



Изв. вузов «ПНД», т.10, № 1-2, 2002

УДК 517.9

## СРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ РАДИОФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «TORUS» В СЛУЧАЕ ГЛАДКОЙ И КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ВОЛЬТ-АМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

*Е.Н. Егоров, А.А. Короновский*

В настоящей работе рассматривается поведение генератора «Торус» с гладкой и кусочно-линейной функциями нелинейности. Показано, что при хорошей степени соответствия кусочно-линейной и гладкой функций, поведение систем оказывается качественно подобным. В то же самое время, неудачный выбор гладкой функции нелинейности ведет к существенному изменению поведения системы.

Изучаемая в настоящей работе радиофизическая система впервые была предложена Л. Чуа с соавторами [1] и является одной из классических кусочно-линейных «схем Чуа». Данная система представляет собой простейшую радиотехническую схему третьего порядка (рис. 1), состоящую из индуктивности, емкостей и нелинейного элемента, который имеет трехсегментную кусочно-линейную вольт-амперную характеристику. В данной работе исследуется поведение указанной системы при замене кусочно-линейной характеристики нелинейного элемента на гладкую. Как правило, подобная замена кусочно-линейной функции на гладкую (или наоборот) при удачном выборе заменяющей функции не приводит к серьезным качественным изменениям поведения системы (см., например, [2]). Вопрос о том, сколь значительны будут изменения в динамике системы, если новая функция нелинейности будет лишь «в общих чертах» соответствовать исходной, также исследуется в настоящей работе.

Следует отметить, что ранее [3] для системы «TORUS» было показано существование «тонких» режимов, когда в фазовом пространстве системы образуются двумерные торы высоких порядков (на двумерном торе при изменении управляющих параметров возникает резонансный цикл, затем новый двумерный тор на базе резонансного цикла и т.д.). Эти режимы наблюдались в очень узком диапазоне управляющих параметров, и, вообще говоря, вопрос о влиянии замены характеристики на такое поведение системы оставался открытым. В данной работе показано, что при удачном выборе гладкой функции вышеупомянутые «тонкие» режимы существуют в рассматриваемой системе. Продемонстрирован также пример неудачного подбора замены. Проведен сравнительный анализ результатов эксперимента с гладкой функцией нелинейности и результатов, полученных ранее для кусочно-линейной характеристики.

Как показали предыдущие исследования [3-5], данная система, несмотря на простоту описывающих ее уравнений, может демонстрировать периодические, квазипериодические и хаотические колебания. Периодические режимы колебаний идентифицировались с помощью чисел вращения  $\rho$ , характеризующих соотношение двух частот. Причем из-за существования мультистабильности поведение системы в пространстве управляемых параметров является довольно сложным. Отличительной особенностью описываемой системы является также «жесткий» характер появления второй частоты в системе, что влечет за собой гистерезис вблизи линии бифуркации рождения двумерного тора.

Приведенная на рис. 1 схема генератора «TORUS» описывается тремя дифференциальными уравнениями. В безразмерных переменных они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -(\alpha/\gamma)f(y-x), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -(1/\gamma)[f(y-x)+z], \\ \frac{dz}{d\tau} &= \gamma y, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x = V_{C_1}/E_1$ ,  $y = V_{C_2}/E_1$ ,  $z = i_L/I_m$ ,  $\tau = t/(LC_2)^{1/2}$ ,  $\alpha = C_2/C_1$ ,  $\gamma = (1/m_1)(C_2/L)^{1/2}$ ,  $m_0/m_1$ . Функция  $f(\xi)$  в данном случае есть ВАХ нелинейного элемента. Она имеет следующий вид:

$$f(\xi) = -(m_0/m_1)\xi + \frac{1}{2}(m_0/m_1 + 1)[|\xi + 1| - |\xi - 1|]. \quad (2)$$

Наибольший интерес представлял вопрос о том, какие изменения произойдут в поведении исследуемой системы (1), если заменить кусочно-линейную функцию (2) на ее «гладкий аналог», а также, насколько существенно влияние подбора параметров новой функции на динамику системы.

