



## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С УПРУГИМИ ОТРАЖЕНИЯМИ.

### 1. Бильярд и его инволюция

*С.В. Найдёнов, В.В. Яновский*

В рамках нового геометро-динамического подхода с бильярдными системами связан специальный класс динамических систем - обратимых отображений с проективной инволюцией на «симметричном» фазовом пространстве. Исследованы основные геометрические особенности локально гладких бильярдных инволюций - проективность и кусочная разрывность; указана их роль в формировании той или иной (регулярной и хаотической) нелинейной динамики бильярда.

### Введение

Динамические системы - фазовые потоки и точечные отображения занимают центральное место во многих вопросах нелинейной динамики, особенно, в проблеме детерминированного хаоса [1 - 3]. Среди динамических систем с особенностями [4] наиболее важная роль отводится бильярдам, в которых свободное движение сопряжено с упругими отражениями от границы заданной геометрии. Бильярды выделяются внешней простотой и физической наглядностью; они удобны для получения строгих аналитических результатов и компьютерного моделирования. В то же время происходящие в этих системах нелинейные явления обнаруживают глубокое физическое и математическое содержание. В известном смысле бильярд можно считать парадигмой детерминированного хаоса в классической механике, а в последнее время своеобразным «мостом», связывающим хаотические системы и их квантовые «двойники» в проблеме квантового хаоса.

В начале становления теории динамических систем бильярды привлекались для описания типичных свойств гамильтонового движения (Дж. Биркгоф [5]). Затем на бильярдных моделях отрабатывались такие фундаментальные положения хаотической (и не только) динамики как локальная неустойчивость траекторий и ее роль в обосновании эргодической гипотезы статистической физики (модель сталкивающихся шаров А. Крылова [6]); перемешивание и эргодичность с их строгим доказательством для систем с малым числом степеней свободы (рассеивающие бильярды Я. Синая [7]) и их связь с геодезическими потоками на многообразиях отрицательной кривизны); гиперболичность как типичное свойство не только рассеивающих, но и локально фокусирующих близкие траектории

систем (бильярды Л. Бунимовича [8] типа «стадион») и др. Важную роль сыграли бильярды в спектральной теории оператора Лапласа (вычисление квазимод В. Лазуткиным [9]) и получении ответа на известный вопрос «можно ли услышать форму барабана?» (см., например, [10]). Уместно отметить, что физически глубокую концепцию бильярда использовали задолго до создания современной математической теории подобных систем. Так Кельвин проверял справедливость закона Максвелла для распределения идеального газа по скоростям, рассматривая механику бильярдных шаров, а Н. Бор использовал специфику движения выделенной частицы (нейтрона) среди остальных шаров бильярда (нуклонов) для интерпретации своей модели составного ядра.

Непросто даже перечислить все физические приложения бильярдных систем. Модель сталкивающихся шаров остается популярной при исследовании поведения взаимодействующих молекул, атомов, нуклонов. Газ Лоренца (бильярдное движение частицы в системе с фиксированным или случайным расположением рассеивателей определенной формы) привлекается для описания кинетических и диффузионных явлений. Модель с упругими отражениями естественно возникает при описании (в приближении геометрической оптики) распространения электромагнитных колебаний в микроволновых резонаторах [11], волноводах [3] и оптических полостях [12]; при исследовании динамики нейтральных и заряженных частиц в твердотельных кавернах, мезоскопических квантовых точках и магнито-оптических ловушках, а также при описании светособирания в сцинтилляционных детекторах [13] и т.д.

В последнее время бильярды широко используются для отработки квазиклассического сценария перехода к квантовому хаосу и выявлению его связи с теорией случайных матриц [14]. Кроме того бильярды могут оказаться удобной системой для изучения особенностей многомерного хаоса [15].

Нелинейная система (бильярд) со столь широким спектром приложений должна обладать универсальными динамическими свойствами. Источник этой универсальности следует искать в геометрической природе бильярда, так как динамические свойства его траекторий в целом определяются геометрией области бильярдного движения (в плоском случае - геометрией границы бильярда). Вместе с тем имеются особенности, выделяющие бильярды из широкого класса динамических систем с регулярным и хаотическим поведением.

Несомненным достоинством бильярдных систем является то, что в самой их динамике заложено свойство дискретности для траекторий, испытывающих последовательные отражения от границы. В подавляющем большинстве задач хаотической динамики именно возможность описать систему в терминах разностных уравнений в дискретном времени (чаще всего отображений, например, сечений Пуанкаре соответствующего дифференциального потока) позволяет наиболее продвинуться как в качественном, так и в количественном описании ее сложного поведения. Мощные методы, в рамках которых были получены практически все наиболее важные результаты современной теории бильярдных систем [7 - 9, 16, 17 и др.] использовали консервативные отображения (сечения Пуанкаре) в (ко)касательном расслоении гамильтонова потока бильярда. В рамках геометрического подхода, развиваемого в данной статье, оказывается возможным естественным образом свести произвольный бильярд к динамической системе более широкого класса - обратимому отображению в новом (симметричном) фазовом пространстве, непосредственно учитывающем топологию геометрической границы бильярда.

Обратимость бильярда как динамической системы относится к числу его принципиальных свойств. Заметим, что обратимые системы относятся, пожалуй, к наиболее часто встречающимся физическим системам, так как большинство физических законов (кроме статистических) обратимо во времени. Интерес к

обратимым динамическим системам, начало исследованиям которых было положено в работах Дж. Биркгофа [5], и получившим толчок в своем развитии в работах В. Арнольда и М. Севрюка [18], в последнее время также усилился и, в первую очередь, связан с тем, что они обнаруживают (возможное) одновременное сосуществование элементов гамильтоновой и диссипативной динамики [19].

