



СЛОЖНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПЛАНЕ

В.А. Крысько, А.А. Сопенко, Е.В. Салий

Введение

В работе рассматриваются колебания геометрически и физически нелинейной пологой оболочки под действием переменной во времени поперечной нагрузки. Уравнения движения были выведены с помощью вариационного принципа Гамильтона - Остроградского. Численный алгоритм интегрирования этих уравнений применен для описания процессов перехода от периодических колебаний к хаотическим для некоторых конкретных оболочечных систем. Предложен критерий динамической потери устойчивости для оболочек, находящихся под действием гармонического возбуждения.

С начала 1970-х годов исследования нелинейных колебаний составляют один из важнейших разделов динамики оболочек. Им посвящены, например, монографии [1-4], а также многие работы, опубликованные в научной периодике. Этот интерес вызван практической необходимостью учета в новых технологиях больших прогибов и использования материалов, упругие свойства которых не позволяют применять классический закон Гука, что и приводит к принятию нелинейных соотношений между деформациями и перемещениями (геометрическая нелинейность), а также между деформациями и усилиями (физическая нелинейность).

При рассмотрении зависимости прогиба от нагрузки особое внимание привлекает переходный процесс в движении оболочки от ее регулярных колебаний к полной потере устойчивости. Такой процесс обычно заключает в себе скачкообразные переходы (бифуркации) от установленвшегося режима одного типа к некоторому другому режиму при достижении определенного критического уровня внешнего воздействия. Изучение подобных процессов для элементов различных конструкций (стержней, балок, пластин, оболочек) показало, что указанные последовательности бифуркаций при условии нелинейности могут приводить не только к многорежимным периодическим и квазипериодическим колебаниям, но и к хаотическим движениям, представляющим собой установившиеся нерегулярные колебания, в принципе допускающие воспроизведение. Естественную трактовку эти явления получили в рамках общей теории динамических систем, новый этап в развитии которой начался также в 1970-е

годы. Появление понятий детерминированного хаоса и странного аттрактора позволило лучше понять эволюцию колебательных процессов. В теории упругих систем все шире используются идеи и методы нелинейной динамики, изложенные в ориентированных на приложения монографиях (например, [5-8]). Особую роль при этом играет вычислительная техника, без применения которой невозможно было бы даже подступиться к численному решению уравнений в частных производных, образующих соответствующие математические модели. Отметим некоторые важнейшие в смысле рассматриваемой тематики публикации.

В 1979 году Холмс [9] подробно исследовал хаотические движения слегка выпученного стержня, подвергающегося боковому синусоидальному возмущению. Мун [10], рассматривая гармонически вынужденное движение выгнутого стержня, предложил критерий установления порогового для возникновения хаоса значения амплитуды. В обзорном докладе Ханагуда и Алани [11] для стержневых систем описаны различные пути перехода к хаосу в колебательных процессах. Начиная с 1985 года, Саймондс с сотрудниками опубликовал серию работ, в которых изучаются хаотические реакции балок с закрепленными концами (см. например, [12]). Эти исследования были продолжены и расширены в статьях У. Лепика (например, [13]). В частности, им была получена оценка пороговой величины поперечной динамической нагрузки, при которой колебания упругопластической балки становятся хаотическими. Бифуркационные механизмы перехода к хаосу в сложных колебаниях балок под действием квазипериодического нагружения проанализированы в работе Ягасаки [14]. Я. Аврейцевич, В.А. Крысько и А.В. Крысько [15] изучали общие механизмы перехода к хаосу в диссипативных пластиначатых конструкциях. Детально описали механизмы возникновения хаоса в случае вынужденных параметрических колебаний пластинок В.А. Крысько, Т.В. Вахлаева и А.В. Крысько [16].

Условиям, при которых реализуется переходный сценарий Фейгенбаума для нелинейных колебаний тонких пластинок, посвящена работа Я. Аврейцевича и В.А. Крысько [17]. У. Лепик [18] исследовал возможность возникновения хаотических эффектов в установившихся осесимметричных колебаниях упругопластических цилиндрических оболочек. Сценарий перехода к хаотическим колебаниям для консервативных и диссипативных систем в теории гибких цилиндрических панелей при действии знакопеременных продольных нагрузок рассматривали А.В. Крысько, С.А. Мицкевич и Ю.В. Чеботаревский [19]. Хаотические движения квадратной в плане оболочки под действием импульсной периодической нагрузки исследовали В.А. Крысько и А.В. Кириченко [20].