В качестве гладкого аналога кусочно-линейной функции (2) была предложена функция вида

$$f(x) = (th(tx) - k_r x)k_i, \quad (3)$$

где  $t$ ,  $k_r$ ,  $k_i$  - параметры. Фактически гладкая функция представляет собой результат сложения гиперболического тангенса и линейной функции. Методом наименьших квадратов были подобраны значения параметров ( $t = 1.19$ ,  $k_r = 0.33$  и  $k_i = 1.59$ ) таким образом, чтобы функция (3) как можно меньше отличалась от исходной кусочно-линейной функции (2). Вид функции (3) представлен на рис. 2. Для сравнения на том же рисунке приведена кусочно-линейная функция (2), использованная в предыдущих работах [3 - 5]. В данном случае очень важным было выполнение требования возможно более точного совпадения функций, за исключением точек излома функции (2), где искомая функция (3) должна быть

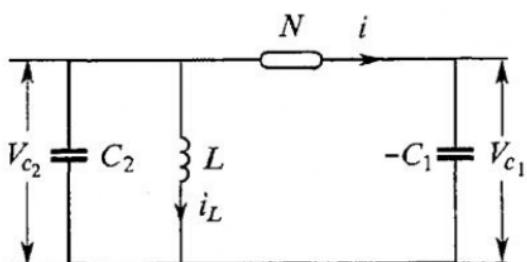


Рис. 1. Эквивалентная схема генератора «TORUS»

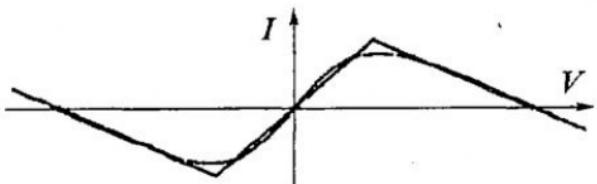


Рис. 2. Гладкая (3) и исходная кусочно-линейная (2) вольт-амперные характеристики нелинейного элемента

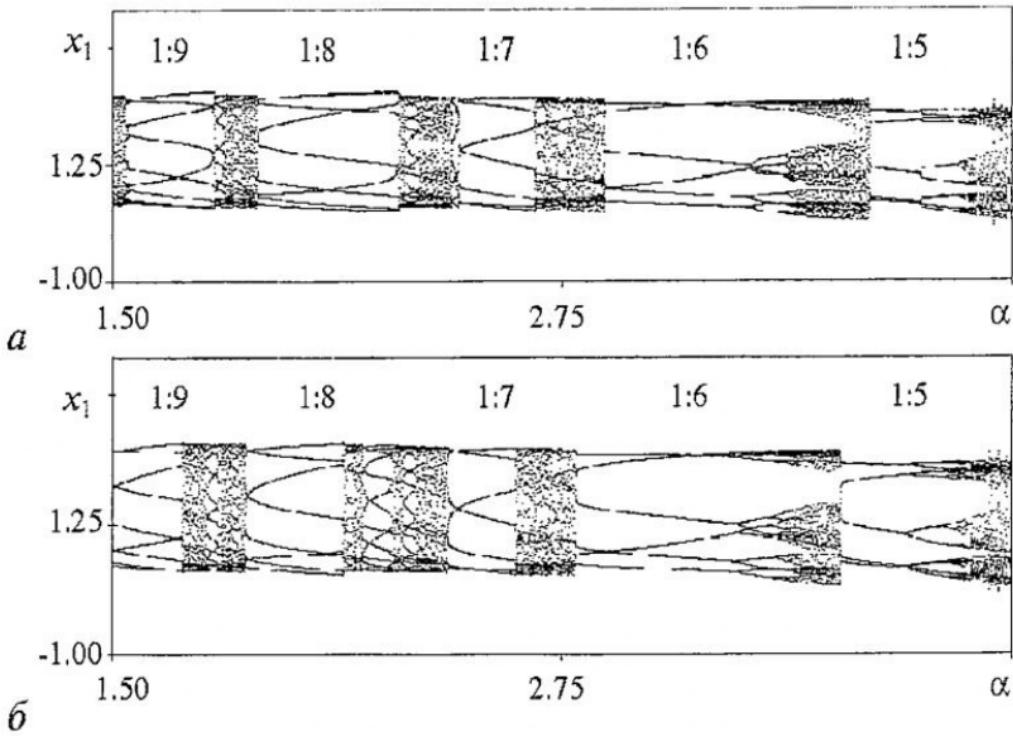


Рис. 3. Две бифуркационные диаграммы для одних и тех же значений управляющих параметров ( $\alpha=1.5 \div 4$ ,  $\gamma=3.7$ ): *a* - управляющий параметр  $\alpha$  увеличивается; *б* - управляющий параметр  $\alpha$  уменьшается. Численное моделирование системы (1) осуществлялось с гладкой функцией нелинейности (3)

гладкой. Как будет показано ниже, невыполнение этого требования приводит к неудовлетворительным результатам.

