



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРОВ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИТУАЦИЯХ С ТРАНСГРАНИЧНЫМИ ПОТОКАМИ

Е.И. Алексеева, И.Г. Медведев

С позиций нелинейной динамики, социальной психологии и социологии исследовано электоральное поведение населения в условиях альтернативных выборов. Построены, описаны и исследованы математические модели механизмов изменения социально-психологической динамики в конкретных этнических очагах, а также вопросы устойчивости в целом применительно к модели с трансграничными потоками. Рассмотрены приложения теории к проблеме оценки ресурсов управления предвыборной кампанией.

Введение

В последнее время все большую актуальность приобретает проблема социальной безопасности общества, государства. При этом социальная безопасность трактуется как уровень реализации жизненных интересов большинства членов общества, как результат взаимодействия угроз с управляемыми воздействиями государства, направленными на их реализацию. Когда государству не удается подавлять различные угрозы обществу, в нем нарастает напряженность в виде различных социальных конфликтов, вплоть до массовых беспорядков или организованных акций протеста. Отсюда тот интерес, который вызывают попытки математического исследования вопросов социальной безопасности или причин и процессов проявления социальной напряженности в обществе.

Настоящая работа является одной из таких попыток применения математического аппарата динамических систем на сетях для анализа некоторых вопросов общей проблемы социальной безопасности. В частности, исследованию подвергнуто электоральное поведение населения как отражение социальной безопасности общества.

События последних лет в мире показывают, что моральный, нравственный, социально-психологический потенциалы становятся факторами, используемыми при прогнозах социально-политической динамики общества или при анализе региональных конфликтов. Если раньше на исторические и политические процессы смотрели как на последовательность бифуркаций в некоторой системе [1], то сейчас возник и альтернативный подход. В рамках этого подхода

предполагается, что в разных состояниях общества (в разных точках фазового пространства) ведущими переменными (параметрами порядка) являются разные величины [2]. Более того, участки простого, предсказуемого на длительный срок поведения (по терминологии [3, 4] - *русла*) чередуются с областями резких, плохо прогнозируемых изменений (областями *джокеров*). Например, изменение социальной ориентации в отдельном регионе, республике, социальной группе, выборы в условиях манипулирования общественным сознанием являются примером такого критического поведения, попадания в область джокера. При этом особое значение при таких манипуляциях приобретает «прозрачность границ», и, как следствие, беспрепятственная миграция населения, давление с помощью военных угроз или прямого насилия, а также свободное движение денежных потоков.

1. Концептуальная модель электорального поведения в отдельном субъекте федерации

Все дееспособное население (условно «электорат») $N0$ - разбивается на три категории: X - сторонники выбранного режимом курса, Y - его противники, Z - не участники политического противостояния, то есть $N0 = X + Y + Z$. Иногда будут для простоты рассматриваться ситуации, когда $Z = 0$ или $Z \gg X, Y$. Таким образом, рост политической апатии - это $Z \rightarrow N0$.

Каждая из введенных групп электората разбивается на четыре категории: A_1 - убежденные носители ценностей выбранной позиции (по данным социальной психологии таких существенно меньшинство - от долей процента до нескольких процентов); A_2 - действующие на стороне A_1 в силу иерархического подчинения или взявшие на себя электоральные обязательства за вознаграждение; A_3 - население, находящееся под воздействием пропаганды, СМИ - таковых от 20 до 40%; A_4 - присоединяющиеся к A_1 , A_2 и A_3 под воздействием механизмов «подражания поведению» и в силу «зараженности настроением», в том числе мобилизующиеся из Z . Таким образом, можно записать общую для X и Y структуру электората:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \quad (1)$$

где $A = X$ или Y . Предполагается также, что каждый из большинства индивидов, за исключением категорий A_1 и A_2 , представляет собой амбивалентную социальную единицу, в которой представлены ценности как сторонников (X), так и противников (Y). Поэтому логично рассматривать не столько «жесткое» деление на сторонников и противников, сколько объемы совершаемых поступков в некоторую единицу времени в пользу X или Y . Предполагается, что в нормальных условиях существует средняя «производительность» этих поступков в защиту той или иной позиции, обозначаемых C_x и C_y , соответственно. Предполагается также, что эта «производительность» одинакова для сторонников как X , так и Y , то есть, что $C_x = C_y = c$. Тогда, очевидно, можно записать итоговый объем «произведенных» поступков в защиту, например X , в виде

$$Q = c(X - Y). \quad (2)$$

В данной работе за основу в модельном описании выбран социально-психологический потенциал (СПП). Введем определение СПП данного социального субъекта или социальной общности, а также его меры. СПП - готовность данного социального субъекта или социальной общности осуществлять поведение в защиту выбранной системы ценностей или направления своего развития. Мера величины СПП - функция от Q и S , где S есть производная от Q по

