



ВВЕДЕНИЕ В НЕПРЕРЫВНЫЙ ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Часть 2. Пути в хаос с точки зрения вейвлетного анализа

А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Данная статья является продолжением работы «Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Часть 1» опубликованной в журнале «Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика». 2001. Т. 9, № 4,5. С. 3. В работе с позиций непрерывного вейвлетного анализа иллюстрируются особенности универсальных путей в хаос, реализующихся в нелинейных конечномерных динамических системах: переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу через перемежаемость.

Хорошо известно, что в динамических системах с малой размерностью¹ фазового пространства - системах с дискретным и непрерывным временем - наблюдаются универсальные маршруты перехода от регулярных режимов колебаний к хаотическим так называемые «пути в хаос». На данный момент известны три таких перехода к хаосу, обладающие универсальными свойствами:

- переход к хаосу через субгармонический каскад;
- переход к хаосу через перемежаемость;
- переход к хаосу через разрушение квазипериодических движений.

В данной части мы постараемся проиллюстрировать сценарии перехода к хаосу через удвоения периода и перемежаемость с позиций вейвлетного анализа, а также выявить характерные особенности вейвлетного преобразования анализируемых сигналов, соответствующих различным типам перехода к хаосу.

2.1. Переход к хаосу через субгармонический каскад

Классической конечномерной потоковой системой, демонстрирующей переход к хаосу через каскад удвоений периода, является система Ресслера [1]

¹ то есть с малым числом степеней свободы.

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ey, \\ \dot{z} = w - mz + xz. \end{cases} \quad (2.1)$$

Рассмотрим именно эту систему в качестве базовой для анализа каскада бифуркаций удвоения периода с помощью вейвлетного анализа.

Для численного решения системы уравнений (1) использовался метод Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом по времени $\Delta t=0.001$. Система исследовалась при фиксированных значениях параметров $e=w=0.2$, параметр m изменялся в пределах $2.0 < m < 6.0$. В этом диапазоне управляющего параметра наблюдается переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. На рис. 2.1 представлена соответствующая бифуркационная диаграмма колебаний в системе при изменении параметра m в пределах $2.0 \leq m \leq 6.0$.

Рассмотрим, что наблюдается в этом случае при анализе временных рядов, порождаемых системой Ресслера, с помощью вейвлетного анализа с базовым морлет-вейвлетом. На рис. 2.2 показаны соответствующие проекции поверхностей распределения амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования $|W(t, f_s)|$, спектры мощности в логарифмическом масштабе, проекции фазовых портретов временных реализаций переменной $x(t)$, построенные по методу Такенса² [2], и распределения энергии $\langle E(f_s) \rangle$ по временным масштабам ($f_s=1/s$) при различных значениях управляющего параметра m . Анализировались временные ряды, из которых предварительно был удален переходной процесс.

На рис. 2.2, *a* демонстрируются характеристики колебаний для периодического режима с периодом T_1 ($m=2.6$). Поверхность распределения амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования $|W|$ в этом случае качественно подобна поверхности характерной для периодического сигнала (см., например, рис. 1.4, *a* из [3], на котором было представлено распределение $|W|$, полученное для синусоидального сигнала). Наличие фурье-гармоник основной частоты сигнала с малой амплитудой практически не оказывает влияние на вид вейвлетного спектра.

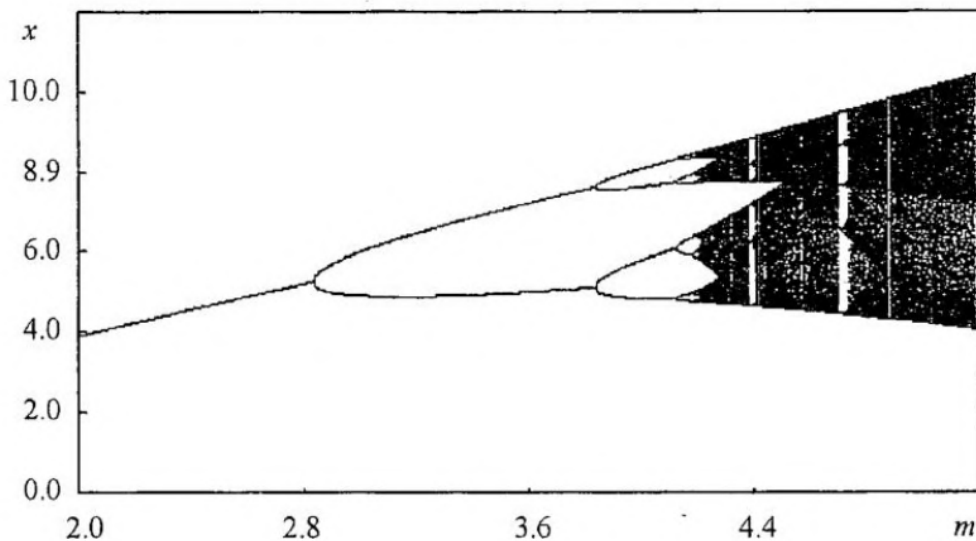


Рис. 2.1. Бифуркационная диаграмма колебаний в системе Ресслера при изменении параметра m ($e=w=0.2$)

² То есть по временному ряду $x(t)$ строится n -мерный вектор вида $x(t), x(t+2\tau), x(t+4\tau), \dots, x(t+(n-1)\tau)$, который, как показано Такенсом, может рассматриваться как вектор в фазовом пространстве. Здесь τ - время задержки, которое выбирается произвольно [2].