В ходе работы полученная система дифференциальных уравнений (1) численно исследована, для чего было проведено ее моделирование методом Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования  $h=0.01$  [6]. Построены двухпараметрическая карта режимов с помощью бифуркационных диаграмм, фазовые портреты и сечения Пуанкаре. Периодические режимы классифицировались с помощью чисел вращения  $\rho$  [2].

Мультистабильность системы на плоскости управляющих параметров обуславливает метод исследования, при котором каждая бифуркационная диаграмма строится дважды: в первом случае управляющий параметр  $\alpha$  увеличивается, а во втором - уменьшается. Таким образом, проходя карту параметров в прямом, а затем в обратном направлении, учитываем мультистабильность. Значения управляющего параметра, при которых происходит переход от одного режима к другому, для обеих диаграмм сравниваются между собой и их несоответствие отражается на карте режимов гистерезисной складкой. На рис. 3 приведены бифуркационные диаграммы при одинаковых параметрах  $\gamma$  и  $\alpha$ , а на рис. 4 для сравнения показана бифуркационная диаграмма для случая кусочно-линейной ВАХ. Видно, что качественных различий двух систем на данном этапе исследования нет. Режимы, характеризующиеся рациональным отношением частот, чередуются с областями, закрашенными относительно равномерно. На данных участках диаграмм реализуются квазипериодические режимы, а также режимы синхронизации более высоких порядков, числа вращения которых по своим значениям расположены между основными периодическими режимами, отчетливо представленными на данных диаграммах.

На рис. 5 показана «чертова лестница», представляющая собой зависимость числа вращения  $\rho$  от управляющего параметра  $\alpha$ . На рисунке, построенном в том же диапазоне изменения управляющего параметра  $\alpha$ , что и бифуркационные диаграммы (см. рис. 3), можно отчетливо различить «полочки», соответствующие

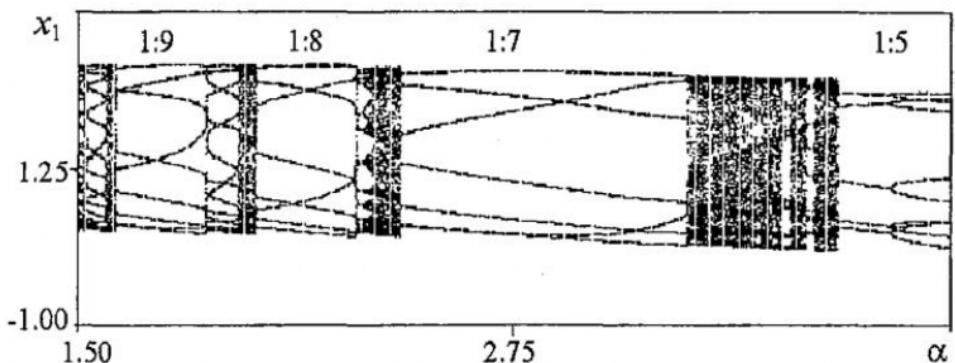


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для управляющих параметров ( $\xi=1.5-4$ ,  $\gamma=3.7$ ), кусочно-линейная вольт-амперная характеристика (2)

областям синхронизации на диаграммах. Между областями синхронизации находятся «переходные» области, которые по своей структуре качественно повторяют всю «лестницу» в целом. В этих областях также видны более мелкие ступеньки, соответствующие областям синхронизации более высокого порядка. Вид зависимости  $\rho(\alpha)$  типичен для систем, в которых наблюдаются квазипериодические колебания. Так же как и бифуркационные диаграммы, она строилась дважды для учета мультистабильности системы. На приведенном рисунке наиболее крупные области гистерезиса отмечены стрелками. Строение «лестницы» подтверждает сказанное выше о структуре плоскости параметров.

