



## **СОПРЯЖЕННЫЕ РЕЗОНАНСЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ ДВУЧАСТОТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ. ВИБРОИНДУЦИРОВАННЫЕ БИФУРКАЦИИ**

*И.И. Блехман, П.С. Ланда*

На примере бистабильного осциллятора, описываемого уравнением Дуффинга, рассматриваются резонансы при возбуждении бигармонической внешней силой с существенно различающимися частотами. Показано, что эти резонансы являются сопряженными: они возникают как при изменении низкой частоты, так и при изменении высокой. Резонансы имеют место также при изменении амплитуды высокочастотного возмущения. Кроме того показано, что высокочастотное воздействие индуцирует бифуркацию изменения числа устойчивых состояний в системе, причем кажущийся резонанс в так называемом передемпфированном осцилляторе обусловлен именно этой бифуркацией.

В работе [1] численно было показано, что высокочастотное воздействие на бистабильную систему существенно изменяет ее свойства, приводя к появлению своеобразных «резонансов» даже в передемпфированной системе, где никаких резонансов вообще быть не должно. Такие резонансы получили название вибрационных. По своей природе они подобны широко известному стохастическому резонансу (см., например, [2]), где роль высокочастотного воздействия играет шум. Появление таких резонансов обусловлено не совпадением частоты сигнала с частотой флуктуационных переходов из одного устойчивого состояния в другое, как до сих пор предполагается многими исследователями [2], а изменением эффективной жесткости системы [3].

В настоящей работе указанные эффекты исследуются теоретически путем использования метода прямого разделения движений и подхода вибрационной механики [4]. С точки зрения такого подхода рассматриваемые эффекты являются частным проявлением общего свойства нелинейных систем, заключающегося в том, что высокочастотное воздействие может значительно изменять их реакцию на медленные воздействия. Показано, что теоретические результаты находятся в хорошем согласии с результатами численного счета, заимствованными из работы [1].

# 1. Вибрационные резонансы в бистабильном осцилляторе с малым затуханием

Рассмотрим простейший бистабильный осциллятор, описываемый уравнением Дуффинга

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} - x + x^3 = A\cos\omega t + C\cos(\Omega t + \theta), \quad (1)$$

где  $A\cos\omega t$  - низкочастотный сигнал;  $C\cos(\Omega t + \theta)$  - высокочастотное воздействие;  $A, C, \delta, \omega, \Omega$  - постоянные величины.

Двухчастотное воздействие на слабо нелинейный осциллятор рассматривалось в значительном числе работ; сошлемся, в частности, на [5, 6, 7]. Однако изучаемые здесь эффекты в этих работах не были обнаружены.

Как уже отмечалось, в данной работе мы воспользуемся для решения уравнения (1) методом прямого разделения движений [4]. Согласно этому методу при  $\Omega \gg 1$  решение уравнения (1) разыскивается в форме

$$x = X(t) + \Psi(t, \Omega t), \quad (2)$$

где  $X(t)$  - переменная, описывающая медленное движение, а  $\Psi(t, \Omega t)$  -  $2\pi$ -периодическая функция быстрого времени  $\tau = \Omega t$  с нулевым средним значением по этому аргументу, то есть

$$\overline{\Psi(t, \tau)} = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} \Psi(t, \tau) d\tau = 0. \quad (3)$$

Здесь черта сверху означает усреднение за период  $2\pi$  по аргументу  $\tau = \Omega t$ .

Принимая во внимание (3), для функций  $X(t)$  и  $\Psi(t, \Omega t)$  получаем следующую систему уравнений:

$$\ddot{X} + 2\delta\dot{X} - X + X^3 + 3\overline{\Psi^2}X + \overline{\Psi^3} = A\cos\omega t, \quad (4)$$

$$\ddot{\Psi} + 2\delta\dot{\Psi} - \Psi + 3X^2(\Psi - \overline{\Psi}) + 3X(\Psi^2 - \overline{\Psi^2}) + \Psi^3 - \overline{\Psi^3} = C\cos(\Omega t + \theta). \quad (5)$$