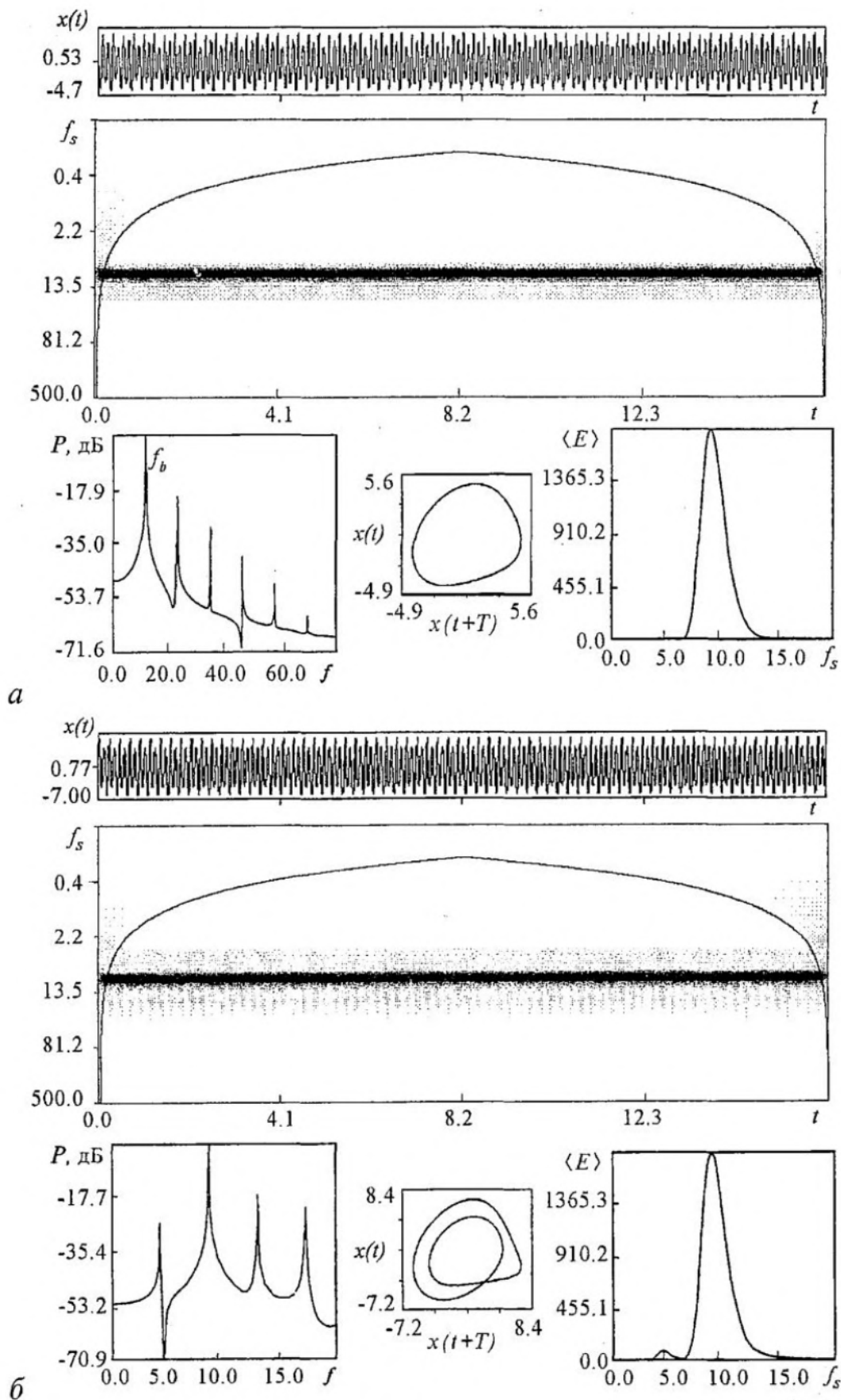


Рис. 2.2, а - Проекция поверхности $W(t, f_s)$, спектры мощности, фазовые портреты и распределение энергии по временным масштабам $\langle E(f_s) \rangle$, полученные с базовым морлетвейвлетом по временным реализациям $x(t)$ системы Ресслера (2.1) с бифуркационными параметрами: а - $m=2.6$ (цикл T_1), длительность временной реализации $N=2^{14}$ отсчетов, $\Delta t=0.001$; б - $m=3.6$ (цикл T_2), длительность временной реализации $N=2^{14}$ отсчетов, $\Delta t=0.001$

Аналогичные результаты можно наблюдать и анализируя усредненное распределение энергии $\langle E \rangle$ по временным масштабам колебаний. Оно имеет единственный максимум, который соответствует (с точностью до коэффициента 1.03) базовой частоте сигнала f_b (отмечена на рисунке) в спектре мощности $P(f)$.

Рассмотрим теперь, как трансформируется распределение амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования с увеличением бифуркационного параметра m . На рис. 2.2, б показаны характеристики сигнала после первой бифуркации прибавления периода ($m=3.6$). На вейвлетной поверхности W появляется второй максимум (более темная область при $f_s \sim 5.0$). Это хорошо видно на распределении $\langle E \rangle$, на котором появляется второй максимум, соответствующий субгармонике $f_b/2$ в спектре мощности. Причем соотношение между амплитудами локальных максимумов в распределении энергии по масштабам вейвлетного преобразования и фурье-спектре мощности существенно разное. Оно, в соответствии с выражением (10) из [3], имеет вид

$$P(f_b)/P(f_b/2) = 1/4[P(f_{bs})P(f_{bs}/2)]. \quad (2.2)$$

Следует также обратить внимание на характерную структуру вейвлетной поверхности в области больших частот (малых временных масштабов). Эта структура представляет собой периодически наблюдающиеся горбы на поверхности $|W|$, локализованные вблизи максимумов (причем максимумов с наибольшей амплитудой) на временной реализации процесса. Это связано с тем, что именно вблизи этих максимумов вид временной реализации $x(t)$ наиболее сильно отличается от вида гармонической функции, и для описания его необходимо наибольшее число гармоник в разложении Фурье (ср. с рис. 1.12 из [3], на котором представлены результаты непрерывного вейвлетного преобразования сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов). Здесь особо четко проявляется различие между фурье-анализом и вейвлетным анализом. Для первого - данные эффекты могут быть учтены только в «среднем»: они выражаются в наличии у сигнала гармоник базовой частоты. На временных масштабах даже порядка одного периода колебаний вейвлетный анализ четко показывает, когда сигнал действительно существенно отличается от гармонического, а когда близок к нему.

Рис. 2.2, в демонстрирует характеристики колебаний при значении управляющего параметра $m=4.2$ (цикл периода 10, что хорошо видно на фазовом портрете). Усредненное распределение энергии по масштабам практически не изменяется по сравнению с предыдущим случаем. Сама поверхность коэффициентов вейвлетного спектра $|W|$ имеет в области временных масштабов $f_s \in (f_b/2, f_b)$ более сложную структуру. Однако, интенсивность данных временных масштабов существенно меньше, чем интенсивность временного масштаба, соответствующего субгармонике $f_b/2$.

Характеристики режима ленточного хаоса ($m=5.1$) в системе Ресслера показаны на рис. 2.2, г. Спектр мощности имеет высокий шумовой пьедестал, на котором выделяются основная частота, ее гармоники и субгармоники. На проекции поверхности распределения амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования наблюдается максимум, соответствующий базовой частоте f_b . Однако в отличие от предыдущих случаев амплитуда этого максимума (а следовательно, и энергия движения системы, соответствующая этому временному масштабу $s_b=1/f_b$) меняется с течением времени. Это выражается в изменении толщины и тона соответствующей линии на проекции $|W|$ на плоскость (t, f_s) . Что касается динамики на временных масштабах больших $1/f_b$, то она сильно нерегулярна (это хорошо видно из анализа вейвлетной поверхности в диапазоне $f_s \in (2.0, 7.0)$). Однако энергия, заключенная в этих масштабах, существенно меньше, чем энергия основного масштаба (см. распределение энергии $\langle E \rangle$).

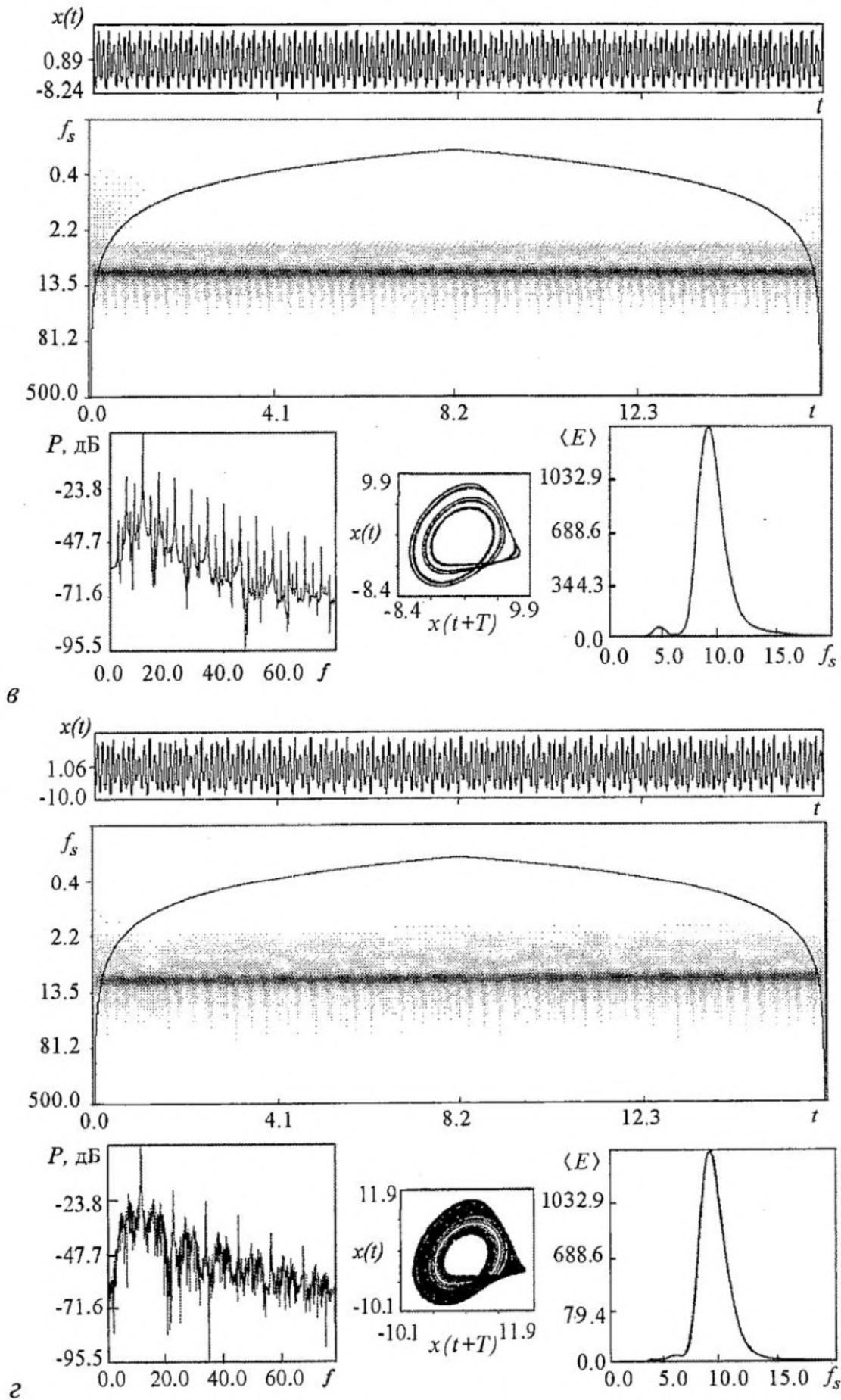


Рис. 2.2. а - $m=4.2$ (цикл T_{10}), длительность временной реализации $N=2^{14}$ отсчетов, $\Delta t=0.001$;
 б - $m=5.1$ (режим хаотической динамики), длительность временной реализации $N=2^{14}$ отсчетов,
 $\Delta t=0.001$

Заметим также, что нерегулярная динамика на малых частотах приводит к тому, что на кривой $\langle E \rangle$ наблюдаются равномерно спадающие «хвосты» распределения. К последним распределениям мы еще вернемся, когда будем рассматривать результаты вейвлетного анализа перехода к хаосу через перемежаемость на примере системы Лоренца.

