



РЕЛАКСАЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ «ХИЩНИК - ЖЕРТВА» В СРЕДЕ С МАРКОВСКИМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРА

О.В. Музычук

Рассмотрена известная схема Лотки - Вольтерры для саморегулирующихся сообществ типа «хищник - жертва» при наличии гауссовых марковских флуктуаций трофического коэффициента. Получено численное решение замкнутой определенной образом системы уравнений релаксации средних численностей сообществ и их дисперсий, на основании которого построена эволюция модельных вероятностных распределений. Хотя использован приближенный метод анализа, для рассматриваемой системы он дает точные результаты для установившихся вероятностных характеристик в предельных случаях как дельта-коррелированных, так и квазистатических флуктуаций параметра. В последней ситуации исследована релаксация вероятностных характеристик путем непосредственного усреднения исходных стохастических уравнений.

Выполненный анализ позволил установить существенные отличия влияния широкополосных и низкочастотных флуктуаций параметра на статистическую динамику системы.

Взаимодействие саморегулирующихся сообществ относится к классическим задачам нелинейной динамики. Хорошо известна схема Лотки - Вольтерры, описывающая взаимодействие сообществ типа «хищник - жертва» (см., напр., [1]). При наличии флуктуаций параметров среды система становится стохастической; ряд вопросов вероятностного описания подобных систем рассматривался в монографиях [2, 3]. В работе [4] для системы с дельта-коррелированными флуктуациями трофического коэффициента найдены стационарные вероятностные распределения численностей сообществ. Поскольку аналитическое решение соответствующего нестационарного уравнения Фоккера - Планка найти не удастся, статистическое описание релаксации вероятностных характеристик системы можно осуществлять, только комбинируя аналитические и численные методы анализа. В статье [5] таким путем исследована релаксация моментов численностей для случая белых флуктуаций параметра.

Ниже рассмотрена схема Лотки - Вольтерры системы «хищник - жертва» с гауссовыми экспоненциально-коррелированными (то есть марковскими) флуктуациями трофического коэффициента, имеющими произвольный масштаб корреляции. Для замыкания уравнений релаксации моментов используется гауссово приближение по статистическим связям совокупности: «динамические переменные

- флуктуации параметра». При этом стационарные значения средних численностей сообщества и их дисперсий находятся аналитически, а их релаксация - численным путем. На основании уравнений релаксации средних численностей и дисперсий строится эволюция модельных вероятностных распределений. Интересно отметить, что используемый приближенный метод анализа рассматриваемой системы приводит к точным результатам для установившихся значений дисперсий (и, соответственно, стационарных вероятностных распределений) в предельных случаях как дельта-коррелированных, так и квазистатических флуктуаций параметра. В последней ситуации исследована релаксация среднеквадратичных характеристик численностей путем непосредственного усреднения исходных стохастических уравнений. На основании выполненного анализа установлены существенные различия влияния широкополосных и низкочастотных флуктуаций на статистическую динамику системы.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} Tdx/dt &= (1+\xi(t))x - \beta xy - \gamma x^2, \\ Tdy/dt &= k\beta xy - \mu y, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ - численности «жертв» и «хищников», соответственно. Используя принятую терминологию, будем называть γ коэффициентом внутривидовой конкуренции жертв, а μ коэффициентом смертности хищников. Параметр β характеризует степень взаимодействия влияния популяций. Постоянная времени $T = 1/a$, где a - среднее значение трофического коэффициента, входящего множителем перед скобкой в первое уравнение; все коэффициенты в правых частях (1) безразмерны. Флуктуации $\xi(t)$ считаем гауссовым марковским процессом, определив его стохастическим уравнением

$$d\xi/dt + \Pi\xi = \eta(t), \quad (2)$$

где $\eta(t)$ - чисто вспомогательный дельта-коррелированный шум, то есть

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = D_\eta \delta(\tau). \quad (3)$$

Усредняя уравнения (1) после деления на x и y , соответственно, находим, что установившиеся средние значения численностей независимо от наличия и вида флуктуаций $\xi(t)$ совпадают с соответствующими «невозмущенными» величинами

$$\langle x \rangle_{st} = \mu/k\beta, \quad \langle y \rangle_{st} = (1-\gamma, \langle x \rangle_{st})/\beta \quad \text{при } q < 1, \quad (4)$$

$$\langle x \rangle_{st} = 1/\gamma, \quad \langle y \rangle_{st} = 0 \quad \text{при } q \geq 1, \quad (4a)$$