Из приведенного краткого обзора видно, что в отличие от впечатляющих успехов, достигнутых в изучении нелинейных колебательных систем, связанных в первую очередь с электроникой и радиотехникой, хаотическая динамика упругих систем пока находится в стадии становления, в основном идет накопление фактического материала. В особенности это относится к теории пластин и оболочек.

В настоящей работе объектом исследования являются сложные колебания геометрически и физически нелинейной пологой оболочки с прямоугольным планом, вызванные действием поперечной равномерно распределенной знакопеременной нагрузки. На основе разработанных авторами [21] математической модели и численного алгоритма проведены компьютерные эксперименты с целью выявления возможных бифуркационных механизмов перехода к хаосу. Обнаруженные закономерности позволили также впервые сформулировать динамический критерий потери устойчивости для оболочечных систем с зависящей от времени нагрузкой, - в условиях геометрической и физической нелинейностей вопрос о потери устойчивости до сих пор не рассматривался.

Математическая модель

Рассмотрим прямоугольную в плане пологую оболочку с размерами a, b, h вдоль осей x_1, x_2, x_3 , соответственно. Начало координат расположено в левом верхнем углу оболочки в ее срединной поверхности. Оси x_1, x_2 параллельны сторонам оболочки, ось x_3 направлена внутрь кривизны. Через u_1, u_2 обозначим перемещения вдоль осей x_1, x_2 . При этом прогиб (вдоль оси x_3) для удобства в отличие от остальных перемещений будем записывать как w . Материал оболочки считается изотропным. Принимается гипотеза Кирхгофа - Лява о недеформируемости нормалей.

Соотношения между деформациями ϵ и перемещениями в срединной поверхности задаются в нелинейном виде (геометрическая нелинейность)

$$\begin{aligned}\epsilon_{ii} &= \partial u_i / \partial x_i - k_i w + 1/2(\partial w / \partial x_i)^2, \quad (i=1,2), \\ \epsilon_{12} &= \partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1 + (\partial w / \partial x_1)(\partial w / \partial x_2).\end{aligned}\quad (1)$$

Зависимость между компонентами напряжения и деформациями выбирается в форме Каудерера [22] (физическая нелинейность)

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 3K\alpha(e_0)e_0 + 2G\gamma(e_i)(e_{11} - e_0), \\ \sigma_{22} &= 3K\alpha(e_0)e_0 + 2G\gamma(e_i)(e_{22} - e_0), \\ \sigma_{12} &= G\gamma(e_i)e_{12},\end{aligned}\quad (2)$$

где K - модуль объемного сжатия; G - модуль сдвига; $e_0 = 1/3(e_{11} + e_{22} + e_{33})$ - средняя деформация; e_i - интенсивность деформаций; $\alpha(e_0)$ - функция удлинения; $\gamma(e_i)$ - функция сдвига. Функции $\alpha(e_0)$ и $\gamma(e_i)$ характеризуют физическую нелинейность материала. Для многих материалов с большой точностью можно считать $\alpha(e_0)=1$, что мы и примем. Пусть $\sigma_i(e_i)$ обозначает зависимость интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i . Она для каждого материала является вполне определенной и не зависит от характера напряженного состояния. В случае малых упругопластичных деформаций $\gamma(e_i) = 1 - \omega(e_i)$, где $\omega(e_i) = [3Ge_i - \sigma_i(e_i)]/(3Ge_i)$ - функция А.А. Ильюшина. Таким образом, $\gamma(e_i) = \sigma_i(e_i)/(3Ge_i)$. Для получения исходных уравнений использовался вариационный принцип Гамильтона - Остроградского.