Для сравнения вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом на рис. 2.3 приведена проекция поверхности $|W|$, построенная с материнским МНАТ-вейвлетом для временной реализации переменной $x(t)$ системы Ресслера с параметрами $e=w=0.2$ и $m=4.2$ (цикл периода 10). Интерпретация данной поверхности существенно сложнее. Что касается распределения энергии $\langle E \rangle$ по масштабам, то оно существенно шире и не демонстрирует тонкую структуру в области малых частот, как в случае вейвлетного анализа с морлет-вейвлетом. Заметим также, что в данном случае временной масштаб вейвлетного преобразования, соответствующий максимуму энергии в вейвлетном спектре, не совпадает по величине с периодом фурье-преобразования (ср. с рис. 2.2, в)³.

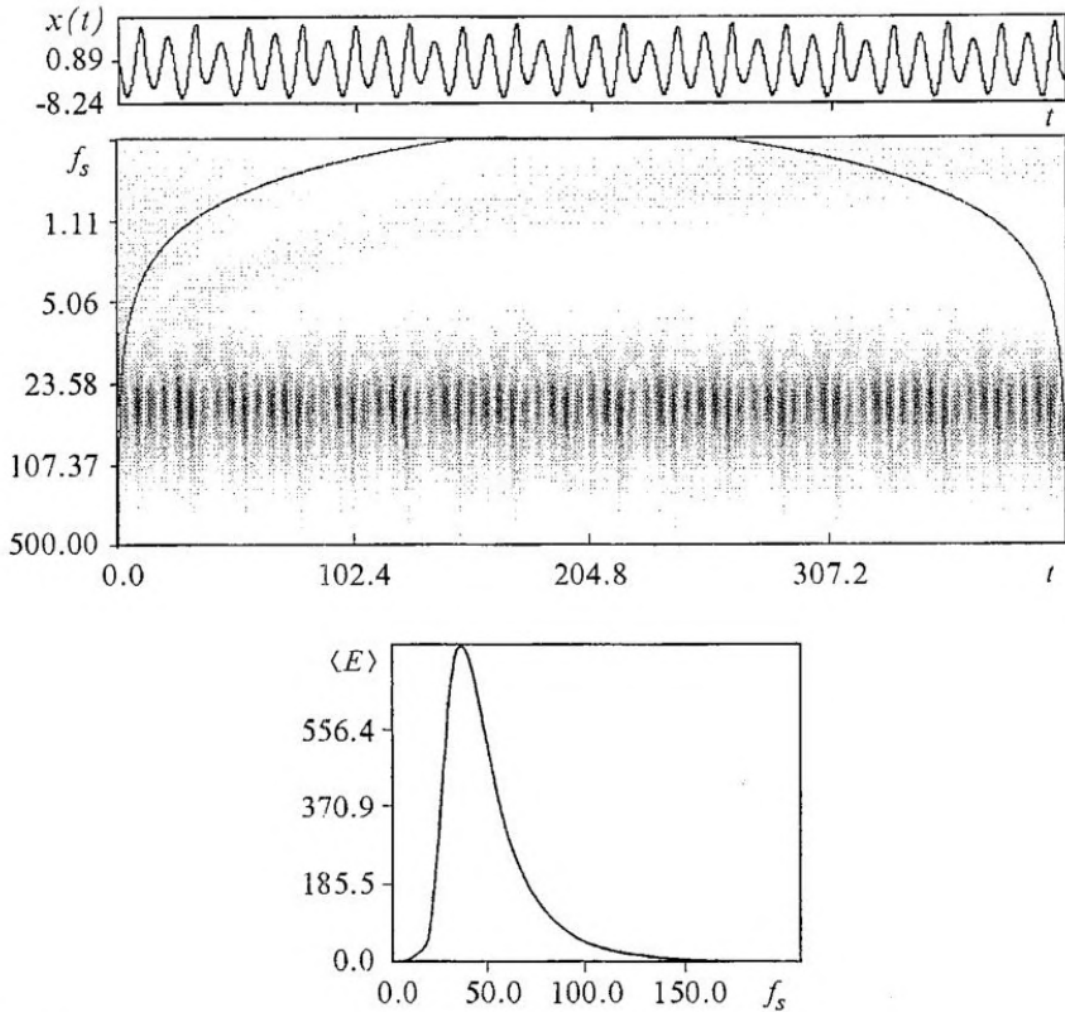


Рис. 2.3. Проекция поверхности распределения амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования⁶ $|W(t, f_s)|$ и распределение энергии по временным масштабам $\langle E(f_s) \rangle$, полученные с базовым МНАТ-вейвлетом по временной реализации $x(t)$ системы Ресслера (2.1) с бифуркационным параметром $m=4.2$ (параметры $e=w=0.2$, цикл T_{10}). Длительность временной реализации $N=2^{12}$ отсчетов, $\Delta t=0.001$

³ Данные вопросы подробно обсуждались в первой части работы [3, табл.]

⁶ Для МНАТ-вейвлета, который является действительным вейвлетом, фаза коэффициентов вейвлетного спектра тождественно равна нулю.

Таким образом, можно сделать вывод, что анализ распределения амплитуды коэффициентов вейвлетного спектра $|W|$ позволяет эффективно обнаружить только первую бифуркацию удвоения периода, благодаря тому, что интенсивность первой субгармоники основной частоты после удвоения в спектре достаточно велика. Следующие бифуркации удвоения приводят к усложнению вейвлетной поверхности $|W|$ в области больших временных масштабов s , но интенсивность данных масштабов мала. Вследствие конечной ширины фурье-образа $\hat{\psi}$ базовой вейвлетной функции появление все новых слабовыраженных в спектре временных масштабов $s_{i+1}=2s_i$, где i - номер бифуркации, выражается в появлении размытого, очень слабо выраженного пьедестала в области малых величин f_s в распределении $\langle E \rangle$. Но вейвлетный анализ не позволяет выделить каждый из этих временных масштабов отдельно. Даже применение более «частотноизбирательного» вейвлета Морлета с $\omega_0=16$ (см. рис. 1.3 и табл. из [3]) позволяет «заметить» в распределении энергий по масштабам только масштаб $s=4T$, соответствующий третьей бифуркации удвоения. Дальнейшее увеличение параметра ω_0 материнской вейвлетной функции Морлета (последнее соответствует уменьшению ширины вейвлета Морлета в фурье-пространстве, а следовательно, повышает частотную избирательность вейвлетного преобразования) сводит на нет основное достоинство вейвлетного преобразования, а именно: возможность эффективного выделения локальных особенностей анализируемого сигнала. Фактически, увеличивая параметр ω_0 , мы приходим к оконному преобразованию Фурье, достоинства и недостатки которого обсуждались во Введении.

Аналогичная ситуация складывается и при анализе распределения фаз $\varphi_W(t, f_s)$ коэффициентов вейвлетного спектра сигналов, генерируемых динамическими системами при переходе к хаосу через удвоение периода. В качестве примера на рис. 2.4 представлены результаты расчета поверхности φ_W вейвлетного спектра (полученного с базовым морлет-вейвлетом) сигналов, генерируемых системой Ресслера при переходе к хаосу через удвоение периода. Из рисунков видно, что распределения фаз вейвлетных коэффициентов в различных режимах качественно не отличаются друг от друга.