По семейству однопараметрических бифуркационных диаграмм, полученных при малых изменениях параметров системы, в ходе численного эксперимента был построен участок карты режимов (рис. 6). Сравнивая его с полученными ранее результатами (рис. 7) видим удовлетворительное качественное совпадение карт для двух типов функций нелинейности. На приведенных рисунках горизонтальной

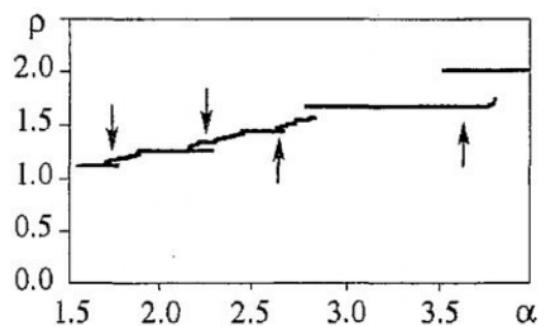


Рис. 5 «Чертова лестница» для системы (1) с функцией (3)

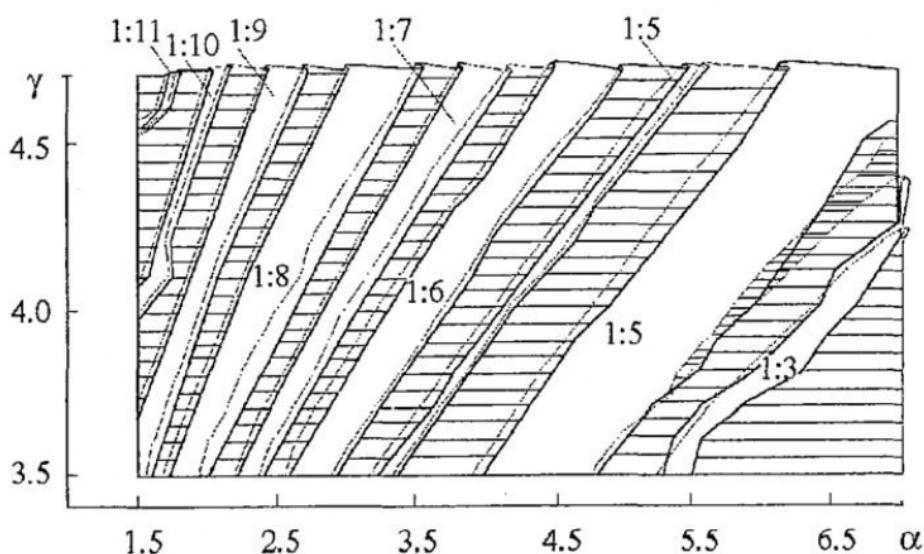


Рис. 6. Двупараметрическая карта режимов системы (1) для гладкой функции нелинейности (3)

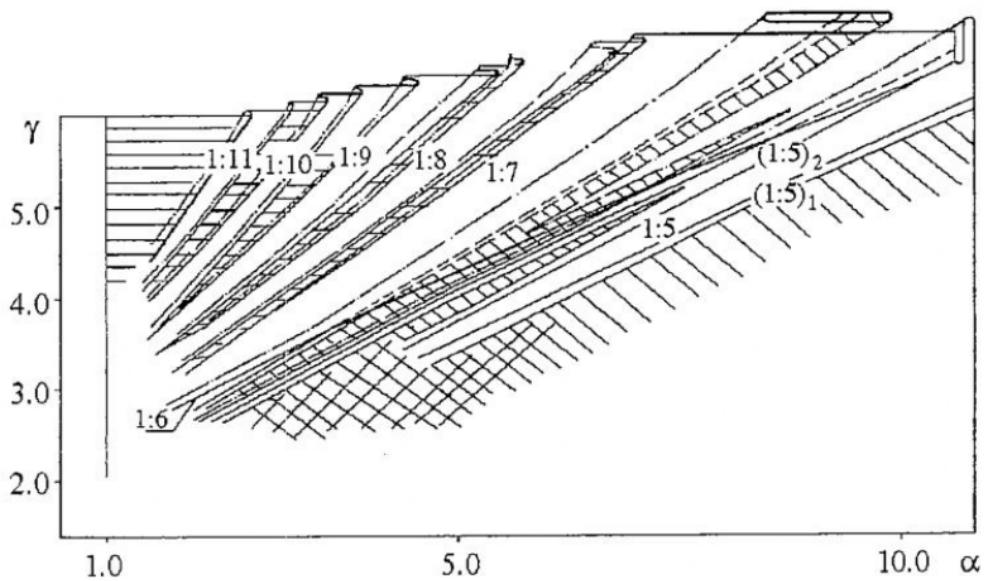


Рис. 7. Двухпараметрическая карта режимов, снятая в ходе численного эксперимента для кусочно-линейной функции (2). Из работы [4]

штриховкой показаны области квазипериодических колебаний, а наклонной - хаотических (см. рис. 7). Поведение системы в области с двойной штриховкой до конца не выяснено [4]. Незаштрихованные области соответствуют режимам, характеризующимся рациональным соотношением частот (значение соотношений обозначено цифрами). Отчетливо видны области гистерезиса, то есть области, которым при одних и тех же значениях управляемых параметров соответствуют различные колебательные режимы.