Уравнения движения получены в смешанной форме и приведены к безразмерному виду

$$\begin{aligned}1/[12(1 - \nu^2)]\nabla^4 w - L(w, F) - \nabla_k^2 F - \\ - \lambda^{-1}(\Delta M_{11})_{x_1 x_1} - \lambda(\Delta M_{22})_{x_2 x_2} - 2(\Delta M_{12})_{x_1 x_2} - q + \alpha(\ddot{w} + \epsilon \dot{w}) = 0, \\ \nabla^4 F + \nabla_k^2 w + 1/2L(w, w) - \\ - \lambda^{-1}(\Delta T_{22} - \nu \Delta T_{11})_{x_1 x_1} - \lambda(\Delta T_{11} - \nu \Delta T_{22})_{x_2 x_2} + 2(1 + \nu)(\Delta T_{12})_{x_1 x_2} = 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь F - функция усилий; q - поперечная нагрузка; ϵ - коэффициент демпфирования; члены вида ΔT и ΔM - учитывающие физическую нелинейность слагаемые в выражениях, соответственно для усилий и моментов; $\lambda = a/b$, $\alpha = (a^2 b^2 \rho)/(Eh^6)$, ρ - плотность материала, E - модуль Юнга; ν - коэффициент Пуассона; L и ∇_k^2 - дифференциальные операторы: $L(\cdot, \circ) = \partial^2(\cdot)/\partial x_1^2 \partial^2(\circ)/\partial x_1^2 + \partial^2(\cdot)/\partial x_2^2 \partial^2(\circ)/\partial x_2^2 - 2\partial^2(\cdot)/(\partial x_1 \partial x_2) \partial^2(\circ)/(\partial x_1 \partial x_2)$, $\nabla_k^2(\cdot) = k_1 \partial^2(\cdot)/\partial x_2^2 + k_2 \partial^2(\cdot)/\partial x_1^2$; k_1, k_2 - безразмерные параметры кривизны.

Использованы следующие безразмерные переменные:

$$\bar{x}_1 = x_1/a, \quad \bar{x}_2 = x_2/b, \quad \bar{w} = w/h, \quad \bar{F} = F/(Eh^3), \quad \bar{q} = qa^2b^2/(Eh^4), \quad (4)$$

$$\bar{\Delta T}_{ij} = \Delta T_{ij} ab/(Eh^3), \quad \bar{\Delta M}_{ij} = \Delta M_{ij} ab/(Eh^4).$$

Полученная система уравнений в частных производных и является математической моделью динамики дважды нелинейной пологой оболочки на прямоугольном плане с приложенной поперечной нагрузкой.

В качестве начальных условий в общем случае принимаются $w|_{t=0} = f_1(x_1, x_2)$, $\dot{w}|_{t=0} = f_2(x_1, x_2)$. Из различных возможных граничных условий в проведенных численных экспериментах использовались шарнирное опирание на гибкие нерастяжимые в касательной плоскости ребра и скользящая заделка.

Численные эксперименты

Рассматривается диссипативная ($\epsilon = 1$) система в виде квадратной в плане ($\lambda = a/b = 1$) сферической оболочки, совершающая колебания под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности $q = q_0 \sin \omega t$. Оболочка изготовлена из сплава АМц и имеет следующие геометрические и физические параметры: $a = b = 0,1$ м, $h = 0,89 \cdot 10^{-3}$ м, $E = 69$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\rho = 2800$ кг/м³, $a/h = 110$. Зависимость $\sigma_i (e_i)$ аппроксимирована билинейной диаграммой

$$\sigma_i = Ee_i, \quad e_i \leq e_s, \quad (5)$$

$$\sigma_i = Ee_s + E^* (e_i - e_s), \quad e_i > e_s,$$

где $e_s = 1,35 \cdot 10^{-3}$; $E^*/E = 0,4478$.

Возникновение остаточных деформаций не учитывается.

В качестве начальных условий примем $w|_{t=0} = 0$, $\dot{w}|_{t=0} = 0$.

Краевые условия:

- шарнирное опирание на гибкие нерастяжимые в касательной плоскости ребра

$$w = 0, M_{11} = 0, \dot{\epsilon}_{22} = 0, \partial \epsilon_{22} / \partial x_1 - \partial \epsilon_{12} / \partial x_2 = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a; \quad (6)$$

$$w = 0, M_{22} = 0, \dot{\epsilon}_{11} = 0, \partial \epsilon_{11} / \partial x_2 - \partial \epsilon_{12} / \partial x_1 = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, x_2 = b;$$

- скользящая заделка

$$w = 0, \partial w / \partial x_1 = 0, T_{11} = 0, \epsilon_{22} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a, \quad (7)$$

$$w = 0, \partial w / \partial x_2 = 0, \epsilon_{11} = 0, T_{22} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, x_2 = b.$$

Для изучения характера колебаний была взята оболочка под действием знакопеременной нагрузки с частотой, совпадающей с собственной линейной частотой колебаний оболочки, и частотами, находящимися в окрестностях собственной линейной частоты. Колебания рассматривались на интервале времени $t \in [0, 50]$, так как увеличение временного интервала не приводило к появлению новых качественных и количественных явлений. Исследования показали, что качественная картина процесса колебаний для всех точек оболочки одинакова, поэтому дальнейший анализ отнесен к ее центральной точке $w(0,5, 0,5)$. Описывая переходные процессы в движениях оболочки, будем устанавливать вид ее

колебаний с помощью временного ряда, фазового портрета, сечения Пуанкаре, спектра мощности и др. Детальное исследование переходных процессов в нелинейных колебаниях диссипативных оболочечных систем в настоящей работе проводится впервые. Наблюдения, полученные в ходе компьютерных экспериментов, сопоставляются с известными сценариями переходов динамических систем к хаосу: Фейгенбаума, Помо - Манневиля, Рюэля - Такенса. Заметим, что, говоря, например, о сценарии Рюэля - Такенса, мы имеем в виду аналогичную, но с допустимыми отклонениями, эволюцию движения оболочки, то есть сценарий типа Рюэля - Такенса.