Некоторые отличия проявляются, во-первых, в высокочастотной области, где правильная картина распределения фаз коэффициентов вейвлетного преобразования искажается с увеличением управляющего параметра m . Последнее связано с изменением спектрального состава колебаний при их усложнении в результате перехода к хаосу в области высоких частот, существенно превышающих базовую частоту в спектре сигнала. И во-вторых, происходит изменение поверхности φ_W в области низких частот, которые уже определяются явлением последовательных прибавлений периода с увеличением m . Однако это изменение несущественно, и поэтому, распределение фаз коэффициентов вейвлетного преобразования также не может быть эффективным средством анализа характерных особенностей различных режимов колебаний динамических систем, демонстрирующих каскад удвоений периода.

2.2. Переход к хаосу через перемежаемость

Переход к хаосу через перемежаемость (исследованный впервые в работах И. Помо и П. Манневилля [4, 5]) обычно рассматривается на примере модели Лоренца [6, 7]

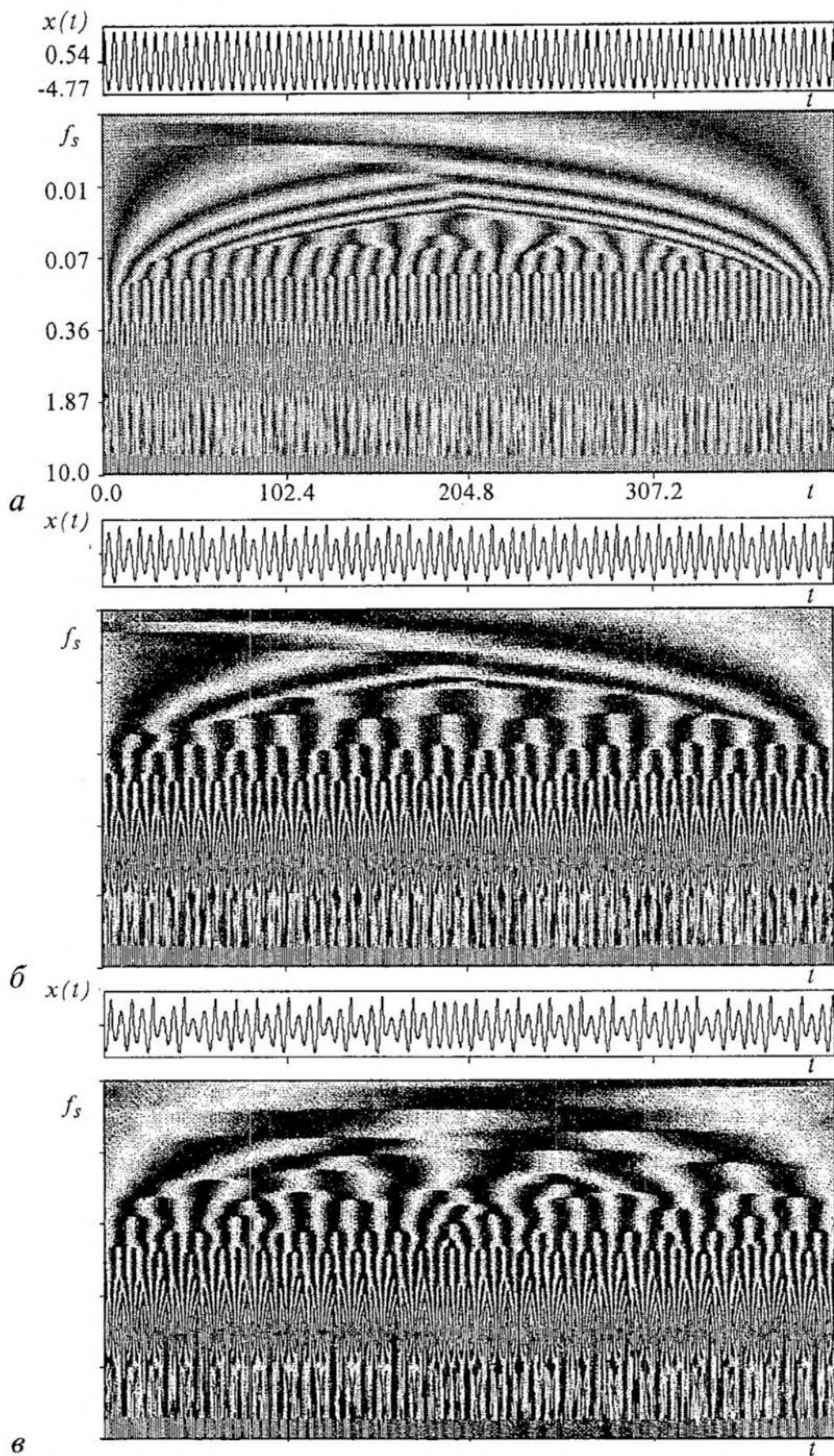


Рис. 2.4. Распределение фазы $\varphi_W(t, f_s)$ коэффициентов вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом по временной реализации $x(t)$ системы Ресслера (2.1) с бифуркационными параметрами: *a* - $m=2.6$ (цикл T_1); *б* - $m=4.2$ (цикл T_{10}); *в* - $m=5.1$ (режим хаотической динамики)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(x - z), \\ \dot{y} = rx - xz - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (2.3)$$

При значениях управляющих параметров $s = 10$, $b = 8/3$ и при $r < r^*$ временная реализация, генерируемая системой Лоренца (например, величины x , которую мы и будем рассматривать в дальнейшем), представляет собой периодическое движение. При превышении порога $r^* \approx 166.07$ регулярные колебания $x(t)$ (ламинарная фаза) начинают прерываться хаотическими всплесками, которые с ростом управляющего параметра r становятся все более и более длительными, пока движение полностью не хаотизируется. Перемежаемость в системе Лоренца классифицируется как перемежаемость I-го рода [8, 9].

Проанализируем результаты вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом соответствующих сигналов $x(t)$, порождаемых системой Лоренца при вышеуказанных значениях параметров. Временные реализации были получены, как и в предыдущем случае, методом Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом по времени $\Delta t = 0.0001$.

На рис. 2.5 демонстрируется временная реализация $x(t)$ и проекция поверхности $|W|$. На вейвлетной поверхности четко выделяются характерные структуры, соответствующие ламинарной и турбулентной фазам во временной реализации.

Структура вейвлетной поверхности для регулярной фазы движения имеет профиль $|W(t = \text{const}, f_s)|$, на котором наблюдаются два глобальных максимума (см. рис. 2.5) - им соответствуют две темные области, расположенные параллельно оси времени. В пределах ламинарной фазы с течением времени коэффициенты вейвлетного преобразования остаются неизменными. Наличие структуры, демон-

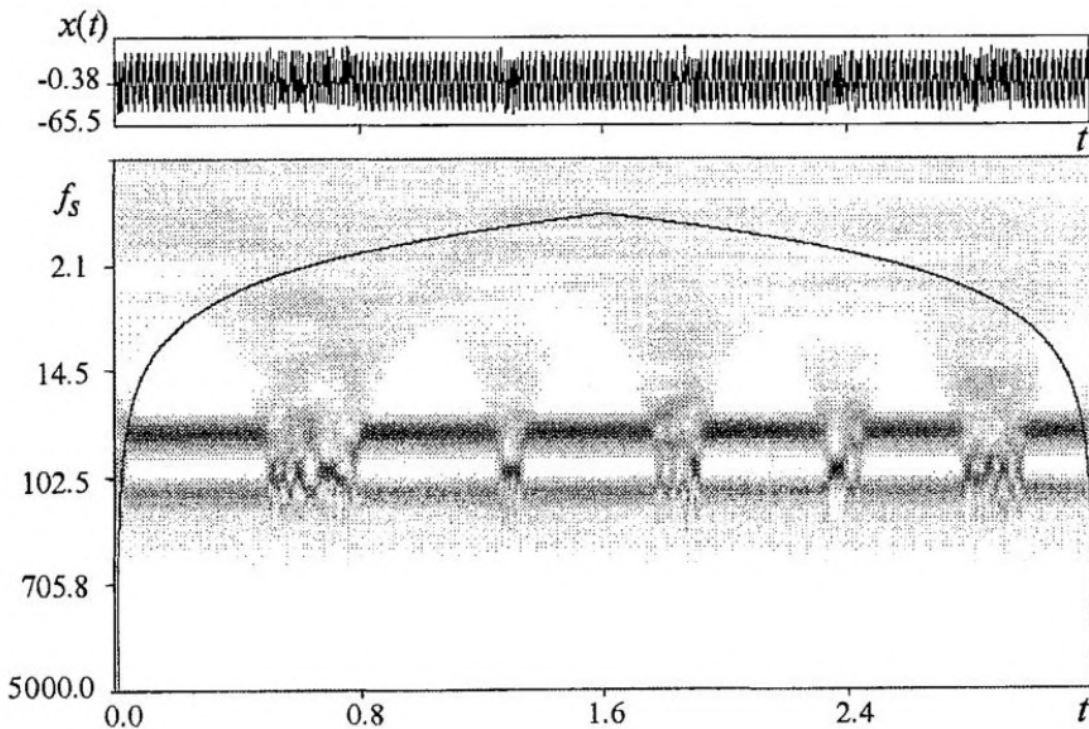


Рис. 2.5. Вейвлетная поверхность $W(t, f_s)$, полученная по временной реализации $x(t)$ системы Лоренца (2.3) с параметром надкритичности $r - r^* = 0.03$ ($r = 166.1$). Длительность временной реализации $N = 2^{15}$ отсчетов, $\Delta t = 0.0001$