Бильярдное отображение в «симметричном» фазовом пространстве с равноправными координатами строится естественным образом изначально как отображение, описывающее последовательность точек отражения произвольного луча от границы бильярда, а не как сечение соответствующего гамильтонового потока. Этот подход сродни идее сокращенного описания системы, так как итерации построенного обратимого отображения связывают лишь координаты последовательных точек отражения от границы бильярда, а прохождение бильярдного луча между ними не рассматривается. Однако никакой потери динамической информации при таком «огрублении» не происходит, так как движение луча между отражениями всегда может быть восстановлено по последовательности этих точек, лежащих на границе бильярда. По этому поводу отметим, что подобная процедура получения отображений, связывающих (в явном виде) последовательные отражения бильярдной траектории с успехом использовалась и ранее как для отдельных бильярдов [3], так и, например, для газа Лоренца [17] и т.д., но при условии достаточно простой формы границы («плиссируемый» бильярд; правильная сферическая или прямоугольная геометрия границы или рассеивателей). При этом получались консервативные отображения, якобиан которых строго равен единице.

Отображение, охватывающее любой тип бильярда содержит проективную инволюцию, появление которой отражает факт обратимости бильярда и связано со способом построения нового фазового пространства. Проективный характер инволюции вызван геометрической природой бильярда. А именно, закон упругого отражения, если его рассматривать как геометрическое преобразование падающего и отраженного лучей бильярдной траектории в точке отражения, является проективным преобразованием. Проективная особенность бильярда позволяет установить ряд его общих свойств, однако в данной работе большее внимание уделим не самим свойствам инволюции бильярда, а их следствиям с точки зрения допустимой фазовой динамики и исследуем ее общую структуру для произвольного бильярда (с достаточно гладкой границей) в «симметричном» фазовом пространстве. При этом ограничимся наиболее простым, но практически наиболее распространенным случаем двумерного бильярда на плоскости. В большинстве последующих рассуждений гладкость границы особой роли не играет, хотя наиболее далеко идущие геометро-динамические связи [20] появляются для бильярдов с кривизной (гладкость границы не ниже класса  $C^3$ ).

### **Бильярд как специальная геометро-динамическая система**

Обычно, с бильярдом произвольной формы (границей  $\partial\Omega$ ) связывается фазовый поток в касательном или кокасательном расслоении к геометрической области  $\Omega$  бильярдного движения. Затем строится подходящее сечение Пуанкаре и исследуются его свойства. В первом случае (касательное расслоение [4]) выбранный подход оказывается родственным изучению геодезических (с особенностями) на многообразиях с кривизной. Второй способ по сути связан с гамильтоновым формализмом. В обоих случаях получают консервативные отображения. Они описывают бильярд как каскад на соответствующем фазовом пространстве, координаты которого не равноправны по отношению друг к другу

(обычная координата и скорость или координата и импульс, соответственно). Переход от непрерывного потока к дискретному отображению - нетривиальная процедура, тем более, что для бильярда она осложняется не всегда трансверсальным характером векторного поля исходного потока, суженного на границу бильярда  $\partial\Omega$  (особыми будут траектории касающиеся границы или попадающие в особые точки границы), с чем связаны трудности аналитического исследования бильярдов как динамических систем с особенностями. Кроме того, некоторые очевидные, геометрические по своей природе, свойства бильярда при подобном рассмотрении оказываются скрытыми за вспомогательными (математическими) конструкциями.

Рассмотрим другой способ описания бильярда. Основным моментом этого, по сути геометрического, подхода является выбор нового фазового пространства с симметричными (равноправными) координатами и введение на нем специального класса отображений, выделяющих бильярд среди остальных динамических систем с гамильтоновыми особенностями. Подобный подход применялся к реальной системе - описанию светособирания в сцинтилляционном детекторе [13].

Предварительно напомним, что границу бильярда  $\partial\Omega \subset R^2$  можно параметризовать одним из удобных способов (см., например, [21]) гомеоморфизмом  $I = [0,1] \xrightarrow{\varphi} \mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi) \in \partial\Omega$ . В силу замкнутости границы гомеоморфизм будет периодическим,  $\mathbf{r}(\varphi + 2\pi) = \mathbf{r}(\varphi)$ , что по-другому можно обеспечить, изменив топологию отрезка  $I$  на окружность  $S^1$ . Итак,  $\partial\Omega$  топологически эквивалентна окружности,  $\partial\Omega \sim S^1$ . Поле внешних нормалей  $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r}(\varphi))$  (или касательных  $\tau$ ) к границе, равно как и ее ориентированную кривизну  $\hat{K}(\varphi)$  (см., например, [22]) по постановке задачи также считаем известными.