В результате численного эксперимента было выявлено несколько типов колебательных режимов. На рис. 1 представлены наиболее характерные для каждого типа графики: временной ряд $w(t)$, проекция фазовой траектории w , (w) , сечение Пуанкаре, спектр мощности. Символом Π обозначены периодические колебания на соответствующих частотах, K - квазипериодические колебания, Pe - перемежаемость, X - хаотические колебания.

Рассмотрим сценарии перехода в хаотическое состояние колебаний оболочек с краевыми условиями (6), шарнирное опирание, при безразмерном параметре кривизны $k_1 = k_2 = a^2/hR = 18$ и частоте вынуждающих колебаний $\omega \in [16, 21]$, собственная линейная частота $\omega_0 \approx 17.6$. Для фиксированной частоты вынуждающих колебаний ω изменяется величина нагрузки q_0 и при этом прослеживается эволюция процесса движения оболочки от периодических колебаний до появления хаотических эффектов. Результаты наблюдений представлены в табл. 1.

Таблица 1

$\omega = 16.0$	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \Pi(k\omega_1) \rightarrow X$
17.6	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \Pi(k\omega_1) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow X$
19.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/2) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow X$
21.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow \Pi(k\omega_1/4) \rightarrow X$

Таким образом, в случае шарнирного опирания при $k_1 = k_2 = 18$ переход к хаосу происходит через разрушение квазипериодических колебаний, что можно условно назвать сценарием типа Рюэля - Такенса.

В табл. 2 представлены результаты, полученные для шарнирно опертой оболочки при кривизне $k_1 = k_2 = 24$ и частотах $\omega \in [18; 26]$, $\omega_0 \approx 21.5$.

Таблица 2

$\omega = 18.0$	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/2) \rightarrow \Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/3) \rightarrow X$
20.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/2) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow X$
21.5	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/3) \rightarrow \Pi(k\omega_1/4) \rightarrow \Pi(k\omega_1/3) \rightarrow \Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/3) \rightarrow X$
24.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \Pi(k\omega_1/3) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow X$
26.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow K(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/2) \rightarrow X$