Уравнение быстрых движений (5) можно решать приближенно, не внося существенной погрешности в решение уравнения (4) для медленных движений. Здесь при решении этого уравнения мы ограничимся так называемым чисто инерционным приближением [4], которое справедливо при  $\Omega \gg 1$ . В этом приближении всеми членами в левой части уравнения (5), кроме первого, можно пренебречь. Тогда периодическое решение этого уравнения будет иметь вид

$$\Psi = -(C/\Omega^2)\cos(\Omega t + \theta). \quad (6)$$

Следует отметить, что решение (6) может значительно отличаться от точного. Тем не менее, оно позволяет получить как качественную, так и довольно близкую количественную картины исследуемого явления.

Подставив (6) в уравнение (4), получим следующее приближенное уравнение медленных движений:

$$\ddot{X} + 2\delta\dot{X} + [3/2(C/\Omega^2)^2 - 1]X + X^3 = A\cos\omega t. \quad (7)$$

Уравнение (7) позволяет найти новые положения равновесия системы, относительно которых совершаются медленные колебания. При

$$3/2(C/\Omega^2)^2 < 1 \quad (8)$$

система имеет два таких положения равновесия

$$X_{1,2} = \pm [1 - \frac{3}{2} (C/\Omega^2)^2]^{1/2}, \quad (9)$$

а при

$$\frac{3}{2} (C/\Omega^2)^2 > 1 \quad (10)$$

- только одно  $X=0$ . Таким образом, высокочастотные колебания индуцируют в системе бифуркацию, состоящую в уменьшении числа устойчивых состояний равновесия с двух до одного.

Вначале предположим, что выполняется условие (8), и запишем уравнение для отклонения от одного из положений равновесия  $X_{1,2}$ . Вводим переменную  $Y = X - X_{1,2}$  и получаем следующее уравнение для  $Y$ :

$$\ddot{Y} + 2\delta\dot{Y} + 2[1 - \frac{3}{2} (C/\Omega^2)^2]Y + Y^3 + 3X_{1,2}Y^2 = A\cos\omega t. \quad (11)$$

Отсюда видно, что резонансная частота системы

$$\omega_r = \omega_{r1} = \{2[1 - \frac{3}{2} (C/\Omega^2)^2]\}^{1/2} \quad (12)$$

при увеличении амплитуды  $C$  от 0 до значения  $C_0 = (\frac{2}{3})^{1/2}\Omega^2$  должна уменьшаться по параболическому закону от значения  $(2)^{1/2}$  до 0. Наоборот, при выполнении условия (10) резонансная частота

$$\omega_r = \omega_{r2} = [\frac{3}{2} (C/\Omega^2)^2 - 1]^{1/2}. \quad (13)$$

должна увеличиваться с ростом амплитуды  $C$  от значения  $C_0$ . Зависимость резонансной частоты от  $C$ , вычисленная по приведенным выше формулам для  $\Omega = 9.842$ , и соответствующая зависимость, найденная из результатов численного счета, показаны на рис. 1. Видно, что эти зависимости довольно близки, за исключением того, что численная зависимость не достигает нуля.

Рассчитаем теперь резонансные кривые, исходя из уравнений (11) (для  $C < C_0$ ) и (7) (для  $C > C_0$ ) в пренебрежении нелинейными членами, и сравним их с соответствующими кривыми, найденными численно. Обозначив отношение амплитуды медленных колебаний системы к амплитуде низкочастотной составляющей внешней силы  $A$  через  $Q$ , а сдвиг фаз между колебаниями через  $\psi$ , найдем

$$Q = 1/[(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]^{1/2}, \quad \psi = -\arctan[2\delta\omega/(\omega_r^2 - \omega^2)], \quad (14)$$