где параметр $q = \gamma\mu/(k\beta)$. В последнем случае, означающем гибель «хищников», численность «жертв» удовлетворяет известному уравнению Ферхюльста. Заметим, что средняя численность «жертв» убывает с ростом β , а средняя численность «хищников» имеет максимум при $\beta = \beta_{opt} = 2\gamma\mu/k$ (или $q = 1/2$). Соответствующие стационарные значения (назовем их оптимальными) таковы:

$$\langle x \rangle_{opt} = 1/(2\gamma), \quad \langle y \rangle_{opt} = 1/(2\beta). \quad (5)$$

2. Прежде всего установим средние значения и дисперсии численностей сообществ. На основании (1) - (4) можно получить уравнения релаксации совместных моментов (или кумулянтов) марковской совокупности $\{x, y, \xi\}$. Из-за нелинейности исходных уравнений и отличного от нуля времени корреляции шума они не будут замкнуты. Рассмотрим гауссово приближение по статистическим

связям этой совокупности, опуская совместные кумулянты, начиная с третьего порядка. Это, конечно, не означает, что мы «навязываем» гауссову плотность вероятности самим переменным x и y . Этот подход адекватен широко используемому в теории стохастических линейных систем приближению Бурре. Полученная таким путем замкнутая система уравнений релаксации имеет вид (здесь и ниже используем безразмерное время $\theta = t/T$)

$$\begin{aligned}
 \langle x \rangle' &= (1 - \gamma \langle x \rangle - \beta \langle y \rangle) \langle x \rangle - \gamma D_x - \beta \langle x, y \rangle + \langle x, \xi \rangle, \\
 \langle y \rangle' &= (k_1 \langle x \rangle - \mu) \langle y \rangle + k_1 \langle x, y \rangle, \\
 1/2 D_x' &= (1 - 2\gamma \langle x \rangle - \beta \langle y \rangle) D_x + \langle x \rangle (\langle x, \xi \rangle - \beta \langle x, y \rangle), \\
 1/2 D_y' &= (k_1 \langle x \rangle - \mu) D_y + k_1 \langle y \rangle \langle x, y \rangle, \\
 \langle x, y \rangle' &= (1 - 2\gamma \langle x \rangle - \beta \langle y \rangle + k_1 \langle x \rangle - \mu) \langle x, y \rangle + \beta (k_1 \langle y \rangle D_x - \langle x \rangle D_y) + \langle x \rangle \langle y, \xi \rangle, \\
 \langle x, \xi \rangle' &= (1 - \nu - 2\gamma \langle x \rangle - \beta \langle y \rangle) \langle x, \xi \rangle + \langle x \rangle (p - \beta \langle y, \xi \rangle), \\
 \langle y, \xi \rangle' &= (k_1 \langle x \rangle - \mu - \nu) \langle y, \xi \rangle + k_1 \langle y \rangle \langle x, \xi \rangle.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $k_1 = \beta k$; $p = \langle \xi^2 \rangle$ и $\nu = \Pi T$ - соответственно мощность и относительная ширина спектра шума $\xi(t)$,

$$D_u = \langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2, \quad \langle u, v \rangle = \langle uv \rangle - \langle u \rangle \langle v \rangle,$$

$u, v = x, y, \xi$ - дисперсии численностей и вторые совместные кумулянты, соответственно.

Найдем стационарные значения искомым переменных. Используя (4), из второго (или четвертого) уравнения системы (6) находим, что совместная корреляция численностей в стационарном режиме отсутствует

$$\langle x, y \rangle_{st} = 0, \tag{7}$$

на основании (4) и (7) нетрудно найти и остальные стационарные значения

$$\begin{aligned}
 (D_x)_{st} &= \langle x, \xi \rangle_{st} / \gamma = D \langle x \rangle_{st} / [\gamma (1 + \gamma \tau \langle x \rangle_{st} + \mu \beta \tau^2 \langle y \rangle_{st})], \\
 (D_y)_{st} &= k \langle y \rangle_{st} (D_x)_{st} / \langle x \rangle_{st} + \langle y, \xi \rangle_{st} / \beta, \\
 \langle y, \xi \rangle_{st} &= D \mu \langle y \rangle_{st} / [\mu \beta \tau \langle y \rangle_{st} + \gamma \langle x \rangle_{st} + 1/\tau].
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь и ниже используем параметры

$$\tau = \nu^{-1} \quad \text{и} \quad D = p\tau, \tag{9}$$

имеющие смысл относительного времени корреляции шума и его спектральной плотности «в нуле» ($D = 2\pi S_{\xi}(0)$). Предельным переходом

$$\tau \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty, \quad D = \text{const} \tag{10}$$

получим стационарные значения искомым величин, соответствующие белому шуму $\xi(t)$

$$(D_x)_{st} = D \langle x \rangle_{st} / \gamma, \quad (D_y)_{st} = k \langle y \rangle_{st} (D_x)_{st} / \langle x \rangle_{st}, \quad \langle y, \xi \rangle_{st} = 0. \tag{11}$$

Как известно [4, 5], выражения (7), (11) являются точными при дельта-коррелированном процессе $\xi(t)$.