Строя фазовые портреты и сечения Пуанкаре в конкретных точках этой карты, можно определить какому режиму соответствует тот или иной участок. На рис. 8 представлен фазовый портрет и сечение Пуанкаре для точки с координатами  $\alpha=2.2$  и  $\gamma=3.7$ . Видно, что в данной точке реализуются колебания с периодом 8. Сходство динамики двух систем подтверждается также видом фазовых портретов и сечений Пуанкаре, которые практически полностью совпадают по виду с приведенными на рис. 9 для кусочно-линейной ВАХ.

Как видно из приведенных рисунков, в фазовом пространстве этой системы реализуется тор, что соответствует наличию в системе двух собственных частот (в силу схематических особенностей системы). Кроме того, данный генератор

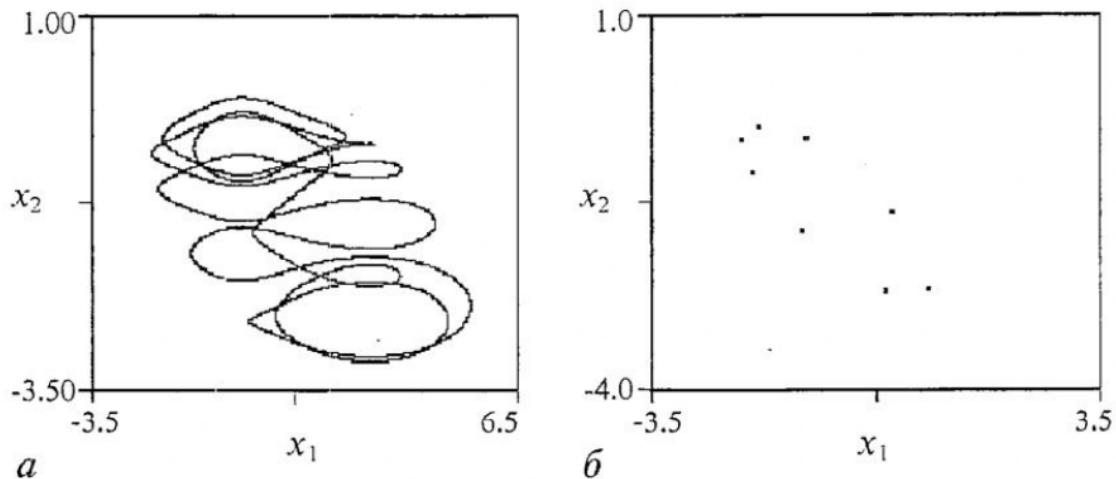


Рис. 8. Фазовый портрет (а) и сечение Пуанкаре (б) при значениях управляемых параметров  $\alpha=2.2$ ,  $\gamma=3.7$  для гладкой функции (3). В системе реализуется режим 1:8. Начальные условия  $x=-1.3500$ ,  $y=0.7350$ ,  $z=-2.0000$