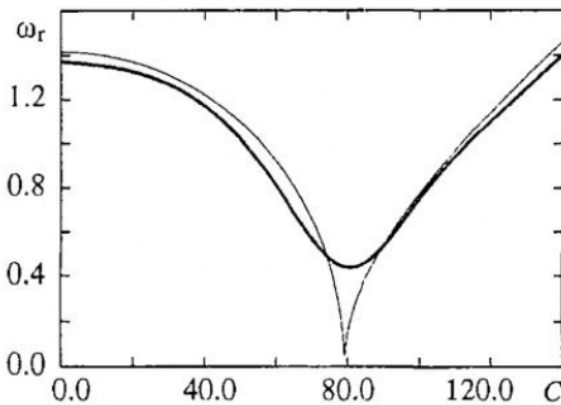


Рис. 1. Зависимость резонансной частоты  $\omega_r$  от  $C$ , вычисленная теоретически для  $\Omega = 9.842$  (тонкие линии) и найденная из результатов численного счета (жирная линия)

где  $\omega_r$  определяется выражениями (12), (13), соответственно. Графики  $Q(\omega)$  и  $\psi(\omega)$ , а также соответствующие зависимости, найденные численно, приведены на рис. 2 для ряда значений амплитуды  $C$ . Из рисунка видно, что вдали от точки бифуркации  $C = C_0$  совпадение теоретических и численных результатов довольно хорошее; только при  $C$ , близком к  $C_0$ , отличия получаются весьма значительными.

Вместе с тем имеется и одно существенное отличие между теоретическими и численными результатами. Численный счет показывает, что при  $C < C_0$  система является мягкой, то есть

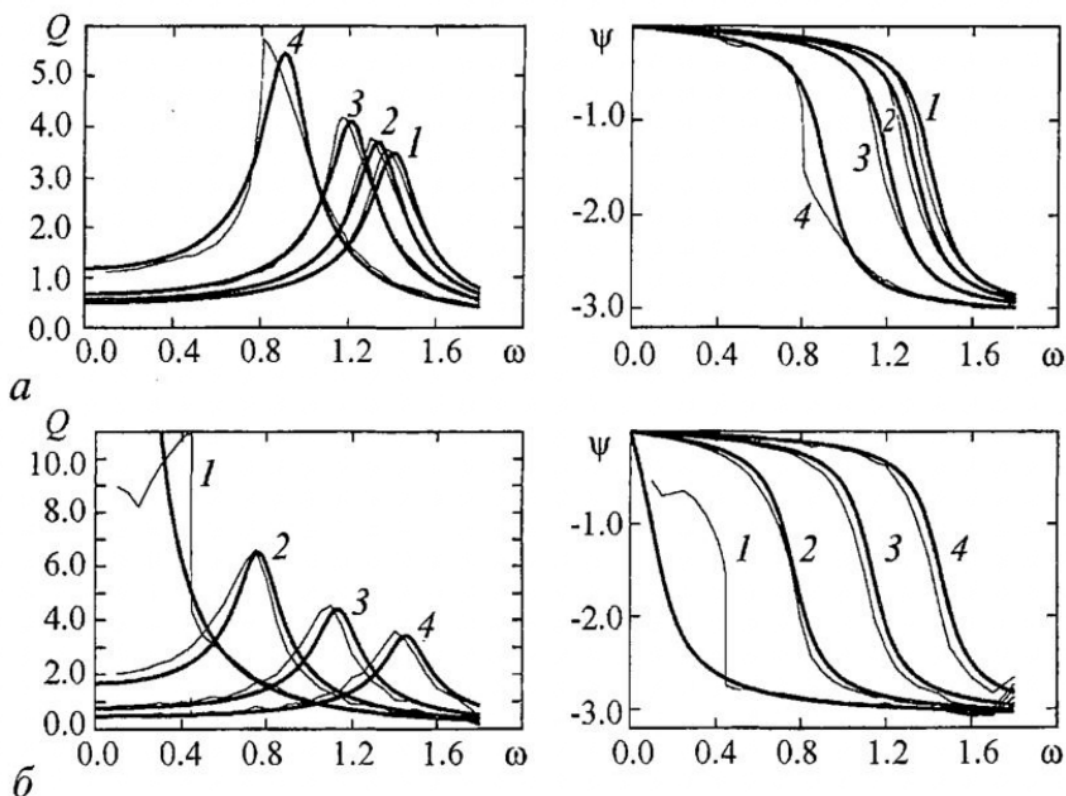


Рис. 2. Зависимости  $Q(\omega)$  и  $\psi(\omega)$ , вычисленные из уравнений (7), (11) и найденные численно для  $\delta = 0.1$ ,  $\Omega = 9.842$ ,  $A = 0.05$ : а -  $C = 0$ ,  $C = 25$ ,  $C = 40$ ,  $C = 60$  (кривые 1, 2, 3 и 4, соответственно); б -  $C = 80$ ,  $C = 100$ ,  $C = 120$ ,  $C = 140$  (кривые 1, 2, 3 и 4, соответственно)