В противоположном случае медленных (квазистатических) флуктуаций

$$\tau \rightarrow \infty, \quad D \rightarrow \infty, \quad p = \text{const} \tag{12}$$

из формул (8) находим

$$(D_x)_{st} = 0, \quad (D_y)_{st} = p/\beta^2. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что эти выражения также являются точными. В самом деле, считая в исходной системе (1) ξ случайной величиной, а не процессом, для стационарных значений динамических переменных имеем

$$x_{st} = \mu/k\beta, \quad y_{st} = (1 - \gamma x_{st} + \xi)/\beta. \quad (14)$$

Следовательно, при квазистатическом воздействии численность «жертв», в сущности, не является случайной и ее дисперсия равна нулю. Усредняя в (14) y_{st} , очевидным образом приходим к выражению (13).

3. Обратимся теперь к построению релаксации вероятностных характеристик системы. Заметим предварительно, что при дельта-коррелированном шуме со спектральной плотностью $D/2\pi$ можно найти стационарные плотности вероятности, имеющие вид гамма-распределений [4, 5]

$$\begin{aligned} w_x(x) &= C_x x^{\langle x \rangle / D - 1} \exp[(-\gamma x)/D], & x > 0 \\ w_y(y) &= C_y y^{\langle y \rangle / (kD) - 1} \exp[(-\gamma y)/(kD)], & y > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

(здесь $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ - стационарные значения (4)). С учетом (11), последние выражения можно записать совершенно симметричным образом

$$\begin{aligned} w_x(x) &= C_x x^{1/d_x - 1} \exp[-x/(\langle x \rangle d_x)], \\ w_y(y) &= C_y y^{1/d_y - 1} \exp[-y/(\langle y \rangle d_y)], \end{aligned} \quad (16)$$

где $d_u = D_u / \langle u \rangle^2$ - нормированные дисперсии численностей. Константы C_x и C_y зависят от этих же параметров

$$C_u^{-1} = \langle u \rangle d_u^{1/d_u - 1} \Gamma(1/d_u), \quad u = x, y, \quad (17)$$

Γ - гамма-функция.

Для моделирования эволюции вероятностных распределений $W_x(x; t)$ и $W_y(y; t)$ будем использовать выражения (16) с «размороженными» средними значениями и дисперсиями, то есть положим¹

$$W_u(u; t) = w_u[u; \langle u(t) \rangle, d_u(t)], \quad u = x, y, \quad (18)$$

где средние и дисперсии находим численным решением уравнений релаксации (6). Поскольку в предельных случаях белого и квазистатического шума мы имеем при этом истинную стационарную асимптотику, есть основания считать данный прием предпочтительным перед традиционным использованием гауссовой модельной плотности вероятности или распределений, основанных на наборе нескольких первых кумулянтов [10].

Как известно, гамма-распределения (16), (18) являются асимптотически гауссовыми при малых дисперсиях. Отметим также, что при $d_u \rightarrow 0$ эти распределения стягиваются в дельта-функции, что позволяет использовать детерминированные начальные условия

¹ Этот прием предложен в [8] для моделирования нестационарных вероятностных распределений систем, связанных с уравнением Ферхюльста; там же оценена точность такой процедуры. Релаксация вероятностных характеристик уравнения Ферхюльста с марковскими флуктуациями параметра исследована этим путем в работе [9]

$$\langle u(0) \rangle = u_0, \quad D_u(0) = 0 \quad \text{или} \quad W_u(u; 0) = \delta(u - u_0), \quad u = x, y. \quad (19)$$

На основании релаксации средних значений и дисперсий можно следить за установлением максимумов вероятностных распределений (16)

$$x^* = \langle x \rangle (1 - d_x), \quad y^* = \langle y \rangle (1 - d_y), \quad d_x, d_y < 1. \quad (20)$$

(При d_x или d_y б'ольших единицы соответствующая плотность вероятностей имеет интегрируемую особенность в нуле).

4. В другом предельном случае квазистатического случайного воздействия ξ стационарные плотности вероятности величин x и y очевидным образом находятся на основании (14):

$$w_x(x) = \delta(x - \langle x \rangle), \quad w_y(y) = \gamma w_\xi[\gamma(y - \langle x \rangle) - 1], \quad (21)$$

где $w_\xi(u)$ - распределение случайной величины ξ . Для гауссовой ξ квазистатическое распределение $w(y)$ также будет гауссовым с дисперсией (13), поэтому гауссова плотность вероятности может служить моделью соответствующих нестационарных распределений при низкочастотном шуме с $\tau \gg 1$.

