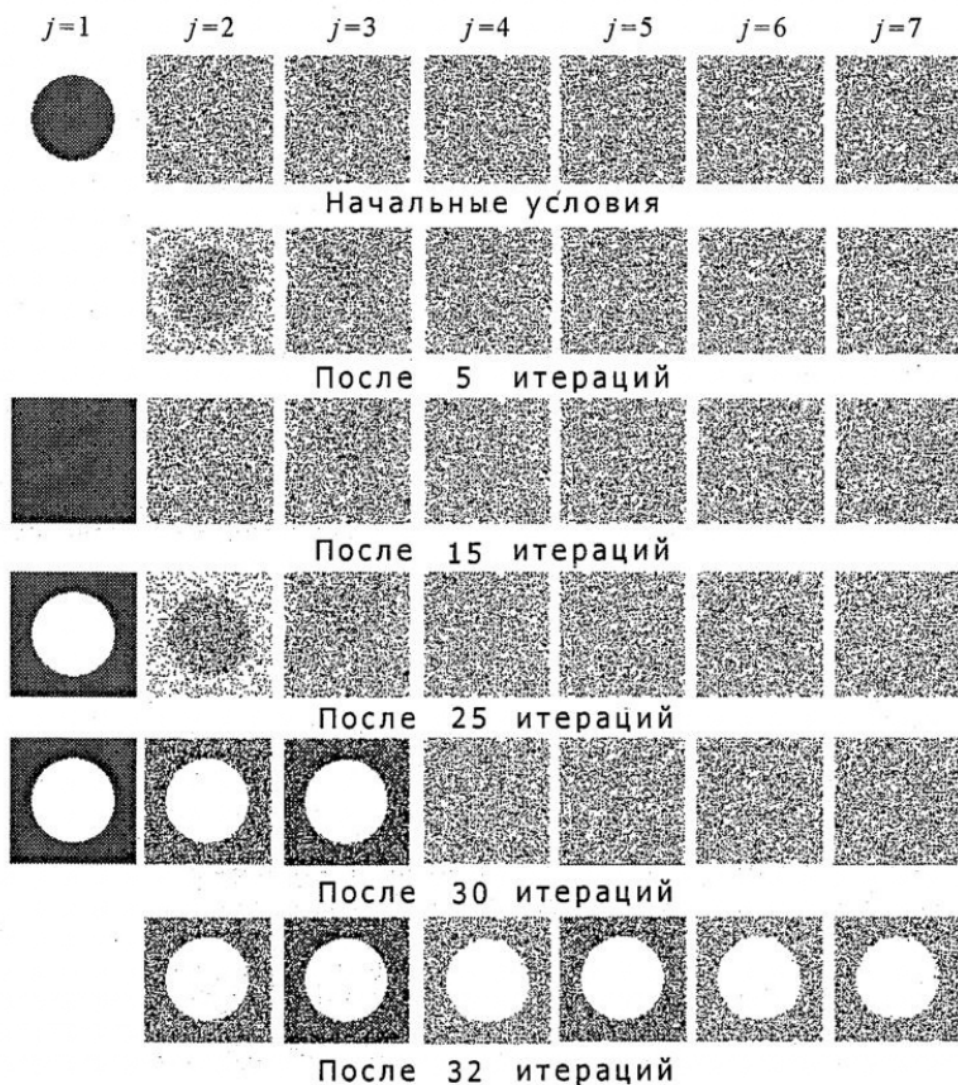


Рис. 3. Распространение волны кластеризации в ячейках глобально линейно связанных отображений с однонаправленной связью при  $\lambda=1.7$ ,  $\epsilon=0.2$ ,  $q=0.2$