ее резонансная частота уменьшается с ростом амплитуды, тогда как при  $C > C_0$  система становится жесткой, то есть ее резонансная частота увеличивается с ростом амплитуды. Из теории же следует, что система всегда является жесткой.

Как видно из уравнений (11) и (7), резонанс существует не только при изменении низкой частоты при фиксированной высокой, но и при изменении высокой частоты при фиксированной низкой. Эти два типа резонансов мы называем *сопряженными*. Кроме того, резонанс возникает и при изменении амплитуды высокочастотного воздействия при фиксированных значениях низкой и высокой частоты. Примеры таких резонансов рассмотрены ниже. Следует отметить, что резонансы при изменении высокой частоты не были замечены при численном счете в работе [1], поскольку не было известно, что они должны существовать (подобного эффекта при стохастическом резонансе не существует). Однако после получения теоретических результатов стало ясно, что они должны иметь место.

Зависимости  $Q(C)$  и  $\psi(C)$  при  $\Omega = 9.842$ , двух значениях  $\omega$  и нескольких значениях амплитуды  $A$ , найденные численно, показаны на рис. 3 тонкими линиями. Эти зависимости сравниваются с теоретическими, найденными в линейном приближении по  $A$ . Видно, что теория для обоих значений  $\omega$  дает два резонанса, которые тем больше разделены, чем больше  $\omega$ . Численные же расчеты показывают, что при  $\omega = 0.5$  и не очень малых  $A$  эти резонансы сливаются, причем нелинейные эффекты проявляются очень сильно. При  $\omega = 1.0$  как теория, так и численные расчеты, дают два резонанса.

Аналогичные результаты получаются и при изменении частоты  $\Omega$  при фиксированном значении  $C$ , если только  $C$  не очень мало. При  $C = 40$  и двух значениях  $\omega$  ( $\omega = 0.5$  и  $\omega = 1.0$ ) эти результаты приведены на рис. 4. Для простоты здесь показаны результаты численных расчетов только для  $A = 0.025$ , которые и сравниваются с теоретическими. Видно, что при  $\omega = 1.0$  теоретические и численные