времени, то есть скорость изменения соотношения между сторонниками и противниками в электорате. В качестве одной из форм записи СПП как функции от Q и S предлагается

$$P = P(Q, S) = \alpha_1 P_1(Q) + \alpha_2 P_2(S) + \alpha_3 P_3(Q, S), \quad (3)$$

где $S = dQ/dt$; $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Уравнения, описывающие в предлагаемой модели поведение переменных Q и S в зависимости от времени, порождаются некоторыми функциональными условиями. Эти функциональные условия в зависимости от разных сценариев развития социально-политических и социально-экономических ситуаций порождают различные классы моделей. Общим условием в этих сценариях мы выбрали постоянство потенциала P

$$dP/dt = [\alpha_1 \partial P_1 / \partial Q + \alpha_3 \partial P_3 / \partial Q] dQ/dt + [\alpha_2 \partial P_2 / \partial S + \alpha_3 \partial P_3 / \partial S] dS/dt = 0. \quad (4)$$

Из соотношения (4) следует система дифференциальных уравнений, описывающая широкий класс моделей:

$$\begin{cases} dQ/dt = \pm [\alpha_2 \partial P_2 / \partial S + \alpha_3 \partial P_3 / \partial S], \\ dS/dt = \mp [\alpha_1 \partial P_1 / \partial Q + \alpha_3 \partial P_3 / \partial Q], \end{cases} \quad (5)$$

где выбор знака правых частей определяется из содержательного анализа механизмов действия социально-психологического потенциала.

В предлагаемой работе мы ограничиваемся достаточно специфическим классом моделей, порождаемым требованиями сохранения максимального значения социально-психологического потенциала P в условиях мобилизации ничем не ограничиваемых ресурсов для его поддержания (в некотором определенном регионе). Предполагается, что в формуле (3) $\alpha_3 = 0$, а потенциалы P_1 и P_2 имеют определенное функциональное выражение. Тогда формула (4) преобразуется следующим образом:

$$dP/dt = \alpha_1 (\partial P / \partial Q) (dQ/dt) + \alpha_2 (\partial P / \partial S) (dS/dt) = 0, \quad (6)$$

а система (5) принимает вид

$$\begin{cases} dQ/dt = -\alpha_2 (\partial P / \partial S), \\ dS/dt = \alpha_1 (\partial P / \partial Q). \end{cases} \quad (7)$$

Выбирая определенные функциональные зависимости для потенциала, характеризующего поведение электората (см. [5,6]), получаем

$$\begin{cases} dQ/dt = 2\chi_1 S - (2\chi_2 + Q_0)S^3 - (2\chi_2 - Q_0)S^5, \\ dS/dt = -\chi_1 Q_0 \gamma + \chi_1 \gamma^2 Q. \end{cases} \quad (8)$$

причем χ_1 , χ_2 , Q_0 , γ - коэффициенты привязки значений данных функций к эмпирически установленным функциональным зависимостям в законах Вебера - Фехнера, Бугера - Вебера и Стивенса [7 - 9].

Согласно определению (см., например, [10]), система (7) является консервативной. Нетрудно видеть, что множество особых точек $\{(S^*, Q^*)\}$ системы (7) всегда конечно. Оно может быть представлено в координатной форме - см. Таблицу, где по строкам расположены координаты Q , по столбцам - координаты S , $u^* = [-2\chi_2 - Q_0 + (20\chi_2^2 - 4\chi_2 Q_0 + Q_0^2)^{1/2}] / [2(2\chi_2 - Q_0)]$. Из свойств консерватив-

ности исходной системы (7), а также из симметрии системы (8) по S вытекает, что в фазовом портрете системы (8) возможны простые состояния равновесия типа центра и седла, а замкнутые траектории, соответствующие периодическим решениям этой системы, не являются изолированными, а заполняют целые области [10]. Типы поведения траекторий вблизи особых точек легко устанавливаются из структуры таблицы.