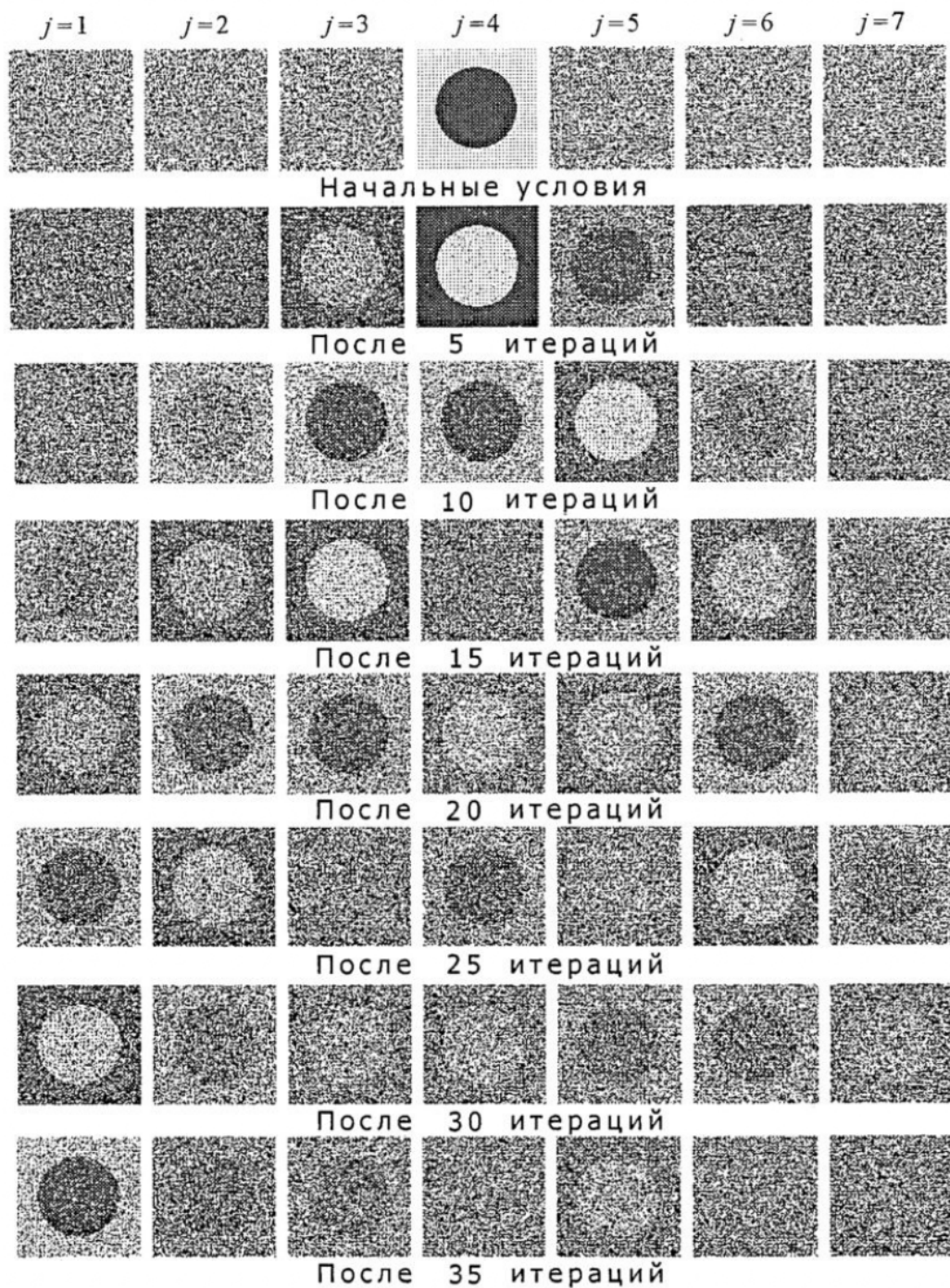


Рис. 4. Распространение волны кластеризации в ячейках глобально линейно связанных отображений со взаимной связью ближайших соседей при  $\lambda=1.2$ ,  $\epsilon=0.2$ ,  $q=0.1$  кластеризации. В случае хаотической динамики информация искажается, однако ее распространение все же прослеживается во всех ячейках.

Рассмотрим теперь цепочку из ячеек с взаимной связью между элементами-партнерами, относящимися к ячейкам - ближайшим соседям (б). Граничные условия считаем периодическими, то есть наша цепочка представляет собой, по существу, замкнутое кольцо из ячеек с внутренней глобальной связью. Для определенности рассмотрим случай  $\epsilon_1=0$ , когда внутренняя связь между элементами в

каждой ячейке линейная (то есть преимущественно инерционная), а связь между ячейками диссипативная.

Численное моделирование проводилось аналогичным образом, как для цепочки с однонаправленной связью. Для одной ячейки (на рисунке - центральной) начальные условия таковы, что в ней задан образ в виде круга. Во всех остальных ячейках начальные условия выбраны случайным образом. Интересно посмотреть, сохранится ли в случае взаимной связи описанный в предыдущем разделе феномен распространения волны кластеризации.

На рис. 4 показана серия диаграмм, иллюстрирующая состояние цепочки на нескольких временных шагах при  $\lambda=1.2$ ,  $\varepsilon_2=0.2$ ,  $q=0.1$ . Так как соседние ячейки взаимно действуют друг на друга, то происходит размывание четкого образа в центральной ячейке, однако можно наблюдать постепенное распространение образа, хотя и не воспроизводящегося идеально точно, по другим ячейкам. Сначала образ круга проявляется в ближайших соседних ячейках (через 5-10 итераций). Затем копии круга начинают в некоторых ячейках проявляться, а в некоторых исчезать. Например, после 20 итераций можно видеть образ круга во всех ячейках (в нашем случае их выбрано семь), а после 35 итераций круг виден только в первой, пятой и седьмой ячейках. Структура цепочки такова, что полного размывания образа круга не происходит.