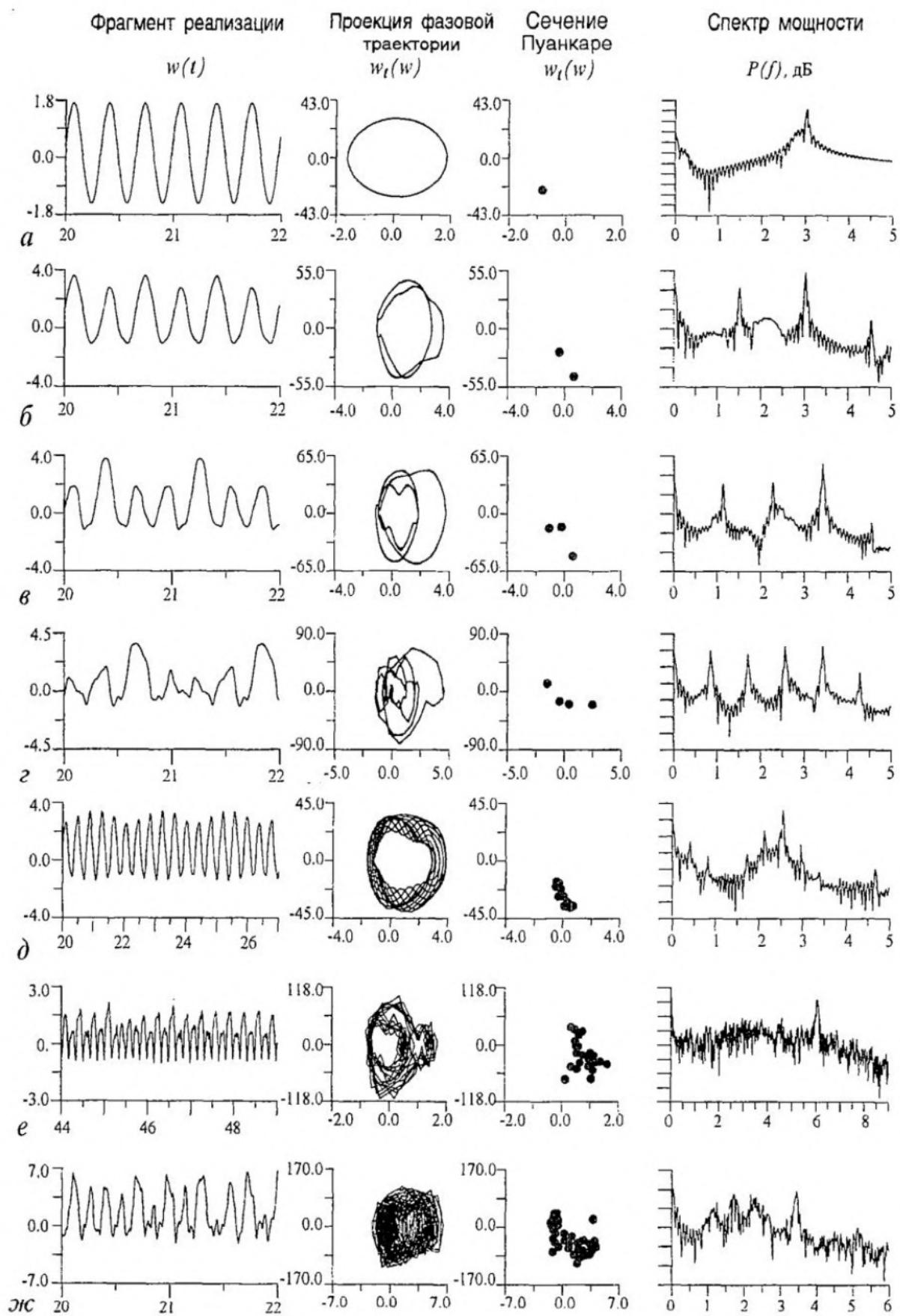


Рис. 1. Характеристики выявленных колебательных режимов: *а* - $\Pi(k\omega_1)$; *б* - $\Pi(k\omega_1/2)$; *в* - $\Pi(k\omega_1/3)$; *г* - $\Pi(k\omega_1/4)$; *д* - $K(\omega_1, \omega_2)$; *е* - $\Pi\epsilon$; *ж* - X

Итак, в случае шарнирного опирания при $k_1 = k_2 = 24$ наряду со схемой Рюэля - Такенса (с небольшими отклонениями от нее) при некоторых значениях вынуждающей частоты переход к хаотическому движению происходит через серию бифуркаций периодических колебаний.

Сценарии перехода в хаотическое состояние колебаний оболочки с краевыми условиями (7) - скользящая заделка, безразмерным параметром кривизны $k_1 = k_2 = 18$, частотой вынуждающих колебаний $\omega \in [28, 37]$, $\omega_0 \approx 33$ представлены в табл. 3.

Таблица 3

$\omega = 28.0$	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow \text{X}$
30.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow \text{X}$
33.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{K}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{X}$
35.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow \text{K}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow \Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{X}$
37.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/2) \rightarrow \text{K}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{X}$

Видно, что в случае скользящей заделки с $k_1 = k_2 = 18$ при совпадении вынуждающей частоты с собственной частотой колебаний переходная схема может быть описана как сценарий типа Рюэля - Такенса; для вынуждающих частот, меньших собственной частоты, имеет место схема, подобная сценарию Помо - Манневиля; для вынуждающих частот, больших собственной частоты, четкая аналогия со стандартными сценариями не прослеживается.

В табл. 4 представлены результаты вычислительного эксперимента с математической моделью оболочки при $k_1 = k_2 = 24$ и $\omega \in [38, 46]$ для $\omega_0 \approx 41.9$.

Таблица 4

$\omega = 38.0$	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow \text{X}$
40.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/2) \rightarrow \Pi(k\omega_1/3) \rightarrow \text{X}$
41.9	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{K}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{X}$
44.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \Pi(k\omega_1/2) \rightarrow \Pi(k\omega_1/4) \rightarrow \text{X}$
46.0	$\Pi(k\omega_1) \rightarrow \text{Пе} \rightarrow \text{X}$

Таким образом, в случае скользящей заделки с $k_1 = k_2 = 24$ при совпадении вынуждающей частоты с собственной частотой колебаний переходная схема может быть описана как сценарий типа Рюэля - Такенса; для вынуждающих частот, отличающихся от собственной частоты, переходные процессы протекают по аналогии со сценариями Помо - Манневиля или Фейгенбаума.