Рассмотрим произвольный луч (говоря точнее, направленный отрезок) какой-нибудь бильярдной траектории между ее двумя последовательными отражениями в точках  $\mathbf{r}(\varphi_1)$  и  $\mathbf{r}(\varphi_2)$  с координатами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис. 1). Взятый в качестве начального, такой луч однозначно определяет всю дальнейшую эволюцию этой бильярдной траектории. При каждом последующем отражении координаты луча изменяются так, что бывшая точка отражения  $\mathbf{r}(\varphi_2)$  становится новой точкой вылета  $\mathbf{r}(\bar{\varphi}_1) = \mathbf{r}(\varphi_2)$ , а старая точка вылета  $\mathbf{r}(\varphi_1)$  переходит в новую точку отражения  $\mathbf{r}(\bar{\varphi}_2) = \mathbf{r}(\varphi_3)$ , где  $\varphi_3 = f(\varphi_1, \varphi_2)$  - некоторая (периодическая) функция. Условие, по которому строится отраженный луч с координатами  $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ , есть закон упругого отражения. Это приводит к определенной специализации функции  $f(\varphi_1, \varphi_2)$ . Таким образом, возникает динамическая система - отображение  $(\varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{B} (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ . Фазовое пространство  $Z$  образуют точки  $z = (\varphi_1, \varphi_2) \in Z$ , координаты которых задают всевозможные лучи бильярдных траекторий. Каждая точка  $z_0 = (\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0})$  фазового пространства может считаться начальной (фазовой) точкой некоторой бильярдной траектории, содержащей (начальный) луч, соединяющий точки  $\mathbf{r}(\varphi_{1,0})$  и  $\mathbf{r}(\varphi_{2,0})$ . Симметрично расположенная в  $Z$  фазовая точка с переставленными координатами  $z_0^T = (\varphi_{2,0}, \varphi_{1,0})$ , с одной стороны, соответствует противоположно направленному по отношению к предыдущему отрезку (лучу бильярдной траектории). С другой стороны, рассмотренная как начальная фазовая точка она определяет ту же самую траекторию (последовательность точек отражения), но проходящую в обратном порядке из  $\mathbf{r}(\varphi_{2,0})$  в  $\mathbf{r}(\varphi_{1,0})$  (обращенную во времени траекторию).

Топологически фазовое пространство  $Z$  строится как прямое произведение  $Z = S^1 \otimes S^1 = T^2$ , следовательно, в данном случае оказывается двумерным тором  $T^2$ . В более сложных (с топологической точки зрения) случаях, например, для многосвязных или многомерных бильярдов, «симметричное» фазовое

пространство, по-прежнему, строится по правилу  $Z=M \otimes M$ ,  $M \sim \partial\Omega$ , но его топология будет другой. Для 3D бильярдов оно выглядит как  $Z=\Sigma_g \otimes \Sigma_g$ , где  $\Sigma_g \sim \partial\Omega$  - сфера с  $g$  ручками, которой гомеоморфна замкнутая евклидова поверхность  $\partial\Omega \subset R^3$  (2D граница бильярда). По построению две координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (в многомерном случае они станут векторными) точек фазового пространства оказываются равноправными по отношению друг к другу. Размерность  $Z$  сохраняется четной. Равноправие координат вызвано отмеченной обратимостью системы и приводит к симметричности (в целом) фазового портрета бильярдных отображений относительно диагонали  $\Delta$  фазового пространства,  $\Delta = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in Z \mid \varphi_1 = \varphi_2\}$ .

Таким образом бильярдное отображение примет вид

$$Z \rightarrow Z; \quad B: = \begin{cases} \bar{\varphi}_1 = \varphi_2 \pmod{2\pi}, \\ \bar{\varphi}_2 = f(\varphi_1, \varphi_2) \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (1)$$

Из-за обратимости системы функция  $f$  должна быть инволюцией

$$f[f(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_2] = \varphi_1 \Leftrightarrow f \circ f = id, \quad f = f_{\varphi_2}(\varphi_1), \quad f \in C^r(T^2; S^1), \quad (2)$$

где  $id$  - тождественная функция, а гладкость границы должна быть класса  $C^r$ . Появление условия (2) очевидно. Если падающий луч заменить отраженным (это соответствует замене  $(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_1)$  в системе (1)), то в результате его отражения должен получиться исходный луч, приходим к выражению  $f(\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_1) = \varphi_1$ , откуда и следует (2).

Остается получить выражение для инволюции бильярда. Каждая из функций  $f$  для бильярда с фиксированной формой границы представляет собой семейство инволюций, зависящих от второго аргумента как от параметра,  $f(\varphi_1, \varphi_2) \stackrel{\text{def}}{=} f_{\varphi_2}(\varphi_1)$ . Воспользуемся условием угол падения  $\theta$  равен углу отражения  $\bar{\theta}$ . С учетом направленности углов, отсчитываемых от внешней нормали  $\mathbf{n}$  к границе  $\partial\Omega$ , перепишем это условие в виде  $\cot\theta = -\cot\bar{\theta}$  или в декартовых координатах на плоскости

$$\begin{aligned} \frac{n_x(\varphi_2)(x(f) - x(\varphi_2)) + n_y(\varphi_2)(y(f) - y(\varphi_2))}{n_x(\varphi_2)(y(f) - y(\varphi_2)) - n_y(\varphi_2)(x(f) - x(\varphi_2))} = \\ = - \frac{n_x(\varphi_2)(x(\varphi_1) - x(\varphi_2)) + n_y(\varphi_2)(y(\varphi_1) - y(\varphi_2))}{n_x(\varphi_2)(y(\varphi_1) - y(\varphi_2)) - n_y(\varphi_2)(x(\varphi_1) - x(\varphi_2))}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3 = f(\varphi_1, \varphi_2)$  определяют координаты точек вылета, отражения и после-

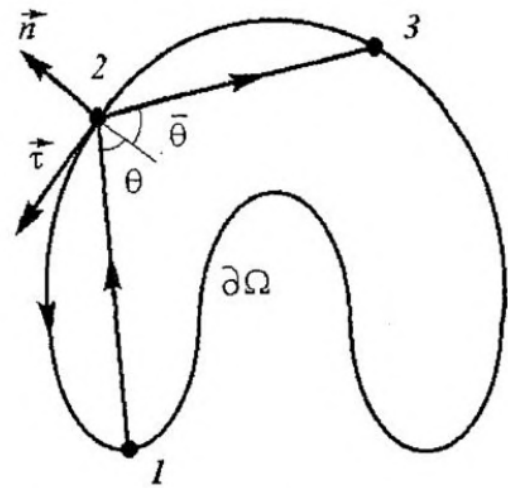


Рис. 1. Геометрическое распространение лучей бильярда. Произвольный луч распространяется из точки вылета 1 (координата  $\varphi_1$ ) в точку отражения 2 ( $\varphi_2$ ), а затем в точку 3 ( $\varphi_3 = f(\varphi_1, \varphi_2)$ ) на границе  $\partial\Omega$  с положительным обходом против часовой стрелки, полем внешних нормалей  $\mathbf{n}$  и касательных  $\boldsymbol{\tau}$ . В точке отражения угол падения  $\theta$  равен углу отражения  $\bar{\theta}$