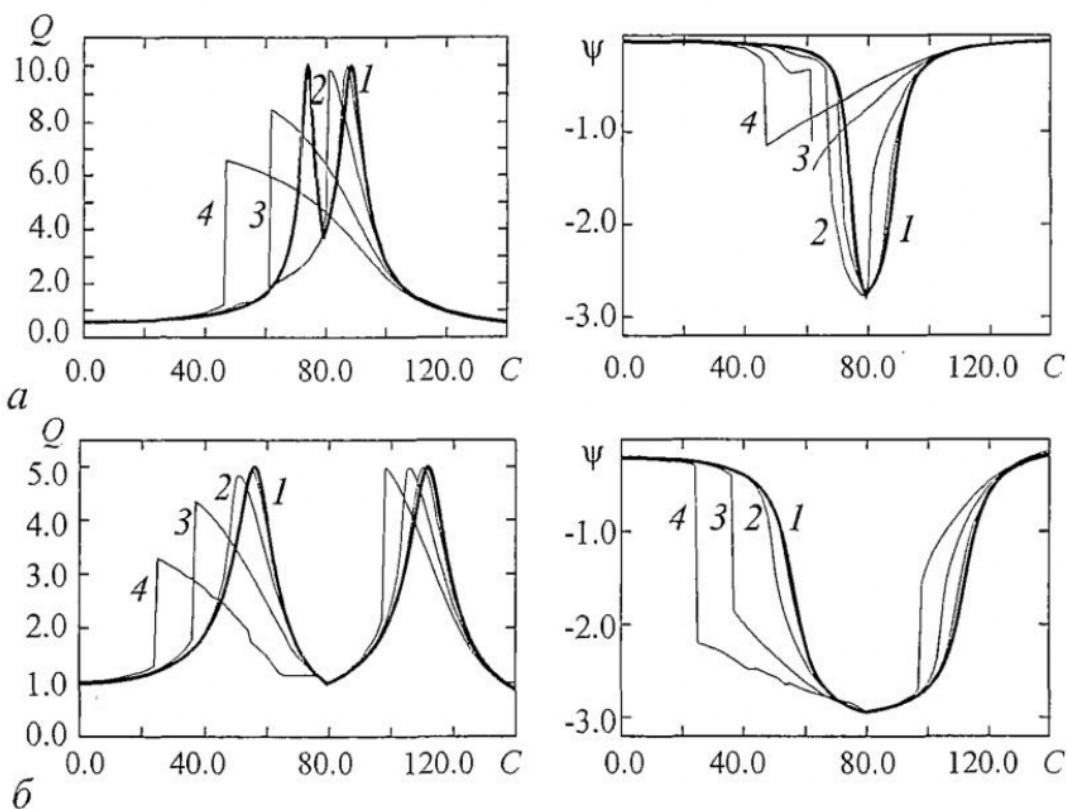


Рис. 3. Зависимости  $Q(C)$  и  $\psi(C)$ , вычисленные из уравнений (7), (11) и найденные численно для  $\delta=0.1$ ,  $\Omega=9.842$ ,  $\omega=0.5$  (а) и  $\omega=1.0$  (б); кривые 1 соответствуют  $A=0.025$ , 2 - 0.05, 3 - 0.1 и 4 - 0.15

результаты согласуются очень хорошо, тогда как при  $\omega=0.5$  имеются заметные различия.