Общий вывод по результатам проведенных вычислительных экспериментов: в оболочечных системах исследуемого вида процессы перехода от регулярных колебаний к хаотическим в основном укладываются в рамки схем, аналогичных известным в нелинейной динамике сценариям, хотя полного совпадения не наблюдается; единого сценария, который не зависел бы от кривизны и краевых условий, нет.

Динамическая потеря устойчивости

В случае автономных (то есть с не зависящей от времени нагрузкой) оболочечных систем известно несколько динамических критериев потери устойчивости. Так, Б.Я. Кантор [23] в качестве динамического критерия условно принимает, что оболочка прохлопывает, если прогиб в центре достигает значения, большего относительной высоты $w \approx 2f$, где f - высота подъема оболочки над планом. А.С. Вольмир [1] в качестве динамического критерия принимает быстрый рост прогиба при незначительном изменении нагрузки. Шио, Сунг и Рот [24] отметили, что в начале динамического процесса потери устойчивости при увеличении нагрузки время, необходимое для достижения значительной амплитуды прогиба, также растет до тех пор, пока не будет достигнуто некоторое значение нагрузки, выше которого рассматриваемый диапазон времени начинает убывать. Нагрузка, при которой начинается обратный процесс изменения времени, необходимого для достижения первого максимума, считается критической.

Для неавтономных оболочечных систем в настоящий момент динамические критерии потери устойчивости не разработаны, хотя свойства, обнаруженные упомянутыми авторами, во многих конкретных случаях отмечаются и здесь. В частности, Холмс [9] провел физический эксперимент по слегка выпущенному стержню, подвергающемуся боковому синусоидальному возмущению. Этот стержень можно рассматривать как бесконечно длинную пологую цилиндрическую панель. Показаны две близкие конфигурации потери устойчивости, два закритических равновесных состояния. Качественно данное явление обнаружено и в наших исследованиях.

В настоящей работе сделана попытка дать точную формулировку динамического критерия потери устойчивости для случая колебания пологой оболочки на прямоугольном плане под действием поперечного знакопеременного нагружения. Для этого строятся зависимости «нагрузка - прогиб» и «нагрузка - интенсивность деформаций» на верхней поверхности оболочки при $x_1 = x_2 = 0.5$, $x_3 = -0.5$, а также зависимость «нагрузка - усилие». Все зависимости строились в одни и те же моменты времени, соответствующие максимальным прогибам оболочки.

Анализ полученных результатов позволяет установить следующие закономерности. В тех случаях, когда прогиб быстро растет при незначительном увеличении нагрузки, наблюдается убывание интенсивности деформаций. При этом точке перегиба функции $w(q_0)$ соответствует точка экстремального значения на графике $e_i(q_0)$ (см. рис. 2). Как отмечалось, быстрый рост прогиба при незначительном увеличении нагрузки является динамическим критерием потери устойчивости в случае постоянной во времени нагрузки. Можно считать, что указанные экстремальные точки функции $e_i(q_0)$ являются индикаторами качественной перестройки колебательного процесса оболочки. Кроме того, оболочка в начальном своем состоянии под действием нагрузки имеет отрицательные усилия в срединной поверхности, при увеличении интенсивности нагрузки происходит смена знака усилий. Это свидетельствует о том, что оболочка выгнулась и начинает колебаться вокруг нового состояния равновесия. Указанные три зависимости хорошо согласуются между собой и в совокупности дают критерий динамической потери устойчивости для неавтономных оболочечных систем рассматриваемого типа.

Рассмотрим пример шарнирно опертой по контуру оболочки при $k_1 = k_2 = 24$; $\omega = 24$. На рис. 2 видно, что в точке I при нагрузке $q_0 = 100$ усилие в срединной поверхности меняет свой знак с минуса на плюс. Одновременно, начиная с этой же точки, наблюдается быстрый рост прогибов при незначительном увеличении