дующего падения на  $\partial\Omega$ ;  $\mathbf{r}=(x,y)$ ,  $\mathbf{n}=(n_x,n_y)$ ,  $\mathbf{n}^2=1$ . Преобразовав выражение (3), получим

$$\frac{x(f) - x(\varphi_2)}{y(f) - y(\varphi_2)} = \frac{(n_x^2(\varphi_2) - n_y^2(\varphi_2))(x(\varphi_2) - x(\varphi_1)) + 2n_x(\varphi_2)n_y(\varphi_2)(y(\varphi_2) - y(\varphi_1))}{(n_x^2(\varphi_2) - n_y^2(\varphi_2))(y(\varphi_2) - y(\varphi_1)) - 2n_x(\varphi_1)n_y(\varphi_2)(x(\varphi_2) - x(\varphi_1))}. \quad (4)$$

В неявном виде последнее соотношение определяет инволюцию бильярда  $f=f(\varphi_1,\varphi_2)$  по заданному уравнению границы  $\mathbf{r}(\varphi)\in\partial\Omega$  и полю нормалей  $\mathbf{n}(\varphi)\perp\partial\Omega$  к ней (оба эти векторных уравнения связаны друг с другом и однозначно задают форму  $\partial\Omega$  с точностью до аффинных преобразований). Выражение (4) пригодно для определения инволюции произвольного бильярда, в том числе с не гладкой (многоугольники), не выпуклой (рассеивающе-фокусирующие бильярды), а также не замкнутой границей (не компактные бильярды), так как при его выводе никаких подобных ограничений не вводилось. Заменой переменных в (4) можно получить уравнение инволюции в произвольных, а не только декартовых координатах. Среди всех координатных представлений бильярда выделенной будет натуральная параметризация из-за ее однозначности для любой формы границы  $\partial\Omega$ .

В качестве примера вычислим несколько конкретных инволюций. Для эллиптического бильярда с уравнением границы  $x = a\cos\varphi$ ,  $y = b\sin\varphi$  получим в явном виде

$$f(\varphi_1,\varphi_2) = -\varphi_2 - 2\arctan \left[ \frac{(a^2\sin^2\varphi_2 - b^2\cos^2\varphi_2) \tan[(\varphi_1 + \varphi_2)/2] + b^2\sin 2\varphi_2}{(a^2\sin^2\varphi_2 - b^2\cos^2\varphi_2) - a^2\sin 2\varphi_2 \tan[(\varphi_1 + \varphi_2)/2]} \right] \pmod{2\pi}. \quad (5)$$

В случае  $a=b$  приходим к бильярду на окружности с инволюцией

$$f(\varphi_1,\varphi_2) = 2\varphi_2 - \varphi_1 \pmod{2\pi}, \quad (6)$$

сохраняющую точно такой же вид и в натуральной параметризации границы  $\partial\Omega$ .

Бильярд на замкнутых (четного порядка) выпуклых алгебраических кривых удобно рассматривать в полярных координатах. Например, обычному овалу 4 порядка,  $x^4 + y^4 = 1$ , в полярных координатах,  $r(\varphi) = 2^{1/2}(3 + \cos 4\varphi)^{-1/4}$ , соответствует инволюция вида

$$f(\varphi_1,\varphi_2) = z^{-1}\{R[z(\varphi_1,\varphi_2),\varphi_2], \varphi_2\}, \quad R(u,\varphi_2) = [\alpha(\varphi_2)u - \beta(\varphi_2)]/[\beta(\varphi_2)u - \alpha(\varphi_2)], \quad (7)$$

$$z(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{(3 + \cos 4\varphi_2)^{1/4}\cos\varphi_1 - (3 + \cos 4\varphi_1)^{1/4}\cos\varphi_2}{(3 + \cos 4\varphi_2)^{1/4}\sin\varphi_1 - (3 + \cos 4\varphi_1)^{1/4}\sin\varphi_2}. \quad (8)$$

$$\alpha(\varphi) = (15\cos 2\varphi + \cos 6\varphi)/(10 + 6\cos 4\varphi), \quad (9)$$

$$\beta(\varphi) = (3\sin 2\varphi - \sin 6\varphi)/(10 + 6\cos 4\varphi).$$

Для ее вычисления необходимо взять обратную к введенной функции  $z=z(\varphi_1,\varphi_2)$ , что представляет самостоятельную задачу. Отметим, что обратная функция оказывается многозначной. Для бильярда однозначный выбор ее ветви диктуется вариационным принципом наименьшего действия. Движение между отражениями носит свободный характер, следовательно, происходит по геодезическим геометрического пространства, для плоского бильярда - по прямым линиям. Расстояние между точками  $\mathbf{r}(\varphi_1)$  и  $\mathbf{r}(\varphi_2)$  до отражения и между точками  $\mathbf{r}(\varphi_2)$  и  $\mathbf{r}(f(\varphi_1,\varphi_2))$  после него должно быть минимальным среди всех возможных путей, полученных с

помощью различных ветвей функции  $z^{-1}$ , определяющих вид  $f$ , то есть  $|\mathbf{r}(f(\varphi_1, \varphi_2)) - \mathbf{r}(\varphi_2)| = \min$ . Часть «формальных» траекторий, не удовлетворяющих последнему условию, проходит в области геометрической тени бильярда или выходит в комплексную проективную плоскость и для классического движения недоступна.