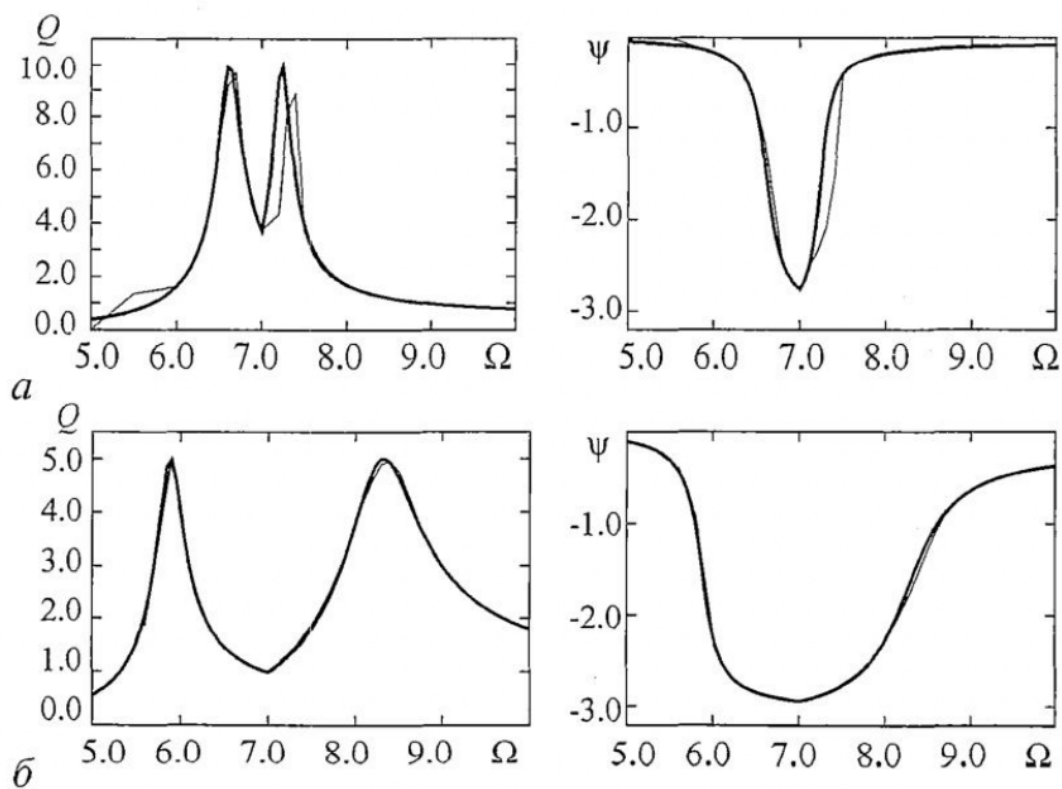


Рис. 4. Зависимости  $Q(\Omega)$  и  $\psi(\Omega)$ , вычисленные из уравнений (7), (11) и найденные численно для  $\delta=0.1$ ,  $A=0.025$ ,  $\omega=0.5$  (а) и  $\omega=1.0$  (б)



## 2. Вибрационные резонансы в передемпфированном бистабильном осцилляторе

Рассмотрим далее эффект кажущегося резонанса в передемпфированном бистабильном осцилляторе, описываемом уравнением

$$\dot{x} - x + x^3 = A \cos \omega t + C \cos (\Omega t + \theta), \quad (15)$$

где  $\Omega \gg \omega$ . Численные результаты для этого уравнения, как и для рассмотренного выше, взяты из [1].

Используя тот же метод, что и выше, получаем следующие уравнения для быстрых и медленных движений:

$$\dot{X} - X + X^3 + 3\bar{\Psi}^2 X + \bar{\Psi}^3 = A \cos \omega t, \quad (16)$$

$$\dot{\Psi} - \Psi + 3X^2(\Psi - \bar{\Psi}) + 3X(\Psi^2 - \bar{\Psi}^2) + \Psi^3 - \bar{\Psi}^3 = C \cos (\Omega t + \theta). \quad (17)$$

Из уравнения (17) аналогично предыдущему находим следующее приближенное решение:

$$\Psi \approx (C/\Omega) \sin (\Omega t + \theta). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16), получаем уравнение медленных движений

$$\dot{X} + k_1 X + X^3 = A \cos \omega t, \quad (19)$$

где

$$k_1 = 3C^2/(2\Omega^2) - 1 \quad (20)$$

- эффективная жесткость. Здесь, как и в первом случае, следует рассматривать по отдельности значения  $C$ , большие и меньшие бифуркационного значения  $C=C_1$ , где  $C_1=(2/3)^{1/2}\Omega$ . При  $C>C_1$  колебания происходят относительно положения равновесия  $X=0$ , и их можно описывать уравнением (19). При  $C<C_1$  колебания происходят относительно одного из положений равновесия  $X=\pm X_0$ , где  $X_0=(-k_1)^{1/2}$ . В этом случае следует ввести переменную  $Y=X\mp X_0$ , уравнение для которой имеет вид

$$\dot{Y} + k_2 Y + 3X_0 Y^2 + Y^3 = A \cos \omega t, \quad (21)$$

где

$$k_2 = 2[1 - 3C^2/(2\Omega^2)]. \quad (22)$$

Решение уравнений (19), (21) показывает, что, как и следовало ожидать, резонанса при изменении низкой частоты нет: амплитуда колебаний монотонно убывает с ростом частоты. Однако при изменении высокой частоты  $\Omega$  или амплитуды высокочастотных колебаний  $C$  амплитуда низкочастотных колебаний изменяется немонотонно. Ее изменение имеет характер резонансной кривой с максимумом в точке бифуркации, где изменяется характер зависимости эффективной жесткости от амплитуды высокочастотных колебаний: до точки бифуркации эффективная жесткость убывает с ростом этой амплитуды, а после точки бифуркации - растет. Это продемонстрировано на рис. 5, где показаны зависимости относительной амплитуды низкочастотных колебаний  $Q$  и сдвига фаз  $\psi$  от  $C/\Omega$  при  $\omega=0.1$ , вычисленные теоретически из уравнений (19), (21) в линейном приближении и найденные численно для разных значений амплитуд. Видно, что точки «резонанса» в теоретических и численных расчетах для малых амплитуд приблизительно совпадают, однако ширина резонансной кривой и зависимость сдвига фаз существенно отличаются. Несмотря на указанное отличие, приведенная теория позволяет понять механизм наблюдаемой резонансной зависимости: максимум