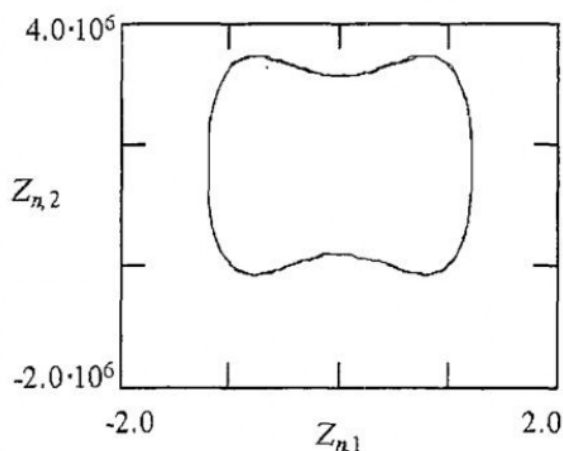


Рис. 1. Фазовый портрет поведения электората в координатах $Q=Z_{n,1}$ и $S=Z_{n,2}$ для отдельного региона

блания возможного исхода «голосования» (рис. 1.). В дальнейшем будем называть эти центры точками потенциального выбора (для конкретного региона).

На этом типичном фазовом портрете для поведения переменных S и Q , определяющих СПП электората отдельного очага, характерно «сшивание» фазовых портретов в центрах, имеющее достаточно прозрачное истолкование. Во-первых, будем все время иметь в виду, что двухкомпонентный СПП в нашей модели является инвариантом. Во-вторых, свяжем особые точки справа и слева от 0 по оси абсцисс с экстремальными значениями для $P_2(S)$ при $S = \pm (y^*)^{1/2}$. Пусть точка на фазовой траектории находится в самом «верхнем левом» положении второго квадранта. Это состояние означает максимальную скорость снижения перевеса cX над cY (см. (5)), то есть уменьшение $P_1(Q)$ при росте $P_2(S)$, или возрастание S из отрицательной области до положительных значений. Но переход S в область положительных значений означает новое возрастание Q , что с неизбежностью ведет к росту $P_1(Q)$ и соответствующему снижению $P_2(S)$. Однако это снижение начинается при прохождении фазовой траекторией верхнего правого положения, что соответствует началу убывания $P_2(S)$. Это, в свою очередь, ведет к уменьшению как $P_1(Q)$, так и Q при возвратном движении S к 0, что означает переход точки фазовой траектории на свой нижний след, который симметрично повторяет все «верхние» движения и тем самым замыкает фазовую траекторию.

Таблица

$S \backslash Q$	$-(y^*)^{1/2}$	0	$(y^*)^{1/2}$
Q_0/γ	3-я	2-я	1-я

Из содержательного анализа следует, что только 1-я точка (лежащая в первом квадранте) является существенной в данном контексте. Таким образом, для рассматриваемого класса моделей характерно периодическое поведение переменных Q и S в окрестности особых точек (центров), около которых при постоянстве СПП происходят колебания

2. Влияние миграционных процессов в системе взаимодействующих социально-территориальных общностей на характеристики электорального поведения

Представленная выше модель социальной системы (5) описывает поведение социальных переменных Q и S для отдельно выбранной территориальной общности (очага). Как правило, территориальные общности в социально-эконо-

мической действительности не только граничат между собой, но и обмениваются как материальными, так и миграционными потоками. Потоки представляют собой как собственно миграцию, приводящую к изменениям в численном балансе между сторонниками и противниками, так и политическое влияние, выражающееся в возможности «открепительного» голосования и в прямой «покупке» голосов избирателей. Проблемной ситуацией в данном контексте является критическое влияние обозначенных выше факторов - их мы в контексте данной работы назовем трансграничными потоками - на устойчивость социально-экономических и социально-психологических процессов как в отдельных очагах, так и в системе в целом.

Эффективный алгоритм для исследования влияния потоков между связанными очагами на устойчивость как отдельных очагов, так и системы в целом, был разработан в рамках теории динамических систем на сетях (см., например, [11, 12]).