### Геометрический «портрет» инволюции бильярда

Используем идеи теории категорий для многообразий (фазовое пространство) и отображений на них. Тогда бильярд, с одной стороны, можно отождествить с динамической системой (отображением) в «симметричном» фазовом пространстве  $Z$ . С другой стороны, его динамические свойства можно воспринимать как проявление геометрических особенностей некоторой поверхности  $\Phi$ , соответствующей семейству его инволюций  $f_{\varphi_2}(\varphi_1)$ , зависящих от параметра (второго аргумента  $\varphi_2$ ). Эта поверхность задается уравнением в виде неявной функции  $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, f) = 0$  (уравнение (4)) в прямом произведении  $M \otimes Z = M \otimes M \otimes M$ ;  $M \sim \partial\Omega$ . Из теоремы о дифференцировании неявной функции следует, что гладкость этой поверхности на единицу меньше гладкости границы бильярда  $\Phi \in C^r \Leftrightarrow \partial\Omega \in C^{r+1}$ . Отличительными свойствами поверхности  $\Phi$  как многообразия, вложенного в  $R^3$  будет инвариантность относительно локальных (координата  $\varphi_2$  точки отражения при этом фиксирована) проективных преобразований, а также ее разрывный характер, так что в целом эта поверхность состоит из большого числа локально гладких компонент, между которыми существуют конечные разрывы.

Появление разрывов легче всего понять непосредственно из геометрического рассмотрения инволюции. Фиксируя один из ее аргументов и следя за изменением другого, можно обнаружить скачки, которые связаны либо с траекториями, касающимися границы бильярда (рис. 2, а), либо с траекториями, попадающими в особые точки его границы (рис. 2, б), в которых нарушено условие  $C^1$  гладкости (угловые точки в многоугольниках или точки, где терпит скачок

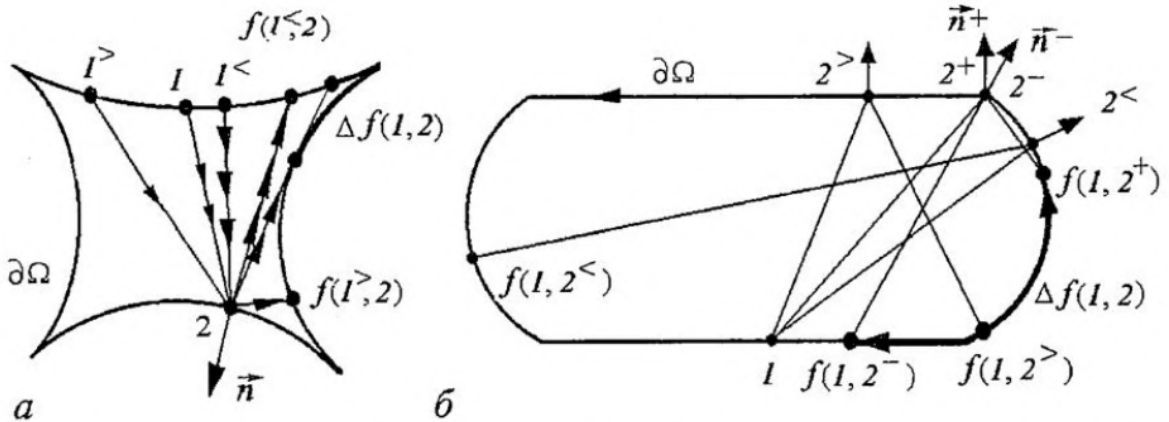


Рис. 2. Геометрические причины разрывности бильярдной инволюции. а - Скачки вызванные наличием лакун (геометрической тени) для бильярдов с рассеивающими участками границы. Инволюция терпит разрыв в точке вылета  $I$ , равный  $\Delta f(I, 2)$ . Траектории, вышедшие слева  $I^<$  и справа  $I^>$  от точки  $I$  и отраженные в одной и той же точке  $2$  переходят на разные компоненты границы и становятся расходящимися. б - Скачки инволюции вызваны прохождением бильярдной траектории через особые точки негладко состыкованных между собой компонент границы  $\partial\Omega$ . Обозначены точка вылета  $I$ , точки отражения  $2, 2^<, 2^>$  (слева и справа от нее) и  $2^\pm$  - бесконечно близкие к  $2$  точки отражения на разных компонентах границы  $\partial\Omega$  с нормальными  $\mathbf{n}^\pm$ . Отмечены точки последующего отражения, определяемые инволюцией  $f$ . Скачок инволюции равен  $\Delta f(I, 2) = f(I, 2^+) - f(I, 2^-)$  (по второму аргументу инволюция является возрастающей для выпуклого участка границы)