«Квазистатическую» релаксацию вероятностных характеристик можно найти и непосредственно из исходных динамических уравнений. Положив в системе (1) ξ случайной константой и численно интегрируя, находим ее решение

$$x = X(\xi, t), \quad y = Y(\xi, t). \quad (22)$$

Затем выполняем усреднение (также численно) по переменной ξ . Таким образом, получим

$$\langle f(x, y, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f[X(\xi, t), Y(\xi, t)] w_\xi(\xi) d\xi, \quad (23)$$

где $\langle f(x, y, t) \rangle$ - искомая статистическая характеристика.

5. Обсудим теперь некоторые результаты, полученные изложенным методом. Заметим предварительно, что статистическая динамика системы зависит от довольно большого набора параметров, поэтому, в основном, ограничимся исследованием зависимости вероятностных характеристик от интенсивности и времени корреляции процесса $\xi(t)$. Динамические же параметры (β, γ, μ) положим соответствующими оптимальному режиму (5). На приведенных ниже рисунках показаны стационарные значения и релаксация наиболее вероятных значений численностей и соответствующих среднеквадратичных отклонений $\sigma_u = (D_u)^{1/2}$, $u = x, y$, а также эволюция модельных вероятностных распределений. Фиксированные значения динамических параметров, соответствующие каждому рисунку, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Фиксированные параметры рисунков

рис. №	β	γ	μ	$\langle x \rangle_{st}$	$\langle y \rangle_{st}$
1, 2	0.05	0.025	0.25	20	10
3, 4	0.04	0.02	0.2	25	12
5	0.02	0.015	0.2	33	25

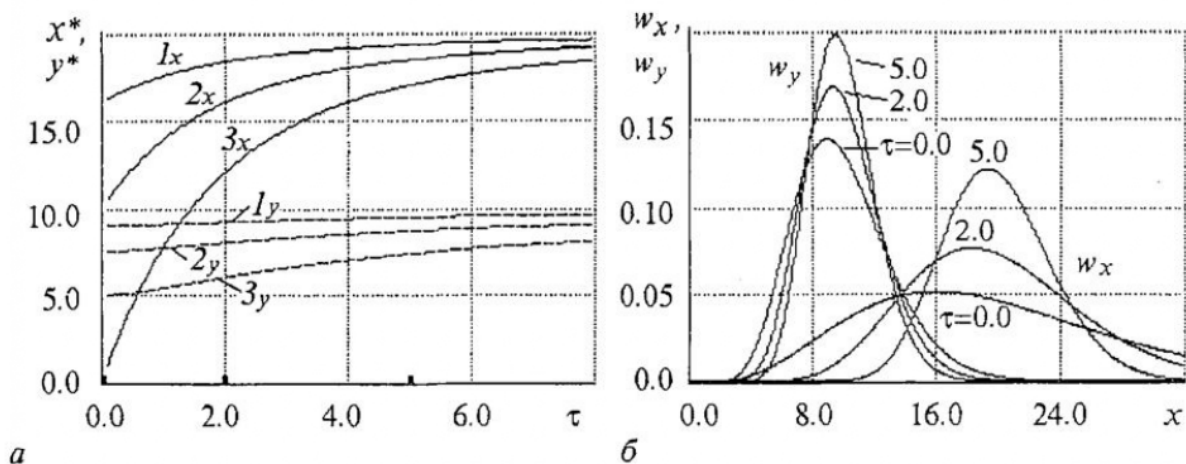


Рис. 1. Стационарные вероятностные характеристики при $D = \text{const}$

На рис. 1 приведены стационарные вероятностные характеристики системы. Здесь и ниже индексы номеров кривых x , y относятся к характеристикам жертв и хищников, соответственно. На рис. 1, *a* показана зависимость наиболее вероятных значений (20) от относительного времени корреляции флуктуаций τ , а на рис. 1, *б* - стационарные модельные распределения (16) при фиксированных значениях τ , показанных метками на оси τ рис. 1, *a* (всюду при изменении τ здесь считалось, что спектральная плотность флуктуаций «в нуле» $D = \text{const}$). Кривым 1-3 соответствуют значения $D = 0.1; 0.25; 0.5$. На рис. 1, *б* нижние кривые, соответствующие значению $\tau = 0$, - точные вероятностные распределения (15); соответствующие модельные плотности вероятности при $\tau < 0.5$ практически совпадают с ними. Как следует из приведенных результатов, при $D = \text{const}$ большее дестабилизирующее действие оказывает широкополосный (в данном случае, более интенсивный) шум. Заметим, что характеристики численности «жертв» реагируют на изменение τ значительно сильнее.