С учетом трансграничных потоков исследуемая динамическая система может быть записана в виде

$$\begin{aligned} dQ_i/dt &= F_i(Q_i, S_i, \Theta) = \pm(\alpha_2 \partial P_{2i} / \partial S_i + \alpha_3 \partial P_{3i} / \partial S_i) - c_{ii} Q_i + \sum_{i \neq j} c_{ij} Q_j, \\ dS_i/dt &= G_i(Q_i, S_i, \Theta) = \mp(\alpha_1 \partial P_{1i} / \partial Q_i + \alpha_3 \partial P_{3i} / \partial Q_i), \end{aligned} \quad (9)$$

где c_{ij} обозначают интенсивности потоков из очага j в i ; c_{ii} равно интенсивности суммарного потока из i -го очага во все остальные; $i, j = 1, \dots, N$, N - количество очагов; Θ_i - набор «внутренних» параметров, соответствующих i -му очагу.

Пусть (Q_i^*, S_i^*) - координаты 1-й особой точки i -го очага (см. таблицу), являющейся, как было показано в п. 1, центром, и соответствующей точке потенциального выбора для i -го очага.

В предположении малости параметров миграции c_{ij} критерий стабилизации системы связанных очагов записывается в следующей форме (см. [11]):

$$\Omega_i (c_{ii} Q_i^* - \sum_{k=1, k \neq i}^N c_{ik} Q_k^*) - \Delta_i c_{ii} < 0, \quad i=1, \dots, N, \quad (10)$$

где Δ_i - определитель матрицы Якоби в особой точке (Q_i^*, S_i^*) ; Ω_i - скобка Пуассона в точке (Q_i^*, S_i^*)

$$\Omega_i = [\sigma_i, G_i](Q_i^*, S_i^*, \Theta_i),$$

σ_i - след указанного Якобиана.

Согласно теории, в зависимости от соотношения локальных характеристик каждый из очагов можно отнести к одному из трех введенных типов: регулярному, субдоминантному и супердоминантному [11]. Регулярный очаг характеризуется тем, что при любых ненулевых миграционных потоках переходит в область устойчивости параметрического пространства. Субдоминантный очаг становится устойчивым при превышении притока над оттоком, и супердоминантный - при превышении оттока над притоком. Таким образом, зная внутреннее состояние каждого из очагов, мы получаем средство (алгоритм, программу) для отслеживания влияния обобщенных миграционных потоков на исход «голосования», а также реальный компонент технологии воздействия на этот исход.

Актуальный интерес представляет выяснение вопроса об изменении социально-психологического потенциала на фоне медленно меняющейся социально-экономической ситуации в отдельных регионах. Как было упомянуто в

предыдущем параграфе, при таких ограничениях для описания локального очага мы выбрали для исследования систему уравнений (8). В этом случае каждая рассматриваемая точка (центр) потенциального выбора всегда соответствует случаю нейтрального равновесия (след матрицы Якоби в соответствующем центре равен нулю). Нетрудно видеть, что критерий (10) будет выполнен при любых (малых) параметрах миграции для любого количества связанных очагов. Другими словами, вне зависимости от внутренних параметров, характеризующих локальное состояние каждого из очагов, описываемых системой вида (7), появление миграции неизбежно приводит к сдвигу рассматриваемой точки потенциального выбора в область устойчивости параметрического пространства. Таким образом, всякое межочаговое взаимодействие электоратов, динамика которых отвечает выписанным выше условиям, приводит к обязательному снижению неопределенности электорального выбора.

3. Миграция в системе двух регионов

Рассматривается система (9) с локальными очагами вида (8), причем количество очагов равно двум. Рассматривались случаи, когда параметры обмена не только малые, но и большие, а также случаи, когда траектории стартовали вдали от локального равновесия.

Так, был рассмотрен ряд ситуаций, где в роли очагов выступали конкретные республиканские электораты. Для иллюстрации среди них были выбраны достаточно типичные варианты. Компьютерное моделирование было проведено с использованием пакета Mathcad 7.0 PRO. Как правило, во всех приведенных ниже примерах стартовые значения выбирались в первом квадранте (см. таблицу). При этом, учитывая особенности фазовых портретов исходных систем (наличие центров и седловых точек), переменная Q оставалась положительной, а переменная S изменяла знак, что не противоречит логике колебаний активности электората.