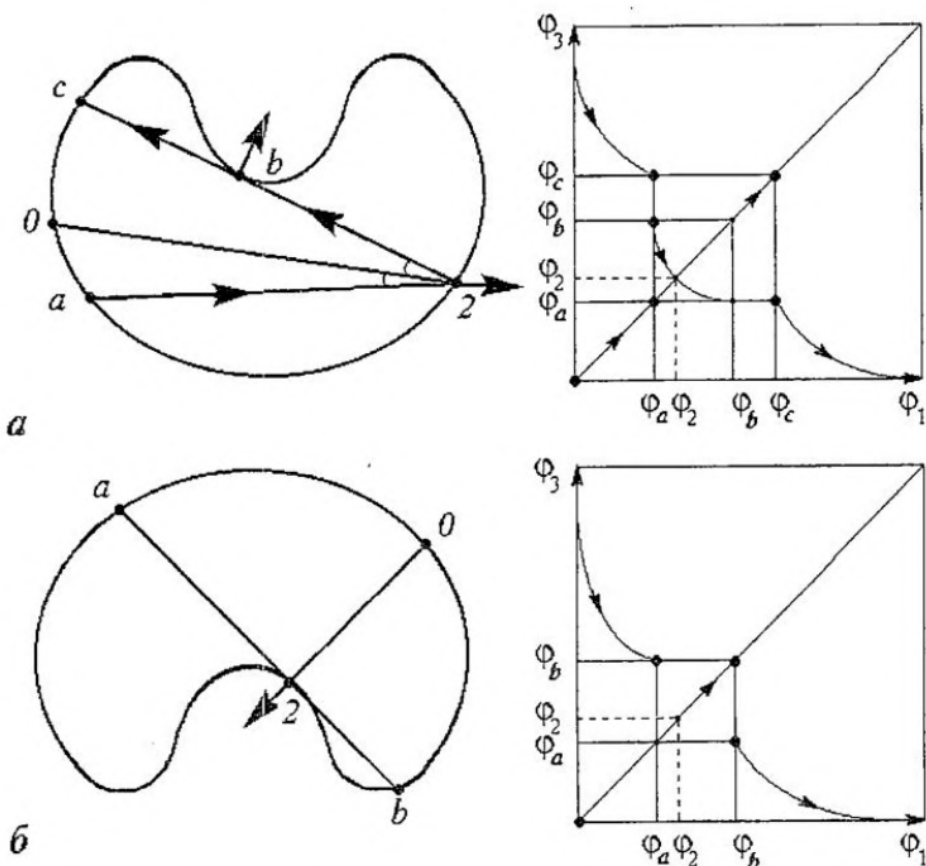


Рис. 3. Особенности бильярдной инволюции в ее сечении. *а* - Симметричный скачок бильярдной инволюции в сечении  $\varphi_2 = \text{const}$ . Точки *a* и *c* определяют падающий и отраженный луч; *b* - точка касания отраженного луча с границей  $\partial\Omega$ ; 2 - точка отражения (с координатой  $\varphi_2$ ). *б* - «Окно» в качестве разрыва на сечении инволюции ( $\varphi_2 = \text{const}$ ). На геометрическом портрете (слева) в точке отражения 2 проведены касательная *ab* и нормаль *ZO*, причем точка  $O \in \partial\Omega$  принята за начальную на границе  $\partial\Omega$

нормаль для бильярдов, составленных из дуг отдельных кривых). Для бильярдов с отрицательной кривизной разрывы связаны с появлением классически недоступных участков геометрической тени, они происходят как по первому, так и по второму аргументу инволюции  $f(\varphi_1, \varphi_2)$ , хотя характер разрывов может быть разным. По первому аргументу им может быть только «симметричный» скачок (рис. 3, *а*) или «окно» (рис. 3, *б*), тогда как по второму могут появляться несимметричные скачки и «окна». «Окна» возникают, когда точка падения (отражения) скачком переходит между участками противоположной кривизны (с выпуклого на вогнутый или наоборот). Отличие, связанное с симметричностью скачка или «окна» связано с тем, что переменные  $\varphi_1$  или  $f_{\varphi_2 = \text{const}}(\varphi_1)$  являются сопряженными друг другу по условию инволютивности  $f \circ f = id$ , тогда как величины  $\varphi_2$  и  $f_{\varphi_1 = \text{const}}(\varphi_2)$  этим свойством, вообще говоря, не обладают. (За исключением этого различия вид сечений ( $\varphi_2 = \text{const}$ ) инволюций  $f(\varphi_1, \varphi_2)$  аналогичен сечениям ( $\varphi_1 = \text{const}$ ), поэтому их графики здесь не приводим.)

Для выпуклых бильярдов нетривиальные скачки отличные от естественного фактора  $\text{mod } 2\pi$ , связанного с периодичностью инволюции бильярда с замкнутой границей, происходят только по второму аргументу, причем при попадании падающего луча в точку (отражения) со скачком кривизны. В выпуклых бильярдах с непрерывной кривизной по каждому из аргументов инволюции допустим только тривиальный скачок (рис. 4). Таким образом, локально, поверхность  $\Phi$ , остается гладкой как и граница бильярда, тогда как в целом она состоит из некоторого числа односвязных компонент. Разрывы (в сечениях) между ними в случае



гладкого выпуклого бильярда (с кривизной) все одинаковы и равны фактору  $\text{mod } 2\pi$ , поэтому при переходе на тор  $T^2$  они исчезают (ветви инволюции подклеиваются друг к другу гладким образом). В этом проявляется преимущество выпуклого бильярда при исследовании его динамики и в решении задачи Дирихле для оператора Лапласа. В бильярдах с отрицательной кривизной, содержащих как выпуклые, так и вогнутые участки границы, инволюция терпит разрывы, отличные от тривиального, причем их тем больше, чем больше длина вогнутых участков  $\partial\Omega$ ,

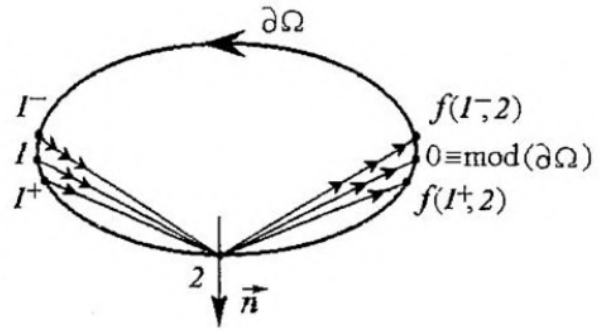


Рис. 4. Естественный скачок периодической инволюции  $f$  (по  $\text{mod } 2\pi \equiv \text{mod } 2|\partial\Omega|$ ) для гладкого выпуклого бильярда. Точки  $I$ ,  $2$ ,  $f$  - точки вылета, отражения и прилета;  $O$  - начало отсчета на границе