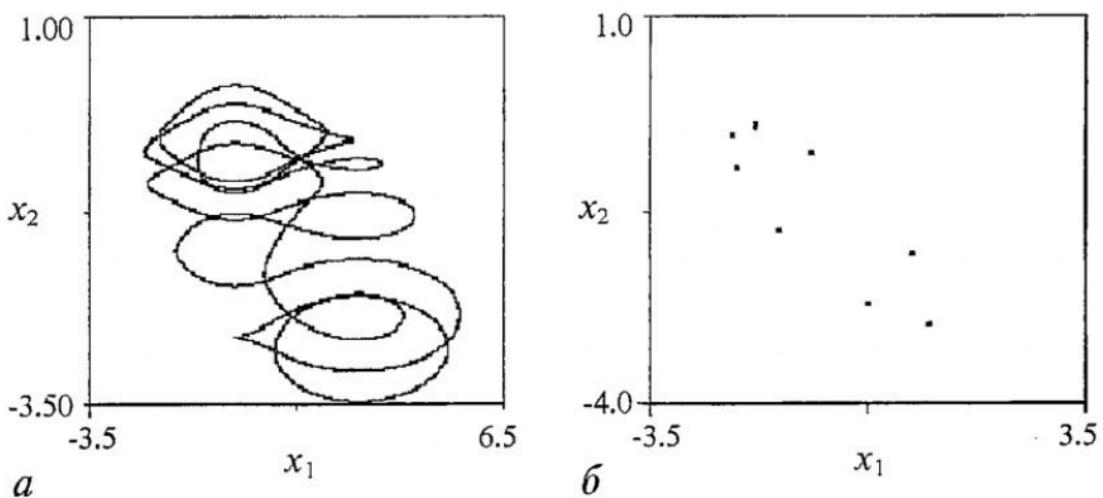


Рис. 9. Фазовый портрет (а) и сечение Пуанкаре (б) при значениях управляемых параметров для кусочно-линейной функции (2). В системе реализуется режим 1:8. Начальные условия  $x=0.3500$ ,  $y=0.7350$ ,  $z=-2.0000$

способен генерировать частоты более высоких порядков благодаря наличию в схеме нелинейного элемента. Это обусловлено также видом вольт-амперной характеристики генератора.

Было обнаружено, что такое негрубое поведение наблюдается в системе в области линии бифуркации рождения двумерного тора  $\alpha=1$ . Например, при значениях параметров  $\alpha=1$  и  $\gamma=2.5$  наблюдалось рождение двумерного тора «второго порядка» на базе режима с соотношением частот 1:7 (рис. 10). Такое поведение системы совпадает с динамикой изученной ранее схемы [3]. На рис. 11 приведен похожий режим для кусочно-линейной функции. Область параметров, в которой существует этот режим, очень узкая и находится только на линии  $\alpha=1$ . Уменьшение параметра  $\alpha$  приводит к переходу на предельный цикл, а увеличение — к переходу колебаний на основной режим, соответствующий тем же значениям параметров.

Высокая чувствительность к начальным условиям, а также длительные переходные процессы существенно затрудняли исследование «тонких режимов». Даже при малом изменении начальных условий можно либо отыскать режимы, характеризующиеся другим числом вращения, либо вообще уйти из рассматриваемой области. В ходе работы при одинаковых значениях параметров, но разных

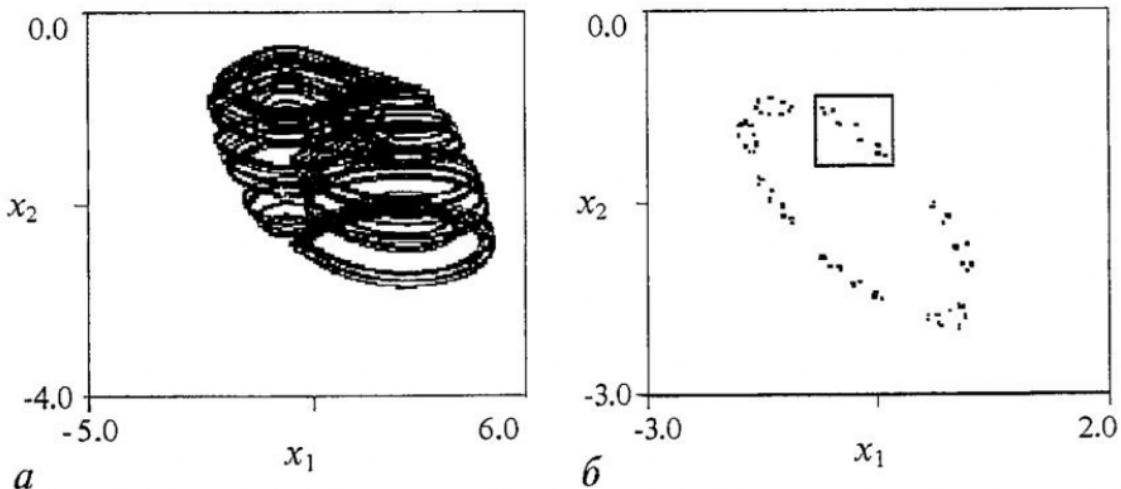
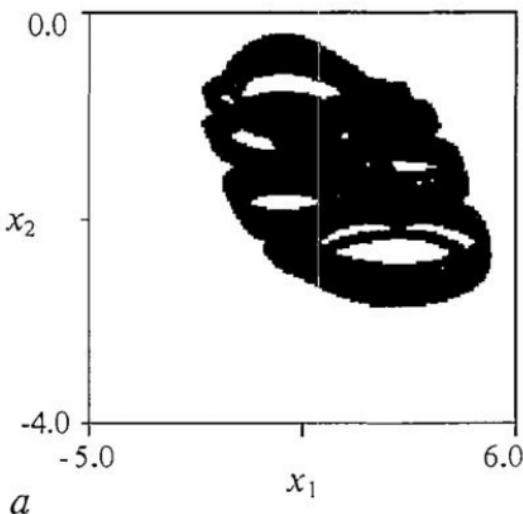
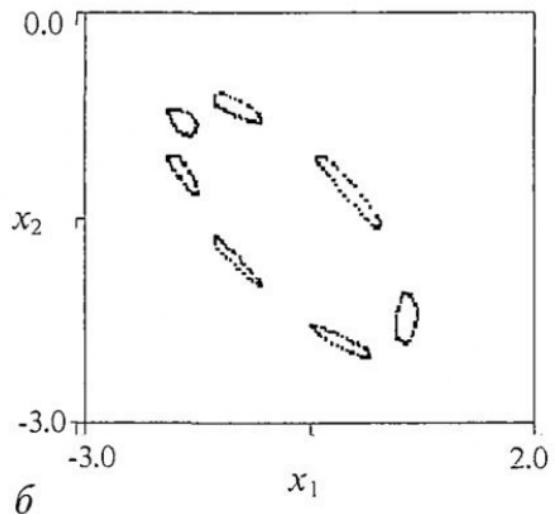