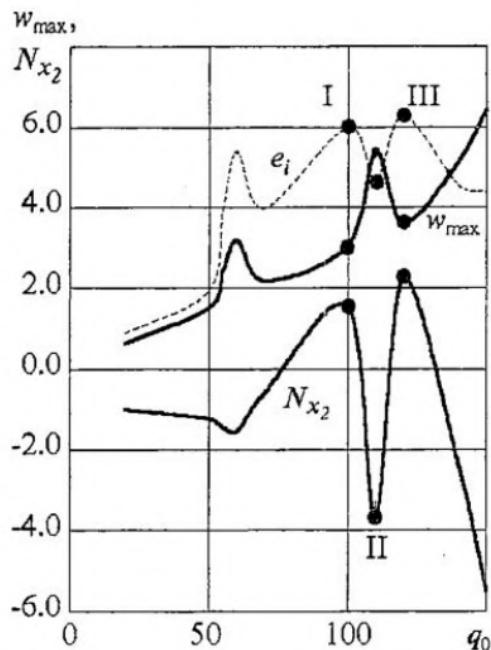


Рис. 2. Зависимость максимального прогиба w_{\max} , усилия N_{x_2} и интенсивности деформаций e_i от нагрузки q_0 для краевых условий (6) - шарнирное опирание

Рис. 3. Зависимость максимального прогиба w_{\max} , усилия N_{x_2} и интенсивности деформаций e_i от нагрузки q_0 для краевых условий (7) - скользящая заделка

нагрузки, а на графике $e_i(q_0)$ при той же величине нагрузки появляется экстремальная точка. Анализируя основные характеристики (временной ряд, фазовый портрет, сечение Пуанкаре и спектр мощности), мы видим, что при $q_0=60$ начинается переход системы из режима квазипериодических в режим периодических колебаний.

В точке II на графике усилия $N_{x_2}(q_0=110)$ происходит новая смена знака с плюса на минус (выхлоп оболочки). На графике $e_i(q_0)$ появляется вторая экстремальная точка, а на графике $w(q_0)$ начинается быстрое изменение значений прогибов. Одновременно происходит бифуркация периодических колебаний. В точке III ($q_0=120$) происходит повторная потеря устойчивости. Усилие в очередной раз меняет знак с минуса на плюс. Значения прогибов вновь начинают возрастать, на зависимости «нагрузка - интенсивность деформаций» появляется очередная экстремальная точка. В колебаниях оболочки происходит качественная перестройка: периодический режим сменяется двухчастотным квазипериодическим. После этого происходит последняя смена знака усилий, и оболочка переходит к хаотическим движениям в вывернутом состоянии.

Рассмотрим еще пример, но уже для скользящей заделки при $k_1=k_2=12$, $\omega=23$, $\omega_0 \approx 25.2$ (рис.3). При величине нагрузки $q_0=250$ (точка I) происходит бифуркация периодических колебаний, в результате которой наступают колебания типа $\Pi(k\omega_1/3)$. В этот момент на графике зависимости $w(q_0)$ появляется точка перегиба, на графике $e_i(q_0)$ наблюдается экстремальная точка, а на зависимости $N_{x_2}(q_0)$ происходит смена знака на плюс. Оболочка, меняя режим колебаний сначала на квазипериодический ($q_0=410$), а затем на хаотический ($q_0=520$), продолжает находиться в новом равновесном состоянии.

Выводы

- С помощью вычислительных экспериментов выявлены бифуркационные механизмы перехода в хаотическое состояние колебаний геометрически и физически нелинейных оболочек под действием гармонического возбуждения.

Установлено, что переходные процессы зависят от кривизн оболочки, краевых условий, частоты вынуждающих колебаний и некоторых других параметров, то есть единого сценария перехода нет. При этом составными элементами полученных сценариев являются известные в нелинейной динамике схемы перехода к хаосу.

- На основании анализа зависимостей «нагрузка - прогиб», «нагрузка - интенсивность деформаций» и «нагрузка - усилие» сформулирован динамический критерий потери устойчивости для неавтономных, то есть с зависящей от времени нагрузкой оболочечных систем. В предлагаемом критерии важным моментом является знак усилия в срединной поверхности: смена этого знака характеризует выпучивание оболочки. В критических точках происходит качественная перестройка формы колебаний системы.