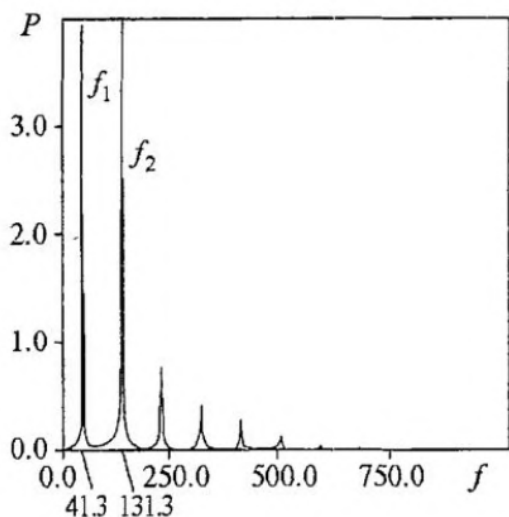


Рис. 2.6. Спектр мощности Фурье (в нелогарифмическом масштабе) временной реализации $x(t)$, генерируемой системой Лоренца при значении бифуркационного параметра $r=166.1$, построенный для ламинарной фазы движения ($t \in (0.2, 0.6)$); см. рис. 2.4)

в режиме хаотической динамики наблюдается «всплеск» разномасштабных колебательных явлений, причем основная энергия приходится на масштабы s , соответствующие $f_s \in (f_1, f_2)$. Заметим, что области на поверхности $|W|$, соответствующие хаотическим фазам, четко локализованы во времени.

На рис. 2.7 представлена вейвлетная поверхность, полученная в результате вейвлетного преобразования одной турбулентной фазы, соответствующей отрезку временной реализации $t \in (0.25, 1.06)$ - первый турбулентный всплеск на рис. 2.5. Проанализируем структуру этой поверхности. Как уже обсуждалось, в течение ламинарной фазы структура поверхности не меняется во времени. Мгновенное распределение энергии по масштабам в этом случае также не зависит от времени (рис. 2.8, а). Оно имеет два характерных глобальных максимума, которые связаны с наличием частот f_1 и f_2 , доминирующих в спектре Фурье, построенном для

стрирующей два глобальных максимума, связано, в первую очередь, с особенностями спектра Фурье сигнала. На рис. 2.6 приведен этот спектр в нелогарифмическом масштабе, построенный по отрезку временной реализации $x(t)$, соответствующему ламинарной фазе движения. Хорошо видно наличие двух преобладающих в спектре гармоник с частотами $f_1 = 41.3$ и $f_2 = 131.3$. Эти временные масштабы также хорошо заметны на вейвлетном спектре (см. рис. 2.5) на тех же частотах. Именно благодаря наличию их в спектре мощности на вейвлетной поверхности наблюдается картина из двух максимумов.

С входом системы в турбулентную фазу вид поверхности $|W|$ сильно изменяется. Можно сказать, что в

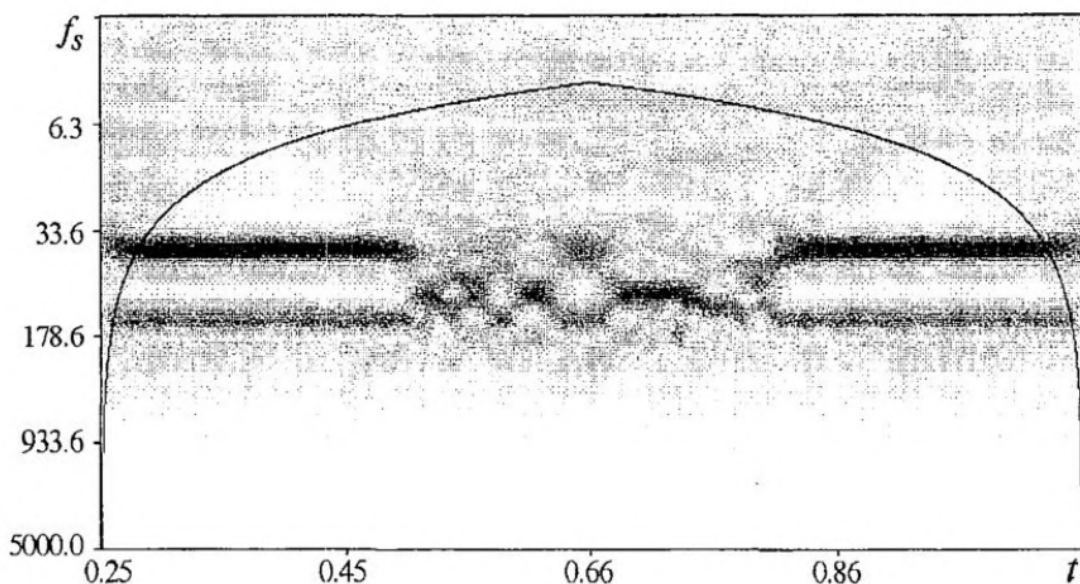


Рис. 2.7. Вейвлетная поверхность $W(t, f_s)$, полученная по временной реализации $x(t)$ системы Лоренца (2.3) с одной турбулентной фазой при параметре надкритичности $r - r^* = 0.03$ ($r=166.1$). Длительность временной реализации $N=2^{13}$ отсчетов, $\Delta t=0.0001$

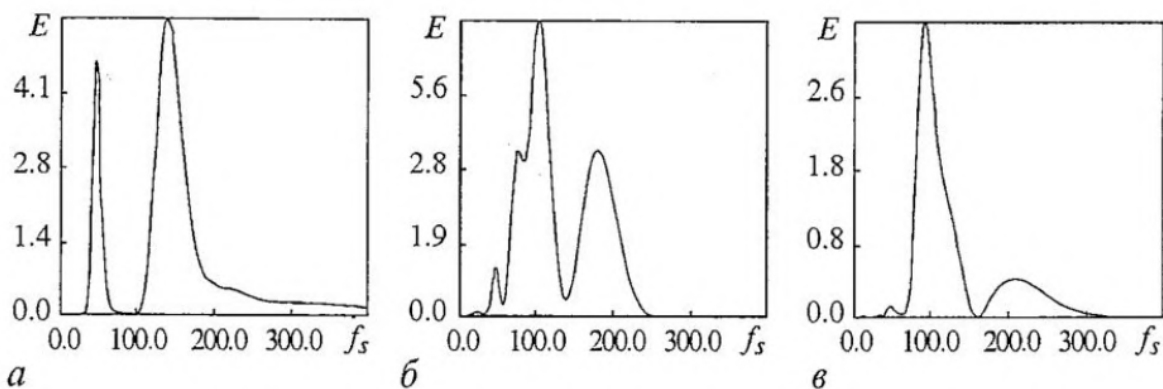


Рис. 2.8. Мгновенные распределения по энергиям, полученные в результате вейвлетного преобразования (см. рис. 2.7), для двух фаз движения в системе Лоренца - ламинарной, $t=0.36$; б - турбулентной, $t=0.56$; в - турбулентной, $t=0.72$

ламинарной фазы. Переход к турбулентной фазе начинается с «расщепления» масштабов $1/f_1$ и $1/f_2$. В результате этого наблюдается выделение в энергетическом спектре одного преобладающего масштаба. Далее на протяжении всей турбулентной фазы наблюдается возбуждение и подавление колебаний в системе на различных временных масштабах, но преимущественно меньших, чем временной масштаб $s_1 = 1/f_1$. Распределение по энергиям существенно нестационарно в хаотической фазе. Единственной его особенностью, наблюдающейся в течение всего хаотического «всплеска», является наличие преобладающего масштаба $1/f_s \sim 0.011$ (знак « \sim » поставлен ввиду того, что расположение максимума меняется и величина 0.011 является усредненной по длительности нескольких турбулентных фаз). Само распределение по энергиям сильно меняется с течением времени. Для иллюстрации на рис. 2.8, б, в представлены мгновенные распределения $E(f_s)$ для моментов времени $t = 0.56$ и $t = 0.72$. Хорошо видно, что они существенно различаются как числом максимумов в спектре, так и расположением их в спектре.