Рис. 10. Фазовый портрет (а) и сечение Пуанкаре (б) для гладкой функции нелинейности (3). Значения управляемых параметров  $\alpha=1$ ,  $\gamma=2.53$ . Начальные условия  $x=-2.0585$ ,  $y=-0.1794$ ,  $z=-4.2366$



*a*



*b*

Рис. 11. Фазовый портрет (а) и сечение Пуанкаре (б) для кусочно-линейной функции (2). Значения управляемых параметров  $\alpha=1$ ,  $\gamma=2.5$ . Начальные условия  $x=-1.3843$ ,  $-1.3102$ ,  $-6.4256$

начальных условиях наблюдались режимы на базе областей синхронизации с соотношением частот 1:6, 1:7, 1:8.

Нужно отметить, что такое поведение системы не может являться следствием ошибок в процессе проведения компьютерного моделирования, так как в ходе эксперимента менялся шаг интегрирования, что не приводило ни к каким качественным изменениям. В ходе работы были повторены некоторые результаты, полученные ранее для кусочно-линейной ВАХ [3, 4], что тоже может послужить гарантией от незапланированных ошибок, связанных с используемым методом интегрирования.

Выше говорилось о требовании, предъявляемом к гладкой функции нелинейности. Был поставлен вопрос о том, насколько сильно изменится поведение системы в случае неудачного выбора «гладкого аналога». В качестве такого «аналога» была выбрана функция вида

$$f(\xi) = \frac{1}{19}(-\xi^3 + 9\xi)c, \quad (4)$$

где

$$\xi = \begin{cases} ax & \text{при } |x| \leq 1, \\ a + (x-1)b/2 & \text{при } x > 1, \\ -[a + (|x|-1)b/2] & \text{при } x < -1, \end{cases}$$

$a=1.732$ ,  $b=1.268$ ,  $c=1.55$ . Она лишь примерно аппроксимировала исходную ВАХ (рис. 12). Для нее также была построена карта режимов на плоскости управляемых параметров (рис. 13, обозначения те же). По виду карты можно

судить о том, что данная система, так же как и исходная, демонстрирует двухчастотную динамику с различным соотношением частот, а также хаотические колебания. Однако расположение листов синхронизации сильно отличается от приведенного на рис. 6. На карте рис. 13 расположение областей синхронизации беспорядочное и нет четкой структуры языков Арнольда, сходящихся к линии

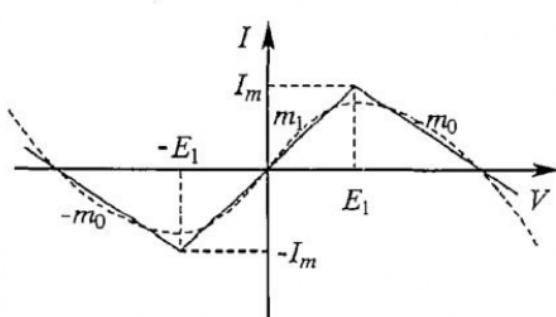


Рис. 12. Гладкая функция нелинейности (4)