Выше (рис. 1) приведен фазовый портрет, качественно характеризующий поведение отдельного очага в интересующей области параметров. На рис. 2 показана соответствующая интегральная кривая, представляющая периодические колебания «перевеса» в численности сторонников позиции X над противниками Y (см. формулу (2), где выражен очевидный смысл переменной Q).

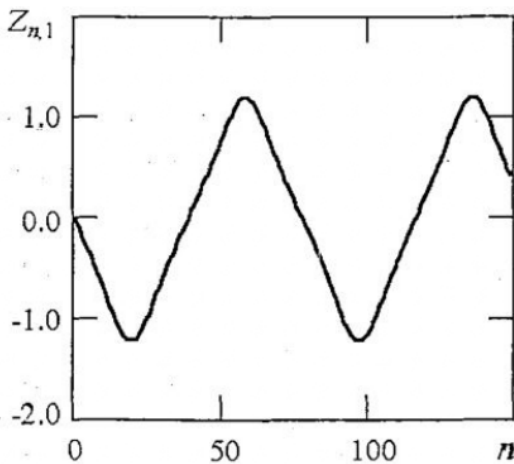


Рис. 2. Зависимость численности перевеса сторонников позиции X над Y от времени. По оси ординат отложены значения Q , по оси абсцисс время - в днях

Далее моделировалось взаимодействие двух очагов. Фазовое пространство в этом случае четырехмерно и состоит из точек с координатами (Q_1, S_1, Q_2, S_2) - см. уравнение (9) при $i = 2$. Результаты моделирования показаны на рис. 3, 4. Из приведенных качественных фазовых портретов следует вывод о стабилизирующем воздействии межэлекторальных потоков на исход электорального выбора. Иными словами, при наличии ненулевых констант обмена (параметров p и q , что соответствует c_{ij} в (10) при $N=2$) на соответствующих интегральных кривых быстрее происходит затухание со временем амплитуды колебаний позиций

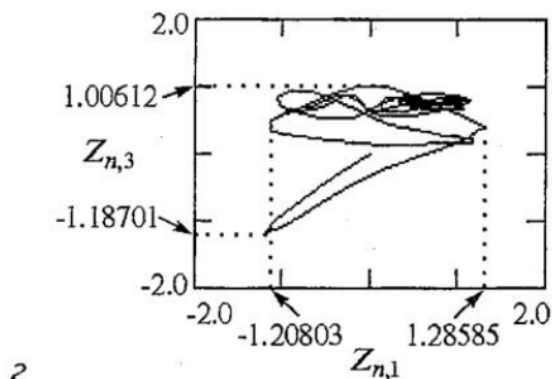
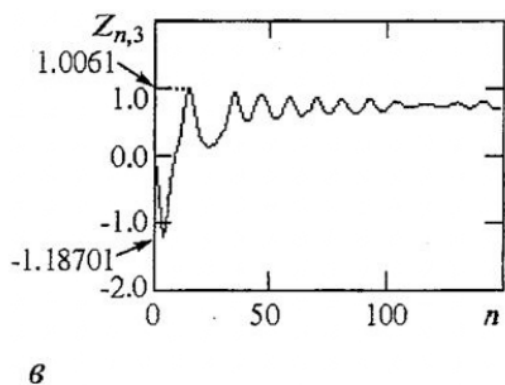
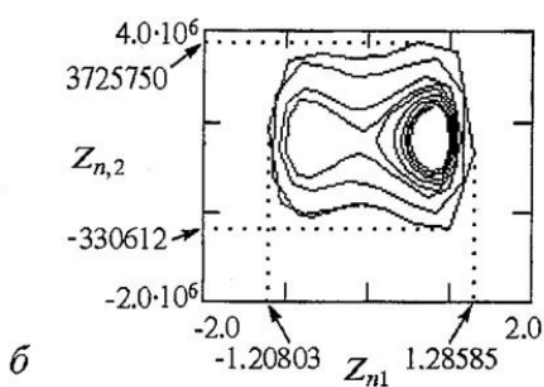
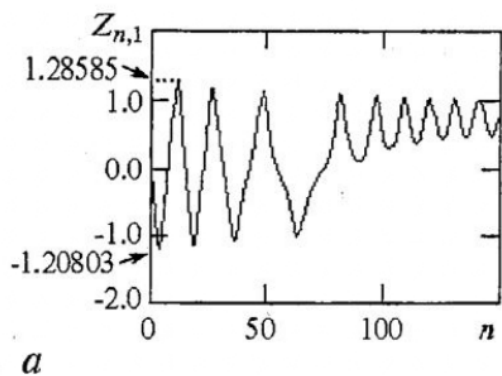