С ростом бифуркационного параметра длительность ламинарных фаз уменьшается, и при $r > 167.0$ ламинарные фазы практически исчезают из временной реализации. Вместе с тем вейвлетный анализ успешно выделяет ламинарные фазы с длительностью порядка 2÷3-х периодов колебаний на основной частоте в спектре. Это иллюстрирует рис. 2.9, на котором представлены результаты вейвлетного преобразования для величины $r=167.0$ (выделены области ламинарных фаз движения). Видно, что на вейвлетной поверхности в соответствующих местах появляется характерная для ламинарной фазы структура в распределении амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования $|W|$.

Аналогичная ситуация наблюдается не только при анализе временных реализаций, порождаемых системой Лоренца и другими потоковыми системами. Это подтверждается, например, результатами анализа временной реализации, порожденной логистическим отображением

$$x_{n+1} = \varepsilon x_n (1 - x_n). \quad (2.4)$$

На рис. 2.10 приведены результаты анализа временной реализации длиной 256 итераций с исключенным переходным процессом. Значение управляющего параметра $\varepsilon^* - \varepsilon = 0.002$. При критическом значении $\varepsilon^* = 1 + (8)^{1/2}$ [8] наблюдался регулярный цикл периода 3, а ниже, при $\varepsilon < \varepsilon^*$, ламинарные фазы прерывались хаотическими всплесками.

Из анализа вейвлетной поверхности и ее сопоставления с временной реализацией видно, что ламинарным фазам движения соответствует также особая

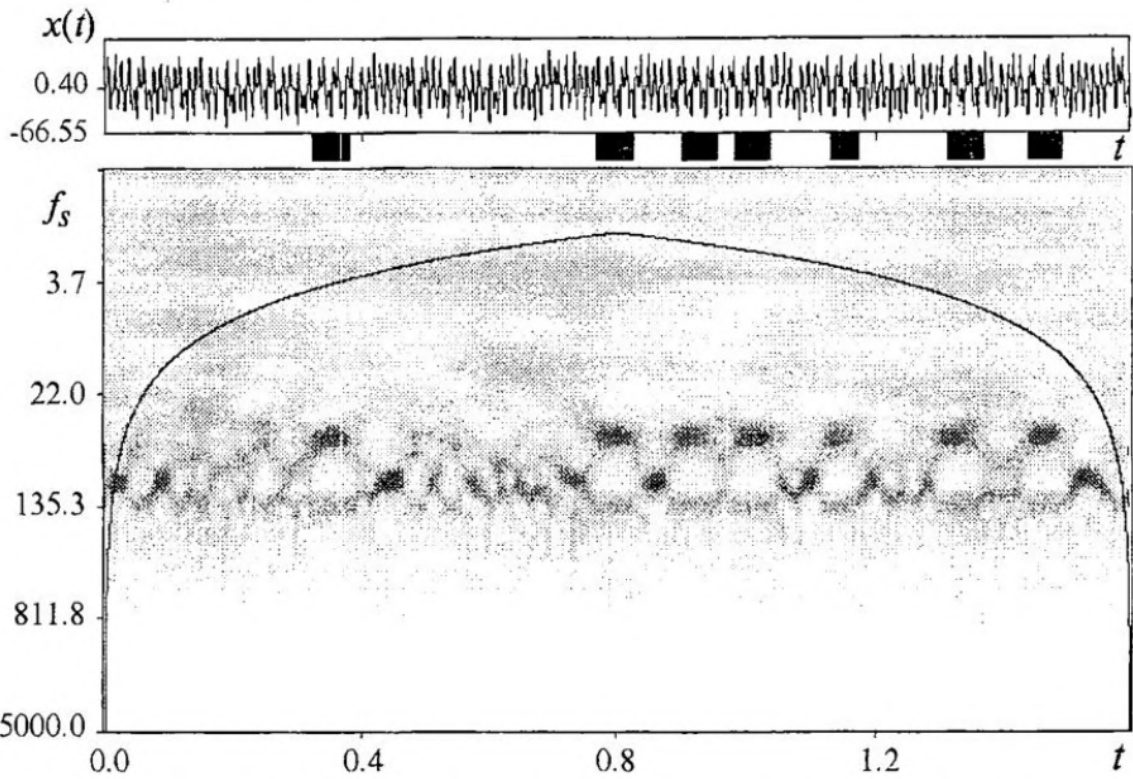


Рис. 2.9. Поверхность $W(t, f_s)$, полученная по временной реализации $x(t)$ системы Лоренца с параметром надкритичности $r-r_c=0.93$ ($r=167.0$). Черными прямоугольниками выделены ламинарные фазы движения

типичная структура поверхности. Выход из области ламинарной фазы движения, как и в случае динамики системы Лоренца, сопровождается характерным расслоением временного масштаба, соответствующего регулярным колебаниям системы. Также существенно различаются характерные распределения энергии

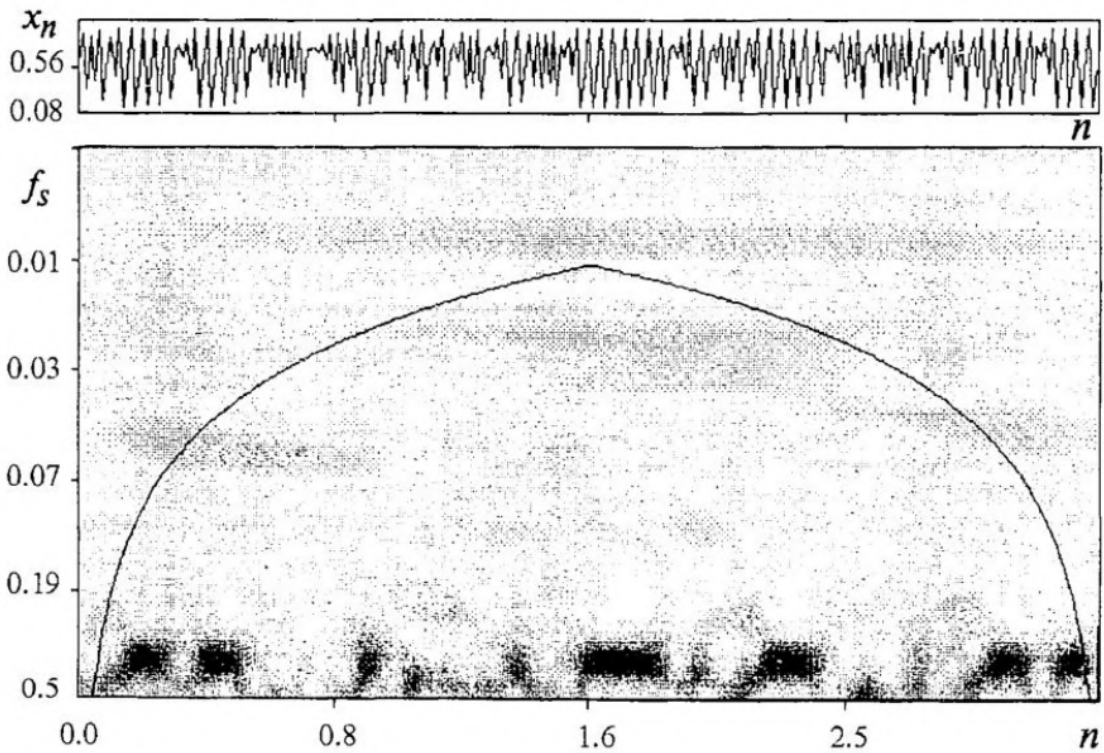


Рис. 2.10. Поверхность $W(n, f_s)$, полученная по временной реализации x_n логистического отображения с параметром $\epsilon=1+(8)^{1/2}-0.002$