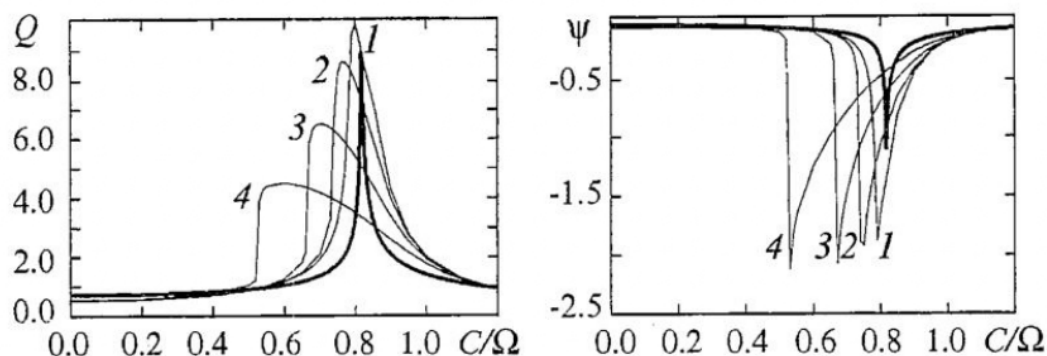


Рис. 5. Зависимости  $Q(C/\Omega)$  и  $\psi(C/\Omega)$ , вычисленные из уравнений (19), (21) (жирные линии) и найденные численно (тонкие линии) для  $\omega=0.1$ ,  $A=0.025$  (кривая 1),  $A=0.05$  (кривая 2),  $A=0.1$  (кривая 3) и  $A=0.2$  (кривая 4)

кривой определяется наличием точки бифуркации, где эффективная жесткость имеет наименьшее (теоретически - нулевое) значение.

Следует отметить, что, как показано в [3], механизм стохастического резонанса в передемпфированном осцилляторе тот же самый: при изменении интенсивности шума в системе изменяется эффективная жесткость, которая при некотором значении интенсивности имеет минимум.

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант 01-01-00227) и в рамках Комплексной программы 19 Президиума РАН (проект 1.4).*

## Библиографический список

1. Landa P.S., McClintock P.V.E. Vibrational resonance // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. Vol. 33. P.L433.
2. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН. 1999. Т. 169. С.7.
3. Landa P.S. Regular and chaotic oscillations. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2001.
4. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
5. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
6. Коловский М.З. О влиянии высокочастотных возмущений на резонансные колебания в нелинейной системе // Труды ЛПИ. 1963. № 226. С. 7.
7. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. Wiley-Interscience, New York, 1979.

## CONJUGATE RESONANCES IN NONLINEAR SYSTEMS UNDER BIHARMONICAL ACTION. VIBRO-INDUCED BIFURCATIONS

*I.I. Blekhman, P.S. Landa*

Using a bistable oscillator described by a Duffing equation as an example, we consider resonances caused by a biharmonic external force with essentially different frequencies. We show that these resonances are conjugate; they appear when either the

low or high frequency changes. The resonances take place also as the amplitude of the high-frequency action varies. Besides we show that the high-frequency action induces the bifurcation of the change in the number of stable steady states in the system; so the seeming resonance in an overdamped oscillator is caused just this bifurcation.



*Блекман Илья Израилевич* - профессор, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией вибрационной механики Института проблем машиноведения РАН и ОАО «Механобр-Техника» (Санкт-Петербург). Область научных интересов: прикладная математика и механика, нелинейная динамика, теория колебаний, теория синхронизации динамических систем, вибрационная техника и технология. Автор 3 научных открытий, 9 монографий, более 200 научных работ и изобретений. Лауреат премий Правительства Российской Федерации, имени Гумбольдта (Германия) и Аль-Хорезми (Иран). E-mail: blekhan@vibro.ipme.ru



*Ланда Полина Соломоновна* - родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий сотрудник МГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член

Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». E-mail: planda@lpi.ru