Таким образом, процесс распространения кластеризации в данном случае также наблюдается, но он сопровождается постепенным «размыванием» исходного образа, а также его вновь возникших копий в других ячейках. Волна кластеризации подвержена действию флуктуаций, обусловленных присутствием случайных начальных условий, иными словами, информационное содержание образа испытывает диссипацию в процессе распространения.

### Заключение

В данной работе рассмотрены модели в виде цепочек, состоящих из подсистем, каждая из которых представляет собой систему глобально связанных отображений и демонстрирует сложную динамику. Показано, что в таких цепочках возможен феномен распространения волны кластеризации, состоящий в том, что образ, записанный первоначально в одной ячейке, в ходе временной эволюции системы формируется и в связанных с ней ячейках. Условием реализации этого феномена является такая структура связи между ячейками, когда связь осуществляется между индивидуальными элементами-партнерами в разных ячейках. Можно ожидать, что обнаруженный феномен окажется полезным для систем, предназначенных для обработки информации, и описания феноменологии сложных моделей нейросетей, исследуемых в контексте проблемы искусственного интеллекта.

*Работа выполнена при поддержке Минпромнауки в рамках договора с ИПФ РАН и гранта РФФИ № 03-02-16074.*

### Библиографический список

1. Итоги науки и техники. Сер. «Физические и математические модели нейронных сетей» / Под ред. А.А. Веденова М.: Изд-во ВИНТИ, 1990-92. Т. 1-5.
2. Коган А.Б. От нейрофизиологии к нейрокибернетике. М.: Наука, 1975. 150 с.
3. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника. М.: Мир, 1992.
4. Hopfield J.J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // Proc. National Academy of Sciences, USA 79, 1982. P. 2554.



5. *Kaneko K.* Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in network of chaotic elements // *Physica D.* 1990. Vol. 41, № 2. P. 137.

6. *Glendenning P.* The stability boundary of synchronized states in globally coupled dynamical systems // *Phys. Lett. A.* 1999. Vol. 259, № 2. P. 129.

7. *Popovich O., Pikovskiy A., Maistrenko Yu.* Cluster-splitting bifurcation in a system of coupled maps // *Physica D.* 2002. Vol. 168. P. 106.

8. *Balmforth N.J., Provenzale A., Sassi R.* A hierarchy of coupled maps // *Chaos.* 2002. Vol. 12, № 3. P. 719.

9. *Розенблатт Ф.* Принципы нейродинамики. Перцептрон и теория механизмов мозга. М.: Мир, 1965. 480 с.

10. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28, № 8. С. 991.

11. *Kook H., Ling F.H., Schmidt G.* Universal behavior of coupled nonlinear systems // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 43, № 6. P. 2700.

12. *Kim S.-Y., Kook H.* Renormalization analysis of two coupled maps // *Phys. Lett. A.* 1993. Vol. 178. P. 258.

13. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.

14. *Kuznetsov S.P.* Universality and scaling in two-dimensional coupled map lattices // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1992. Vol. 2, № 3. P. 281.

*Саратовский государственный  
университет*

*Саратовское отделение Института  
радиотехники и электроника РАН*

*Поступила в редакцию 31.02.03  
после доработки 02.06.03*

## WAVE OF CLUSTERIZATION IN A CHAIN OF COUPLED CELLS EACH OF WHICH IS COMPOSED OF A SET OF GLOBALLY COUPLED ELEMENTS

*A.S. Ivanova, S.P. Kuznetsov*

We study chains of cells each of which is a set of globally coupled elements. Under definite conditions, we observe numerically propagation of a wave of clusterization: an image presented originally in one cell is formed gradually, in a course of evolution in time, also in other cells of the chain.



*Иванова Анна Сергеевна* родилась в 1979 году в Саратове. В 1996 году закончила Лицей Колледжа прикладных наук, в 2001 - факультет нелинейных процессов СГУ. Сейчас является аспиранткой СГУ. Научной работой занимается с первого курса университета. Имеет около 10 публикаций. Область научных интересов - динамика глобально связанных отображений.



*Кузнецов Сергей Петрович* родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений при переходе к хаосу. Опубликовал свыше 150 работ в отечественной и зарубежной научной печати. Автор нескольких оригинальных учебных курсов, прочитанных им в разные годы на кафедрах электроники, радиофизики и факультета нелинейных процессов СГУ. Соросовский профессор (2000, 2001). Член-корреспондент РАЕН. E-mail: [kuz@spkuz.saratov.su](mailto:kuz@spkuz.saratov.su).