Рис. 3: *a* - Интегральная кривая $Q_1(n)$, соответствующая 1-му региону. *б* - Проекция фазовой кривой в 4-мерном пространстве на плоскость (Q_1, S_1) , соответствующая 1-му региону. *в* - Интегральная кривая $Q_2(n)$, соответствующая 2-му региону. *г* - Проекция фазовой кривой в 4-мерном пространстве на плоскость (Q_1, Q_2)

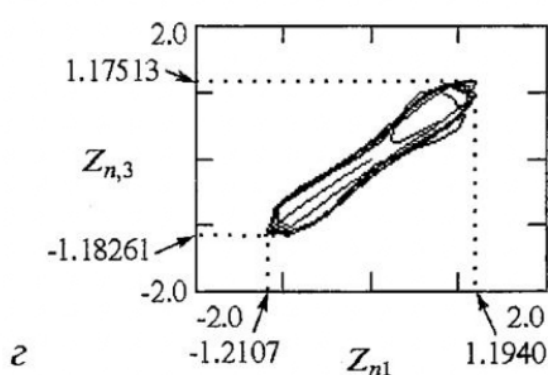
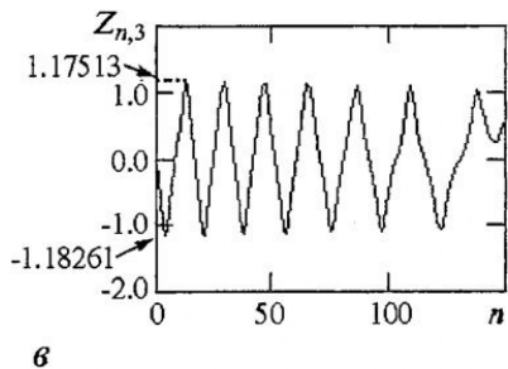
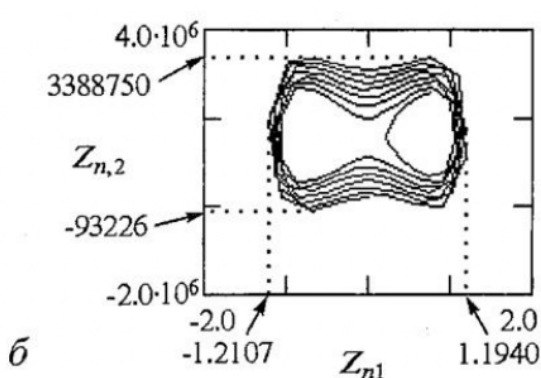
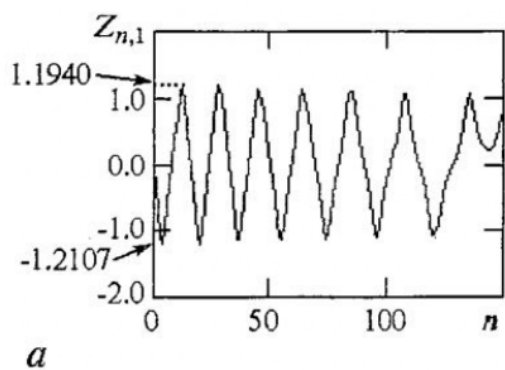


Рис. 4: *a* - Интегральная кривая $Q_1(n)$, соответствующая 1-му региону. *б* - Проекция фазовой кривой в 4-мерном пространстве на плоскость (Q_1, S_1) , соответствующая 1-му региону. *в* - Интегральная кривая $Q_2(n)$, соответствующая 2-му региону. *г* - Проекция фазовой кривой в 4-мерном пространстве на плоскость (Q_1, Q_2)

электората (ср. рис. 3, а и 4, а, 3, с и 4, с с рис. 2). При этом на соответствующих проекциях фазовых кривых происходит «сжимание» областей притяжения (рис. 3, б, г и 4, б, г).