На рис. 2, *a* показана зависимость наиболее вероятных значений и средне-квадратичных отклонений (номера кривых σ_x , σ_y отмечены штрихами) от времени корреляции при фиксированной мощности шума $p = \text{const}$. В этом случае с ростом τ увеличиваются низкочастотные компоненты спектра. Кривые 1 получены для значения $p = 0.1$, 2 - для $p = 0.25$. Кружками на вертикали $\tau = 16$ показаны квазистатические значения σ_y , вытекающие из (13). Отметим наличие слабовыраженного максимума в процессе релаксации дисперсии «жертв» (кривые $1'_x, 2'_x$), что связано с отмеченным выше обращением D_x в ноль при квазистатическом шуме ξ . Заметим

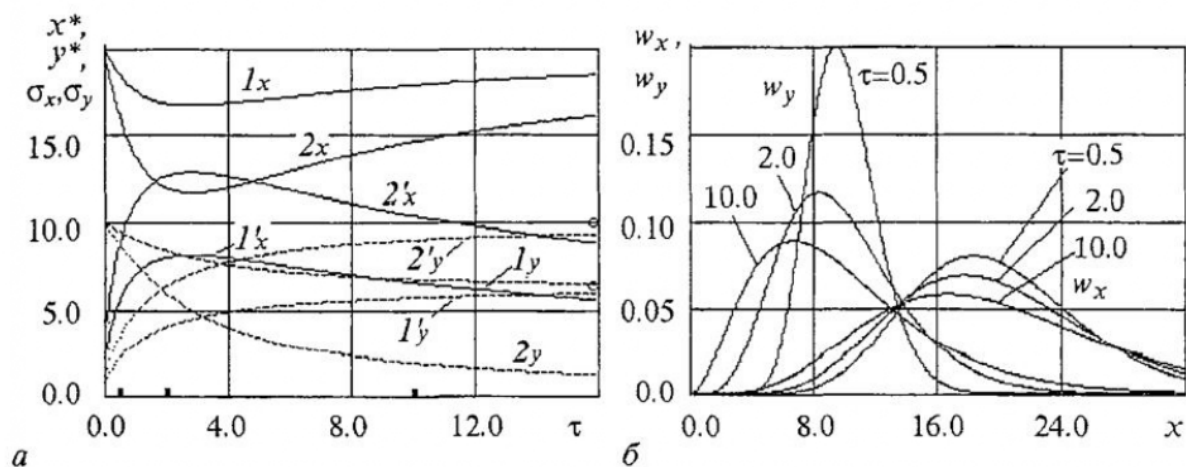


Рис. 2. Стационарные вероятностные характеристики при $p = \text{const}$

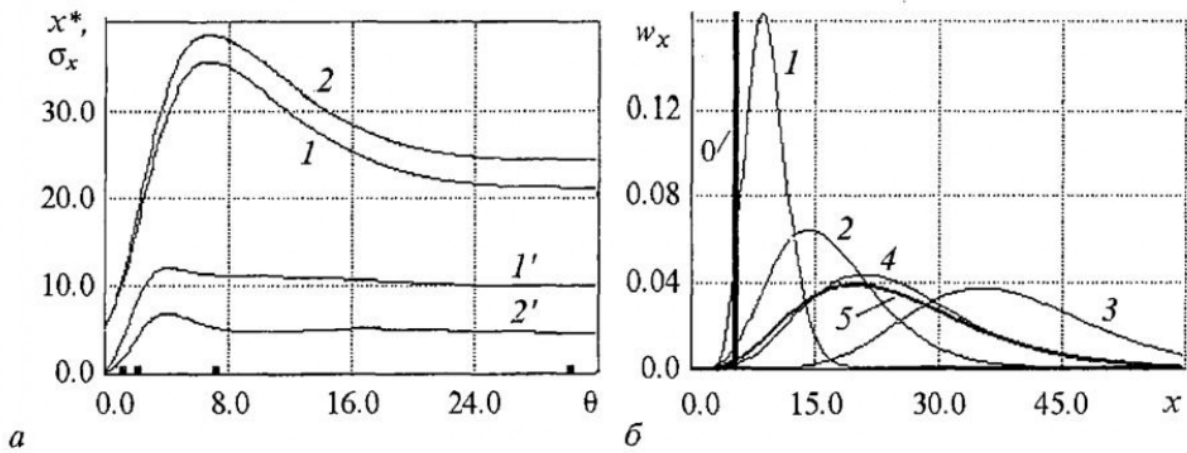


Рис. 3. Релаксация вероятностных характеристик при $D = \text{const}$

однако, что уменьшение σ_x с ростом τ происходит очень медленно. На рис. 2, б приведены модельные вероятностные распределения при значениях τ , показанных метками на рис. 2, а. Естественно, зависимость w_x от времени корреляции шума здесь немонотонна. Как видно из этих рисунков, в случае $p = \text{const}$ большее дестабилизирующее действие оказывает низкочастотный шум, причем на распределение хищников он влияет более сильно.