где  $\hat{K} < 0$ . В этом смысле полностью рассеивающий бильярд Синая со всюду отрицательной кривизной,  $\hat{K} < 0$ , является предельным случаем наиболее нерегулярного характера поверхности бильярдной инволюции. Как известно [4], бильярд Синая относится к сильно перемешивающим  $K$ -системам и изоморфен сдвигу Бернулли. Можно предположить, что соответствующее движению бильярдного луча движение фазовой точки по «сегментам» бильярдной инволюции эквивалентно соответствующей символической динамике, если каждый из них параметризовать некоторой двоичной точкой единичного интервала. Для выпуклых, но не достаточно гладких бильярдов (ниже класса  $C^1$ ) вместо скачков, вызванных наличием геометрической тени (лакун в конфигурационном и фазовом пространствах), как в бильярдах отрицательной кривизны, возникают другие ее особенности, которые также приводят к разрывности инволюции. Число появляющихся разрывов инволюции при изменении границы бильярда может быстро увеличиваться, что в конечном итоге будет приводить к сильной стохастизации бильярда. Рассмотренная картина стохастичности является сугубо качественной, однако исследовать «динамику» инволюции бильярда при изменении его границы всегда можно численно. Степень ее кусочной разрывности (изрезанности поверхности инволюции над симметричным фазовым пространством, причем после склейки тривиальных разрывов  $\text{mod } 2\pi$  на торе) может говорить о мере хаотизации бильярда. Для интегрируемых бильярдов эллипса и окружности их «хорошие» инволюции (присутствует только  $\text{mod } 2\pi$  разрыв) как соответствующие поверхности изображены на (рис. 5). Таким образом, рельеф инволюции, как и фазовый портрет бильярдного отображения, дает возможность представить динамику бильярда в целом и оценить ее сложность.

Формально инволюция  $f$  играет такую большую роль из-за того, что первое уравнение бильярдного отображения (1) является тривиальным. (Если вместо каскадов рассматривать потоки, то оно выглядит аналогично определению скорости  $v$  для потоков,  $\bar{\psi} = \varphi \leftrightarrow \dot{x} = v$ ) Инволюция же определяет «силовое поле» для бильярда ( $\bar{\varphi} = f(\psi, \varphi) \leftrightarrow \dot{v} = F(x, v)$  в рамках той же аналогии). Появление инволюции как нового геометрического объекта для динамического описания бильярда вызвано переходом к «симметричному» фазовому пространству. Отметим в этой связи два момента. В инволюции бильярда переплетаются локальные и глобальные свойства последнего. Действительно, для каждой фиксированной точки отражения  $\varphi_2$  зависимость  $f$  от  $\varphi_1$  определяется геометрией границы  $\partial\Omega$ . Далее, если в выражении (4) ввести новые координаты