На рис. 3 показаны результаты моделирования двух взаимодействующих очагов со следующими параметрами обмена: $p=0.3$; $q=0.8$. Остальные константы, при которых осуществлялось объединение двух электоратов: $\gamma_1=0.1811$; $\gamma_2=0.181$; $Q_{0,1}=0.3 \cdot 10^6$; $Q_{0,2}=0.3 \cdot 10^6$; $\chi_1=0.0001$; $\chi_2=0.005 \cdot 10^9$.

Далее (рис. 4) моделировались 2 очага с равными трансграничными потоками: $p=0.55$, $q=0.55$. Остальные параметры те же, что и для рис. 3.

Компьютерные исследования различных вариантов обмена приводят к заключению, которое не противоречит выводам, сделанным в п.2, а именно: и при большой интенсивности обмена голосов сторонников и противников между регионами поведение электората выходит на более устойчивую определенность в выражении своей позиции при наличии ненулевых трансграничных потоков.

Выводы: в приведенном материале с помощью математического моделирования получены результаты, демонстрирующие влияние трансграничных потоков между регионами на электоральное поведение населения. Тем самым продемонстрировано, что структура и интенсивность трансграничных потоков могут приводить к качественным изменениям в поведении системы в целом - к бифуркациям, даже на фоне сохранения локальной динамики поведения в очагах. Этот результат представляет большой интерес, так как он демонстрирует принципиальную возможность управления процессом снижения социальной напряженности с помощью формирования и регулирования интенсивности трансграничных потоков между регионами.

Библиографический список

1. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979.
2. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Наука, 1997.
3. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Руслы и джокеры: нейросетевой взгляд на сложную динамику // Прикладная нелинейная динамика, 1998, Т. 6, №4.
4. Малинецкий Г.Г. «Историческая механика» и нелинейная динамика // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, №4.
5. Чернавский Д.С. Синергетика и информация. М.: Наука, 2001 (в печати).
6. Шведовский В.А. О возникновении случайных флуктуаций в модели подражательного поведения // В сб. Вопросы моделирования социально-экономических объектов. М: ЦЭМИ АН СССР, 1978. С. 87.
7. Психологические измерения. Под ред. Л.Д. Мешалкина. М.: Мир, 1967. С. 195.
8. Психофизика дискретных и непрерывных задач / Под ред. Ю.М. Забродина и А.П. Пахомова. М.: Наука, 1985. С. 214.
9. Бурдые П. Социология политики. М.: Socio-Logos, 1993. С. 333.
10. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.
11. Алексеева Е.И., Киржнер В.М. Зависимость устойчивости набора динамических систем от структуры связи между ними // Доклады АН СССР. 1990. Т.313, № 3. С. 521.
12. Алексеева Е.И., Киржнер В.М., Кузнецов В.А. Структуры и коллективное поведение. М.: Знание, Математика и кибернетика. 1991. № 3.

MATHEMATICAL MODEL OF ELECTION UNDER EXTREME CONDITIONS WITH TRANSBORDER FLOWS

E.I. Alekseeva, I.G. Medvedev

The electoral behavior of population under condition of alternative election is investigated from the point of view of nonlinear dynamics, social psychology and sociology. Mathematical models of mechanisms of socio-psychological dynamics have been described and analyzed for the concrete local ethnic region. Also the problem of stability as a whole of the model with transborder flows has been evaluated. Some applications of the theory to the estimation of the resources of social security control have been considered.



Алексеева Елена Игоревна - окончила с отличием механико-математический факультет МГУ (1980). Окончила аспирантуру Отделения математики под руководством И.М. Гельфанда, защитила кандидатскую диссертацию (1989). С 1985 года работает научным сотрудником в Вычислительном Центре РАН. Лауреат премии Сороса. В 2000 г. получила Диплом MBA (Master of Business Administration) международного образца.

Основные направления научной деятельности: нелинейный анализ, теория бифуркаций, динамические системы на сетях, приложения в биофизике, экономике, социологии.



Медведев Игорь Георгиевич - окончил Харьковский политехнический институт им. В.И. Ленина (1956). Защитил кандидатскую диссертацию (1975). С 1999 года исполняет обязанности директора Центра компьютерного моделирования и экспертного анализа при Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Имеет более 150 научных работ.

Основные направления научной деятельности: системный анализ, теория управления, разработка систем принятия решений, компьютерное моделирование.