Рис. 3 иллюстрирует релаксацию вероятностных характеристик «жертв». На рис. 3, а показана релаксация наиболее вероятных значений и среднеквадратичных отклонений (номера кривых σ_x отмечены штрихами). Кривые 1, 2 получены для значений времени корреляции $\tau = 0.5$ и 5.0 , соответственно. При изменении τ здесь (как и на рис. 1) полагалось $D = \text{const}$. Процесс релаксации имеет слабовыраженный осцилляторный характер, соответствующий оптимальным значениям параметров (5)². Отметим слабое влияние на вероятностные характеристики популяции «хищников» существенного изменения времени корреляции шума, не связанного с изменением низкочастотной части спектра. На рис. 3, б показана эволюция модельного вероятностного распределения $w_x(x, \theta)$ при широкополосном шуме $\xi(t)$ ($\tau = 0.5$). Естественно, она идет не монотонно: здесь «0» - начальное дельта-распределение, а нумерация кривых 1 - 4 соответствует росту времени, показанного метками на рис. 3, а ($\theta = 1; 2; 7; 30$). Кривая 5 - истинная стационарная плотность вероятности (15) для белого шума $\xi(t)$. Отметим, что дисперсия устанавливается быстрее среднего значения (ширина распределений 3, 4 почти одинакова).

На рис. 4 показана релаксация вероятностных характеристик «хищников» для значений времени корреляции, соответствующих «розовым» ($\tau = 1.0$, кривые 1 на рис. 4, а) и низкочастотным ($\tau = 8.0$, кривые 2) флуктуациям параметра. Нумерация кривых здесь аналогична рис. 3. В данном случае (как и на рис. 2) при изменении τ фиксировалась мощность шума p . На рис. 4, б приведена эволюция модельного распределения для низкочастотного шума ($\tau = 8.0$). В качестве модельной здесь использована гауссова плотность вероятности, являющаяся точной при квазистатическом шуме (для предыдущих рисунков использовалось гамма-распределение (16) - (18)). Как видно из рисунка, кривая 4, соответствующая установившимся значениям параметров ($\theta = 30$), весьма мало отличается от квазистатического гауссова распределения с дисперсией (13).

² Как показывает анализ (см. также [5]), колебания в процессе установления средних и наиболее вероятных значений существенно зависят от начальных условий и динамических параметров системы. При отклонении последних от оптимальных значений колебания, как правило, растут.

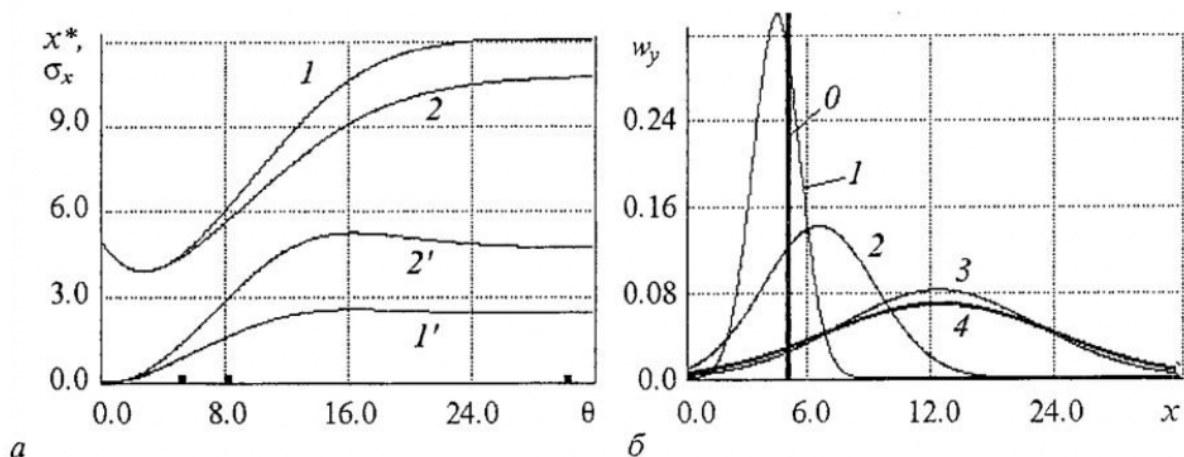


Рис. 4. Релаксация вероятностных характеристик при $p = \text{const}$

Рис. 5 иллюстрирует релаксацию вероятностных характеристик системы с квазистатическими флуктуациями ξ , определенную с помощью выражений (22), (23). На рис. 5, а показана релаксация средних значений и дисперсий; обозначения кривых аналогичны рис. 3. Кривая 1 соответствует интенсивности шума $p = 0.04$; кривая 2 - $p = 0.15$. Отметим существенно различное поведение дисперсий D_x и D_y при больших θ и очень медленное спадание к нулю дисперсии «жертв». На рис. 5, б приведена эволюция гауссовых модельных вероятностных распределений для мощности шума $p = 0.04$, построенных в указанные метками на рис. 5, а моменты времени (распределение $w_y(y; \theta)$ в первой отсчетной точке, фактически, имеет вид дельта-функции в силу малости дисперсии). Релаксация распределения «жертв», естественно, идет не монотонно. Отметим, что распределение «хищников» (кривая 4_y) в последней отсчетной точке $\theta = 18$ практически совпадает с точным выражением (21), а соответствующее распределение «жертв» (кривая 4_x) релаксирует к дельта-функции.