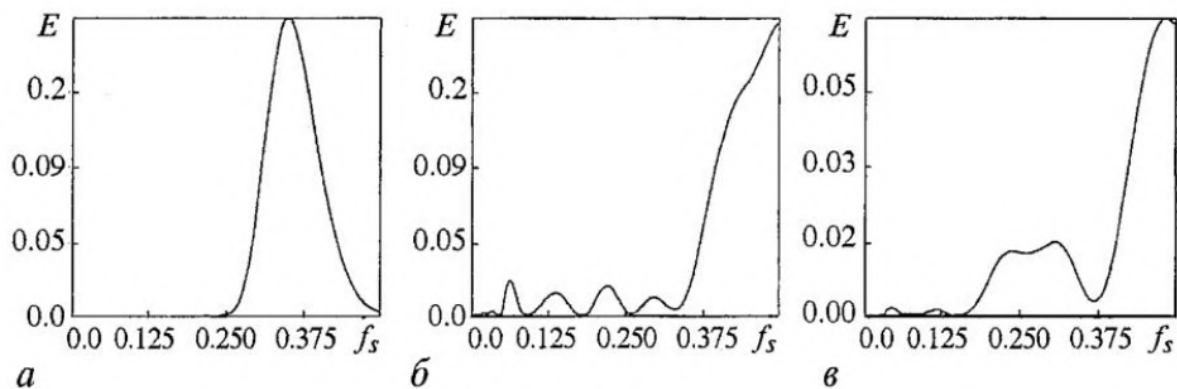


Рис. 2.11. Мгновенные распределения по энергиям, полученные в результате вейвлетного преобразования (см. рис. 2.10) для различных фаз движения в логистическом отображении *a* - ламинарной ($n=136$); *б* - турбулентной ($n=62$); *в* - турбулентной ($n=220$)

колебаний по временным масштабам в режимах хаоса и ламинарной фазы. В последнем случае распределение $E(f_s)$ не меняется и имеет вид, приведенный на рис. 2.11, *a*. В турбулентной фазе движения распределение по энергиям зависит от времени (рис. 2.11, *б*, *в*). Таким образом, результаты вейвлетного анализа, представленные ранее для модели Лоренца, имеют достаточно универсальный характер в плане рассмотрения сценария перехода к хаосу через перемежаемость⁴.

Результаты, рассмотренные выше, свидетельствуют о возможности использования особенностей вейвлетного преобразования временных реализаций систем, демонстрирующих переход к хаосу через перемежаемость, применительно к анализу длительности ламинарных (и турбулентных) фаз движения.

Классическими методами выделения регулярных фаз движения являются методы, основанные на анализе «текущего» периода или амплитуды колебаний. Очевидно, что первый метод может работать лишь тогда, когда ламинарная фаза представляет сигнал очень близкий к строго регулярному, что не всегда имеет место. Реально ламинарная фаза представляет собой **почти** периодическое движение, что затрудняет применение данного метода и снижает его точность. Второй метод может быть применен только в том случае, когда в хаотической области амплитуда колебаний существенно отличается от амплитуды колебаний в регулярном режиме. В противном случае мы опять сталкиваемся с необходимостью иметь строгую периодичность колебаний в фазе ламинарного движения.

С другой стороны, метод выделения регулярных фаз, основанный на вейвлетном преобразовании, оказывается более предпочтительным. Как было обнаружено, структура вейвлетной поверхности в области ламинарной и турбулентной фаз движения существенно различна. Причем слабая нерегулярность сигнала в течение ламинарной фазы движения практически не отражается на структуре вейвлетной поверхности и, следовательно, не будет приводить к ошибке в определении длительности каждой из характерных фаз движения. Поэтому, если тем или иным образом анализировать структуру вейвлетной поверхности, то можно достаточно просто осуществить поиск и определение длительностей ламинарных и турбулентных фаз при перемежаемости [11].

В качестве простейшего метода анализа структуры вейвлетной поверхности

⁴ По крайней мере, это справедливо для перемежаемости I-го рода. К этому типу перемежаемости относится динамика и логистического отображения, и системы Лоренца [8]. Вместе с тем можно ожидать, что анализ поведения систем, демонстрирующих перемежаемость II-го и III-го рода, покажет подобную описанной здесь картину, конечно, с соответствующими особенностями, характерными именно для этих типов.

может быть предложена методика, основанная на определении числа максимумов F на мгновенных распределениях энергии по масштабам колебаний $E(f_s)|_{t=\text{const}}$. В течение ламинарной фазы число максимумов постоянно, при переходе к турбулентной фазе величина F начинает сильно зависеть от времени. На рис. 2.12, *а* демонстрируются результаты такого расчета для сигнала, генерируемого системой Лоренца при значении управляющего параметра $r=166.1$. Из него видно, что предложенная методика позволяет эффективно выделить ламинарные фазы движения. Учитывая, что величина F принимает только целые значения, определить, например, длительность ламинарной фазы движения по зависимости $F(t)$ не представляет сложности. Описанная методика успешно работает и при увеличении параметра надкритичности. Рис. 2.12, *б* демонстрирует результаты расчета зависимости $F(t)$ при значении $r=167.0$ (см. рис. 2.9, на котором

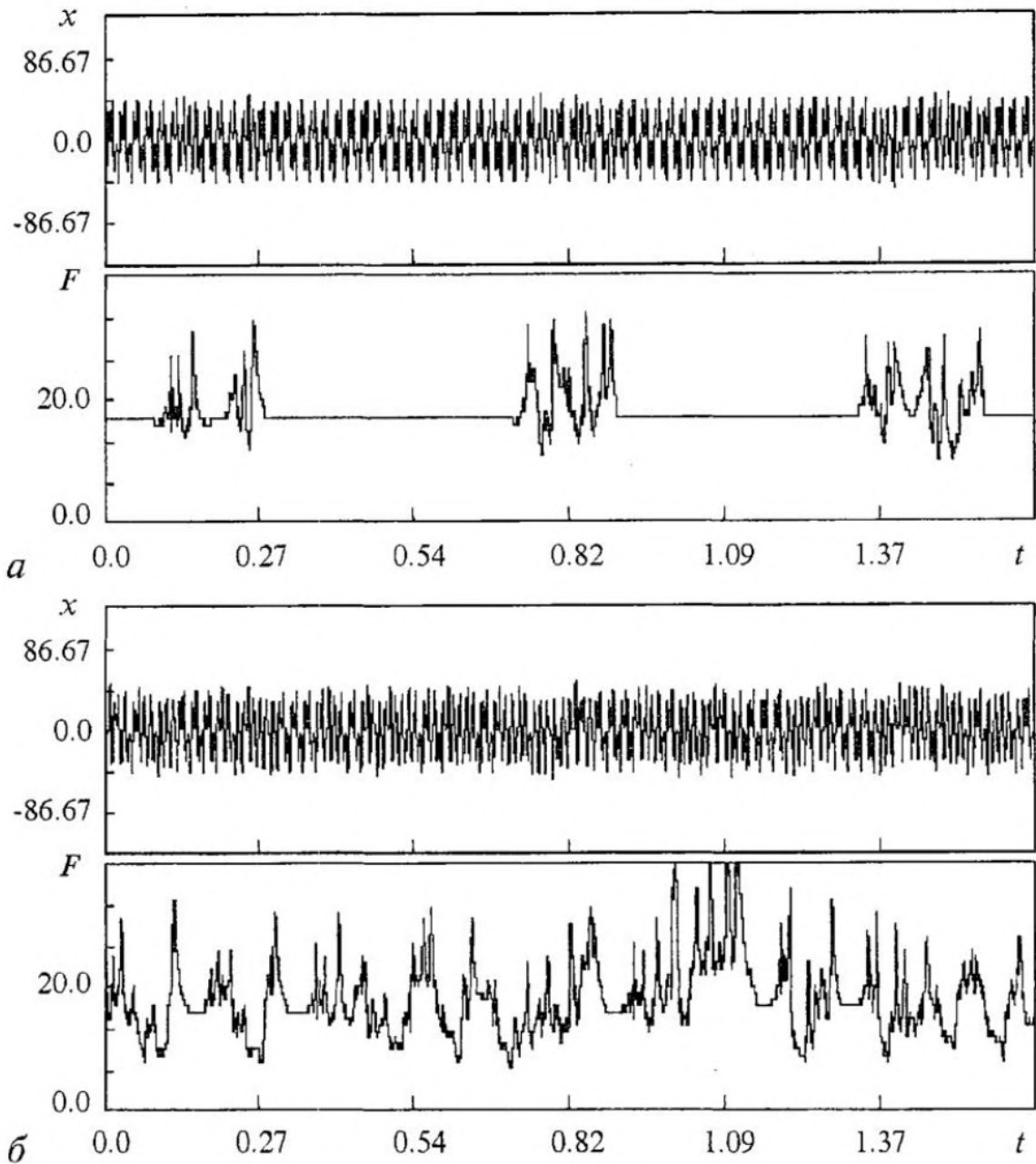


Рис. 2.12. Зависимости от времени числа максимумов F на мгновенных распределениях энергии E , определенные по временным реализациям системы Лоренца для следующих значений управляющего параметра r : *а* - 166.1; *б* - 167.0

представлена соответствующая поверхность амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования при таком значении параметра r). Видно, что и в этом случае существенно более короткие ламинарные фазы легко обнаруживаются с применением описанной методики анализа вейвлетной поверхности.