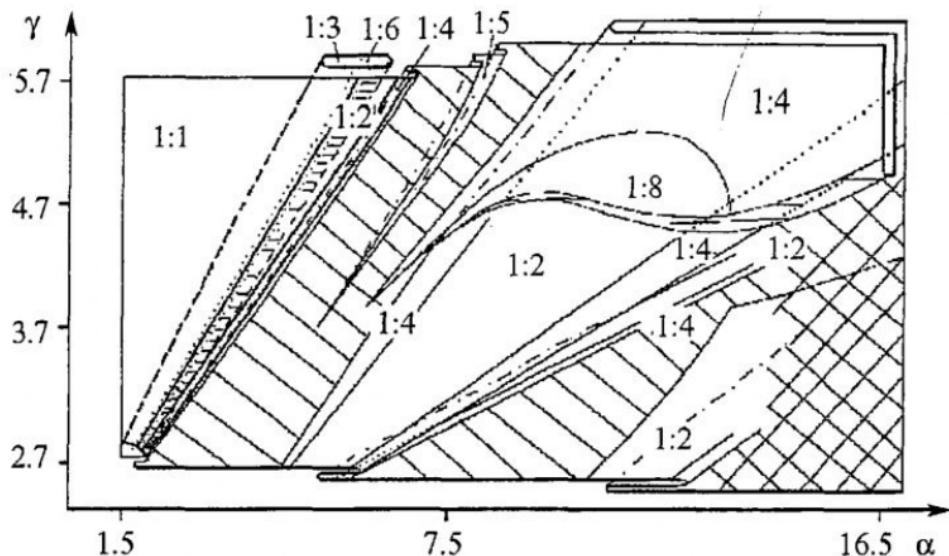


Рис. 13. Карта режимов, полученная для системы (1) с гладкой функцией нелинейности (4) бифуркации рождения тора, что демонстрирует исходная система, а также система с функцией (3).

Таким образом, результаты, полученные в ходе данного исследования, показывают, что гладкая функция, выбранная для описания ВАХ нелинейного элемента, подобрана удачно и все «тонкие» эффекты поведения в данном случае сохраняются. Сравнение полученных результатов с предыдущими исследованиями показало качественное совпадение динамики систем с гладкой и кусочно-линейной ВАХ. Следовательно, на данном этапе исследований можно сделать вывод, что наличие изломов в точках экстремумов функции нелинейности не имеет определяющего значения для поведения данной системы. В то же время, существенной оказывается степень аппроксимации кусочно-линейной функции ее гладким аналогом на всей области определения функции.

Авторы выражают признательность В.В. Захарову за помощь в проведении численного эксперимента.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 01-02-17392 и 02-02-16351).*

### Библиографический список

1. Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R.// IEEE Trans.Circuits and Syst.1987. Vol. 34, № 3. P.240.
2. Андрушкевич А.В. и др. Путь к хаосу в кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 1. № 1,2. 1993. С. 93.
3. Кипчатов А.А., Короновский А.А. Тонкие эффекты самоподобного поведения кусочно линейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т.5. № 2. С. 17.
4. Андрушкевич А.В. и др. Экспериментальное двупараметрическое исследование неоднозначных режимов колебаний // Изв.вузов. Радиофизика. 1995. Т. XXXVIII, N 11. С 1195.

5. Короновский А.А. Мультиплекторы периодических решений для генератора с кусочно-линейным элементом // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т 5, № 2.С.24.

6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.М.: Наука,1974.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 30.07.01  
после доработки 20.12.01

## COMPARISON OF DYNAMICS OF «TORUS» SYSTEM WITH SMOOTH OR PIECEWISE- LINEAR VA-CHARACTERISTICS

*E.N. Egorov, A.A. Koronovskii*

The dynamics of «Torus» generator with smooth or piecewise-linear volt-ampere characteristics is considered. It was shown that the systems at high degree of coincidence of smooth and piecewise-linear volt-ampere characteristics have a qualitative similar behaviour. Incorrect choice of the smooth function leads to the essential modification of the system behaviour.



Егоров Евгений Николаевич - родился в Саратове (1980). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2002). Инженер учебной лаборатории нелинейной динамики факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика систем с сосредоточенными параметрами.