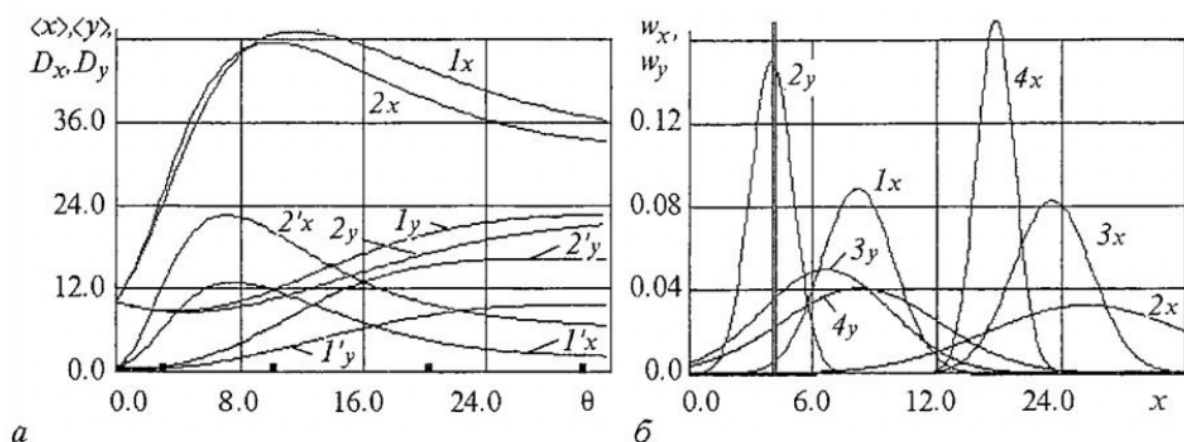


Рис. 5. «Квазистатическая» релаксация вероятностных характеристик

6. Важной характеристикой нестационарных процессов является время релаксации. Для рассматриваемой системы таковым будем считать время, при котором текущее значение нормированной вероятностной характеристики (например, дисперсии $D_u(t)$) отличается от стационарной величины меньше чем на заданное число ϵ . Как показывает анализ, времена релаксации средних значений зависят, главным образом, от текущих значений численностей сообщества, которые определяются динамическими параметрами системы и начальными условиями. Естественно, времена релаксации наиболее вероятных значений и дисперсий

численностей также сильно зависят от этих величин, причем при относительно малых флуктуациях параметра процесс установления наиболее вероятных значений $u^*(t)$ ($u = x, y$) качественно подобен «динамической» релаксации соответствующих средних. Интенсивность и вид спектра флуктуаций параметра также влияют на характер и время установления вероятностных характеристик (см. рис. 2, 3), а степень этого влияния сильно зависит от динамических параметров системы.

Табл. 2 наряду с приведенными выше рисунками иллюстрирует влияние характеристик флуктуаций трофического коэффициента на дисперсию численностей и на их времена релаксации τ_{Dx} и τ_{Dy} . (Значение ε взято равным 0.2). В таблице приведены оптимальные значения параметров, при которых стационарные средние значения численностей определяются выражениями (5) при $\langle x \rangle_{st} = 2\langle y \rangle_{st}$. Здесь p и τ - интенсивность и время корреляции флуктуаций. В верхних строчках клеток слева направо даны величины σ_x, σ_y , в нижних - τ_{Dx}, τ_{Dy} .

Таблица 2

$\tau \backslash p$	0.05		0.15		0.4	
0.5	5 11.1	1.8 9.8	8.6 7.9	3.0 9.8	14.6 6.3	5.0 9.6
2	7.2 5.3	3.2 9.4	12.5 5.0	5.6 9.8	20.4 4.5	9.1 9.4
6	7.0 6.7	4.4 10.1	12.2 5.5	7.7 9.9	19.5 13.3	12.6 9.4

С увеличением мощности широкополосного шума времена релаксации уменьшаются (более существенно у распределения «жертв»), для «розового» шума это менее заметно. Отметим, что время релаксации дисперсии «хищников» при фиксированной мощности шума практически не зависит от его времени корреляции, а дисперсии «жертв» зависят немонотонно (последнее, по-видимому, связано с наличием максимума в зависимости σ_x от τ). В целом же, можно заключить, что основное дестабилизирующее влияние как на стационарные вероятностные характеристики (смещение максимумов распределений к нулю, рост дисперсий), так и на соответствующие времена релаксации оказывают низкочастотные компоненты спектра флуктуаций параметра.