Для иллюстрации данного метода были определены средние длительности l ламинарных и турбулентных фаз движения в зависимости от параметра надкритичности r . Число ламинарных фаз (а соответственно, и турбулентных фаз), по которым определялись данные характеристики, составляло порядка $600 \div 800$. На рис. 2.13 представлены результаты расчета для системы Лоренца⁵. Средняя длительность ламинарной фазы движения уменьшается с ростом r , а средняя длительность хаотической фазы меняется существенно слабее, хотя и имеет тенденцию к увеличению с ростом надкритичности. Последнее вполне объяснимо, так как хаотическая фаза движения есть ничто иное как стадия реламинаризации, то есть возвращение к регулярному движению. Понятно, что длительность реламинаризации не зависит от параметра надкритичности r . На рис. 2.14 показана зависимость $\ln l$ от величины $\ln(r - r^*)$. Благодаря логарифмическому масштабу легко можно убедиться, что уменьшение длительности ламинарной фазы происходит пропорционально квадратному корню из расстояния $(r - r^*)$ от порога перемежаемости (по крайней мере, при небольших значениях величины $(r - r^*)$), что и предсказывает теория перемежаемости I-го рода. Таким образом, предложенный метод подтверждает результаты, хорошо известные в литературе.

Аналогичные результаты были получены для длительностей ламинарных и турбулентных фаз при анализе логистического отображения в диапазоне управляющего параметра $\epsilon \in (1.738, 1.752)$. На рис. 2.15 приведены зависимости длительностей ламинарных и турбулентных фаз от ϵ . Как и в случае соответствующих зависимостей, полученных для системы Лоренца, длительность регулярной фазы коле-

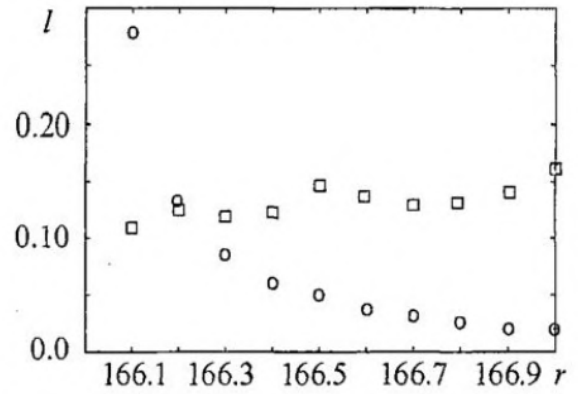


Рис. 2.13. Средняя длительность ламинарной (o) и турбулентной (□) фаз колебаний $x(t)$ в модели Лоренца вблизи порога перемежаемости в зависимости от параметра надкритичности r

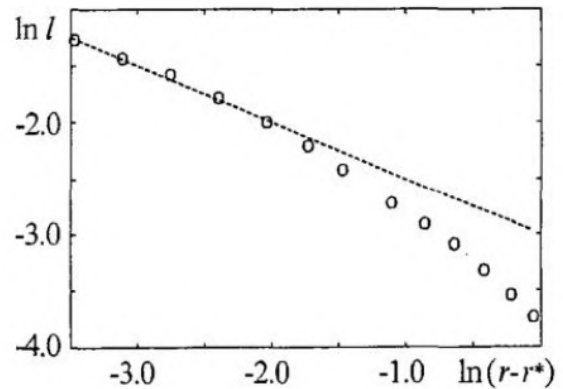


Рис. 2.14. Средняя длительность ламинарной фазы движений вблизи порога перемежаемости (двойной логарифмический масштаб): (o) - результаты работы процедуры выделения ламинарных фаз с помощью вейвлетного преобразования; пунктирная линия - степенная функция от величины $(r - r^*)$ с показателем « $1/2$ ». Хорошо видно, что при малом превышении порога перемежаемости ($r > r^*$) рост длительности $\langle l \rangle$ пропорционален $(r - r^*)^{1/2}$, как и предсказывает теория. При больших величинах надкритичности наблюдается отклонение роста длительности ламинарной фазы от степенного закона

⁵ Машинное время обработки одной реализации такой длительности на персональном компьютере с процессором PII 400 MHz и ОЗУ 128 MB составляло примерно 40 мин.

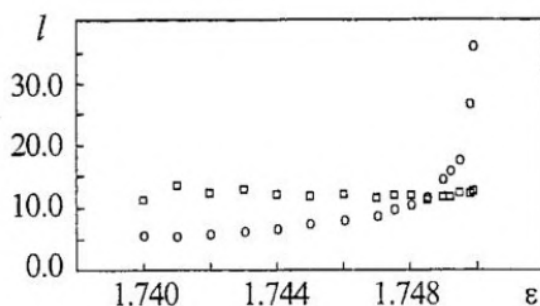


Рис. 2.15. Средняя длительность ламинарной (o) и турбулентной (\square) фаз колебаний x_n в логистическом отображении вблизи порога перемежаемости в зависимости от управляющего параметра ϵ

баний растет с ростом параметра по степенному закону, а длительность турбулентной фазы остается примерно постоянной при различных значениях ϵ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 01-02-17392 и 02-02-16531) и CRDF REC-006.

Библиографический список

1. Rössler O.E. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. 1976. Vol. 57A. P. 397.
2. Takens F. Detecting strange attractors in dynamical systems and turbulence / In: Lectures Notes in Mathematics. Warwick, 1980 / Eds Rand D. and Young L.-S. N.Y.: Springer-Verlag, 1981. P. 366.
3. Короновский А.А., Храмов А.Е. Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Часть 1 // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9. № 4,5. С. 3.
4. Manneville P., Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical system // Physica D. 1980. Vol. 1. P. 219.
5. Manneville P., Pomeau Y. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical system // Comm. Math. Phys. 1980. Vol. 74. P. 189.
6. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodical flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20. P. 130.
7. Manneville P., Pomeau Y. Intermittency and the Lorenz model // Phys. Lett. 1979. Vol. 75A. P. 1.
8. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
9. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
10. Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е. Вейвлетный анализ и его использование для анализа динамики нелинейных динамических систем различной природы // Изв. РАН, сер. физическая. 2000. Т. 64, № 12. С. 2383.
11. Короновский А.А., Храмов А.Е. Об эффективном анализе перехода к хаосу через перемежаемость с помощью вейвлетного преобразования // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, № 1. С. 3.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 18.01.2002

AN INTRODUCTION TO CONTINUOUS WAVELET ANALYSIS FOR SPECIALISTS IN FIELD OF NONLINEAR DYNAMICS.

Part 2. Routes to chaos from point of wavelet analysis

A.A. Koronovskii, A.E. Hramov

This article is continuation of the work earlier published at the same journal. From positions of the continuous wavelet analysis the features of universal routes to the chaos realized in nonlinear finite-dimensional systems are illustrated: transition to the chaos through the bifurcation cascade of the period doubling and transition to the chaos through the intermittency.



Короновский Алексей Александрович - родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Опубликовал в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым монографию «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996). Автор ряда статей в центральной печати.



Храмов Александр Евгеньевич - окончил Саратовский государственный университет (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика распределенных систем, методы анализа и моделирования динамических систем, мощная СВЧ-электроника.

E-mail: aeh@cas.ssu.runnet.ru