Библиографический список

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
2. Крысько В.А. Нелинейная статистика и динамика неоднородных оболочек. Саратов: СГУ, 1976.
3. Пальмов В.А. Колебания упругопластических тел. М.: Наука, 1976.
4. Агамиров В.Л. Динамические задачи нелинейной теории оболочек. М.: Наука, 1990.
5. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
6. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
7. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
8. Kapitaniak T. Chaos for engineers: theory, applications, and control. Berlin - Heidelberg - New York: Springer, 1998.
9. Holmes P.J. A nonlinear oscillator with a strange attractor // Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 1979. 292. P. 419.
10. Moon F.C. Experimental models for strange attractor vibrations in elastic systems // New approaches to non-linear problems in dynamics (Proc. Conf., Pacific Grove, Calif., 1979). Philadelphia, Pa.: SIAM, 1980, p. 487.
11. Hanagud S., Ashlani F. Routes to chaos in structural dynamic systems // 18th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech., Haifa, Aug. 22-28, 1992. Haifa, 1992 P.70.
12. Lee J.-X., Symonds P.S., Borino G. Chaotic responses of a two-degree-of-freedom elastic-plastic beam model to short pulse loading // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1992. 59, №4. P.711.
13. Lepik Ulo. Elastic-plastic vibrations of a buckled beam // Int. J. Non-Linear Mech. 1999. 30, №2. P. 129.
14. Yagasaki Takao. Bifurcations and chaos in quasi-periodically forced beam. Theory, simulation and experiment // J. Sound and Vibr. 1995. 183, № 1. P. 1.
15. Аврейцевич Я., Крысько В.А., Крысько А.В. Переход к хаосу в диссипативных пластинчатых конструкциях // Материалы II Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике. Минск, 1999. С. 3.
16. Крысько В.А., Вахлаева Т.В., Крысько А.В. Диссипативные колебания гибких пластинок и сценарий перехода их к пространственно-временному хаосу при гармонических продольных воздействиях // В кн.: Нелинейная динамика механических и биологических систем. Саратов: СГТУ, 2000. С. 8 .
17. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Feigenbaum scenario exhibited by thin plate dynamics // Nonlinear Dynamics. 2001. 24. P. 373.

18. Lepik U. Axisymmetric vibrations of elastic-plastic cylindrical shells by Galerkin's method // Int. J. Impact. Eng. 1996. 18. №3. P. 489.
19. Крысько А.В., Мицкевич С.А., Чеботаревский Ю.В. Динамика цилиндрических панелей при действии продольных знакопеременных нагрузок (консервативные и диссипативные системы) // В кн.: Нелинейная динамика механических и биологических систем. Саратов: СГТУ, 2000. С. 119.
20. Крысько В.А., Кириченко А.В. О динамических критериях потери устойчивости гибких пологих оболочек // В кн.: Нелинейная динамика механических и биологических систем. Саратов: СГТУ, 2000. С. 144.
21. Крысько В.А., Сопенко А.А., Салий Е.В. Сценарий перехода в хаос физически и геометрически нелинейных оболочек при действии знакопеременной поперечной нагрузки // В кн.: Нелинейная динамика механических и биологических систем. Саратов: СГТУ, 2000. С. 108.
22. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961.
23. Кантор Б.Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. Киев: Наукова Думка, 1971.
24. Shian A.C., Soong T.T., Roth R.S. Dynamic buckling of conical shells with imperfections // AIAA Journal. 1974. 12, № 6. P. 121.

Саратовский государственный
технический университет

Поступила в редакцию 8.01.02

COMPLEX VIBRATIONS OF GEOMETRICALLY AND PHYSICALLY NONLINEAR SHALLOW SHELLS OF RECTANGULAR PLANFORM

V.A. Krysko, A.A. Sopenko, E.V. Salii

The paper deals with the problem of dynamic response of geometrically and physically nonlinear shallow shell of rectangular planform to time-dependent transverse loading. Equations of motion were derived from the Hamilton - Ostrogradskii principle. A numerical algorithm of these equations integrating is applied to describe transition processes from periodic to chaotic vibrations for some concrete shell systems. A criterion of the loss of stability is proposed for shells subjected to alternating excitation.



Крысько Вадим Анатольевич - родился в Киеве (1937), окончил Саратовский автомобильно-дорожный институт в 1960 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1967) и доктора технических наук (1978) в области устойчивости оболочек и деформируемых конструкций, взаимодействующих с полями различной физической природы. Автор 4-х монографий и более 260 научных работ. «Заслуженный деятель науки и техники РСФСР» (1993); обладатель двух грантов РФФИ (1993, 1997). С 1978 года возглавляет кафедру «Высшая математика» Саратовского государственного технического университета. Соросовский профессор.



Сопенко Александр Анатольевич - родился в Красноярске (1959), окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета (1981). После окончания работает в СГТУ на кафедре «Высшая математика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1986) в области механики деформируемого твердого тела. Опубликовал ряд статей по указанному направлению.



Салий Екатерина Вячеславовна - родилась в Саратове (1971), окончила Саратовский государственный университет по специальности «Геофизика» (1993). Защищила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2001). В настоящее время ассистент кафедры «Высшая математика» Саратовского государственного технического университета. Публикации по нелинейной динамике оболочек.