Табл. 3 дает представление об изменении основных вероятностных характеристик при отклонении динамических параметров от оптимальных значений при фиксированных параметрах шума ($p = 0.15$, $\tau = 1$). Центральная строчка соответствует приведенным выше оптимальным значениям; «вверх» уменьшается коэффициент β , «вниз» - коэффициент γ . Естественно, эти изменения противоположным образом влияют на численности «жертв» и «хищников». Как видно из табл. 3, времена релаксации дисперсий также по-разному реагируют на изменение динамических параметров, но есть общая тенденция: при сильно отличающихся численностях членов сообщества времена релаксации также сильно отличаются, причем более многочисленное распределение устанавливается быстрее (верхняя строчка). При близости максимумов распределений близки и времена релаксации (нижняя строчка).

Заметим в заключение, что исследование статистической динамики

рассматриваемой системы и более общих многомерных уравнений Ферхюльста, подверженных влиянию не дельта-коррелированных случайных сил, является весьма непростой задачей. В настоящей работе сделаны лишь некоторые шаги в этом направлении.

Таблица 3

β, γ	$x^* (\langle x \rangle)$	$y^* (\langle y \rangle)$	σ_x	σ_y	τ_{Dx}	τ_{Dy}
$\beta=0.025$ $\gamma=0.02$	36(40)	7(8)	12.8	3.4	2.2	27.4
$\beta=0.032$ $\gamma=0.02$	27(31)	10(12)	11.7	4.1	4.6	15.5
$\beta=0.04$ $\gamma=0.02$	20(25)	11(13)	10.8	4.2	5.3	9.8
$\beta=0.04$ $\gamma=0.15$	18(25)	14(16)	12.9	5.4	11.5	12.2
$\beta=0.04$ $\gamma=0.1$	14(25)	16(19)	15.4	7.1	18.1	16.2

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 99-02-17544, № 00-15-96620 и Минвуза РФ № E00-3.5-216.

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Свиричев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
3. Свиричев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
4. Диментберг М.Ф. Точные решения уравнения Фоккера - Планка - Колмогорова для некоторых многомерных динамических систем // ПИММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 555.
5. Музычук О.В. Вероятностные характеристики системы «хищник - жертва» со случайно изменяющимися параметрами // Изв. вузов. ПИД. 1997. Т. 5. № 2, 3. С. 80.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964. Т. 1, 2.
7. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
8. Музычук О.В. Аналитико-численное построение нестационарных вероятностных распределений для одного класса нелинейных стохастических систем // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т.43. № 9. С.827.
9. Музычук О.В. Релаксация вероятностных характеристик динамических

систем, описываемых уравнением Ферхюльста с «розовым» шумом // Изв. вузов. ПНД. 2000. Т. 8. № 5. С. 36.

10. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов.радио, 1978.

*Нижегородский архитектурно-
строительный университет*

Поступила в редакцию 22.01.02

RELAXATION OF PROBABILITY CHARACTERISTICS OF «BEAST - SACRIFICE» SYSTEM IN THE MEDIUM WITH MARKOFF FLUCTUATIONS OF PARAMETERS

O.V. Muzychuk

Well-known Lotky - Volterra scheme for self-regulated «beast - sacrifice» associations with Gaussian Markoff fluctuations of trophical coefficient was considered. Numerical solution of the system of relaxation equations, closed by special way, for population number mean values and dispersions was obtained. On this base the evolution of model probability distributions was constructed. Though we used the approximative method of analysis, for considering stochastic system it leads to exact results for stationary probability characteristics for both δ -correlated and quasi-static parameter's fluctuations. For the last situation the relaxation of probability characteristics was investigated by numerical averaging of stochastic equations.

Such analysis gave us the possibility to detect essential difference in results of the influence of wide-band or low-frequency parameter's fluctuations on statistical dynamics of the system.



Музычук Олег Владимирович - родился в 1947 году. Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1970). Работал на кафедре бионики и статистической радиофизики ГГУ. Защитил кандидатскую диссертацию в области исследования линейных стохастических систем (1978). С 2001 года - доктор физико-математических наук. С 1978 года работает на кафедре физики Нижегородского архитектурно-строительного университета. Круг интересов - статистическая радиофизика, нелинейная динамика, вероятностное описание динамических систем, находящихся под воздействием интенсивных случайных сил. Автор более 40 статей в центральных научных журналах. E-mail: physics @ bi-zed.da.ru