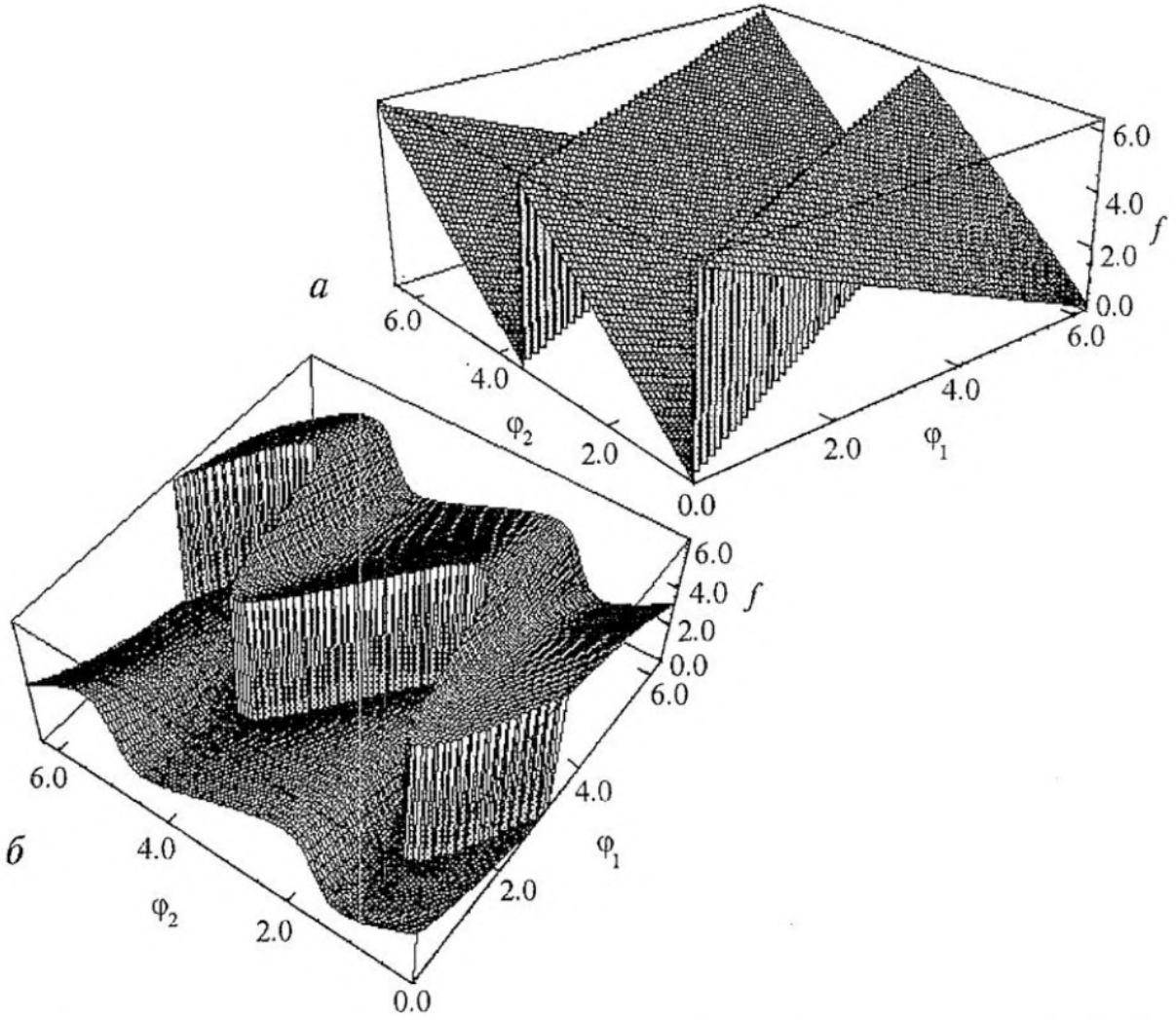


Рис. 5. Инволюция  $f$  окружности (а) и эллипса (с полуосями  $a=5$  и  $b=4$ ) (б) как поверхность над фазовым пространством (канонической разверткой тора) с переменными  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Изображенный разрыв ( $\text{mod}2\pi$ ) при переходе на тор исчезает

$$(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (z_{\varphi_2}(\varphi_1) = [x(\varphi_1) - x(\varphi_2)] / [y(\varphi_1) - y(\varphi_2)], \varphi_2), \quad (10)$$

то в них оно примет вид функционального уравнения

$$z_{\varphi_2}[f_{\varphi_2}(\varphi_1)] = R^B_{\varphi_2}[z_{\varphi_2}(\varphi_1)] \Leftrightarrow z \circ f = R^B \circ z \circ R^B_{\varphi}(z) = [\alpha(\varphi)z - \beta(\varphi)] / [\beta(\varphi)z - \alpha(\varphi)], \quad (11)$$

где  $\alpha(\varphi) = n_x^2(\varphi) - n_y^2(\varphi)$ ,  $\beta = 2n_x(\varphi)n_y(\varphi)$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 = n^2 = 1$ . Дробно-рациональная функция  $R^B$  является инволюцией,  $R^B(R^B(z)) = z$ . Так как граница  $\partial\Omega$  считается простой достаточно гладкой кривой, то существует обратный диффеоморфизм к замене  $z_{\varphi_2}(\varphi_1)$ ,  $z^{-1} = z_{\varphi_2}^{-1}(z)$ ;  $z^{-1} \circ z = z \circ z^{-1} = \text{id}$ . Следовательно, уравнение (11) можно записать в виде

$$f = z^{-1} \circ R^B \circ z. \quad (12)$$

Это означает, что в «проективных» координатах (10) инволюция бильярда локально с фиксированной точкой отражения  $\varphi_2 = \text{const}$  является дробно-рациональным, а значит, проективным преобразованием, параметры ( $\alpha$  и  $\beta$ ) которого однозначно определяются формой границы бильярда.

С проективностью инволюции бильярда связаны следующие геометрические особенности, записанные в алгебраическом виде,

$$\frac{\partial f(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1} < 0, \quad \text{sign}[\frac{\partial f(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2}] = \text{sign} \hat{K}(\varphi_2). \quad (13)$$

Выводятся соотношения (13) геометрически или из выражений (11) - (12) с использованием формул Френе [22] для сопровождающего репера плоской кривой. С бильярдом связана строго убывающая инволюция,  $f'_{\varphi_1} < 0$ . Отметим, что только убывающая инволюция имеет неподвижные точки. В бильярде это согласуется с известным фактом существования большого числа периодических траекторий. Например, для выпуклых бильярдов с кривизной теорема Биркгофа гарантирует существование периодических орбит всех периодов. Характер роста инволюции по второму аргументу зависит от типа границы бильярда. Для бильярдов с  $\hat{K} < 0$  - рассеивающий тип (растяжение), в случае  $\hat{K} > 0$  - фокусирующий тип, для  $\hat{K} = 0$  - нейтральное поведение. Для бильярдов с изменяющимся знаком кривизны возможна смешанная (в указанном смысле) «динамика».

Зависимость инволюции  $f$  от второго аргумента  $\varphi_2$  определяет глобальные свойства бильярда, так как с ней связано изменение параметров локального (по первому аргументу  $\varphi_1$ ) проективного преобразования. В фазовом пространстве (пространстве состояний) системы переменные  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равноправны (их перестановка меняет только направление движения), тогда как для инволюции бильярда они играют разную роль, что, впрочем, следует уже из определения (2). Чтобы выделить это различие отметим, что математическим выражением обратимости системы помимо условия (2) является инвариантность всех соотношений именно относительно замены

$$\varphi_1 \rightarrow f(\varphi_1, \varphi_2), \quad f \rightarrow f(f(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_2) = \varphi_1, \quad (14)$$

использующей основное свойство инволюции  $f$ .

Другим важным моментом является типичность появления разрывов в бильярдных системах. О том, что бильярды являются наиболее важным примером динамических систем с особенностями указывалось уже в классических работах по бильярдам [4]. Особенности лишь усложняли аналитическое исследование неравномерно полных гиперболических систем, тогда как сама хаотичность (или гиперболичность) связывалась с рассеивающим ( $\hat{K} < 0$  при нашем определении кривизны границы) или дефокусирующим ( $\hat{K} \geq 0$ ) характером бильярда. В «симметричном» фазовом пространстве принципиальную роль играют сами разрывы бильярдного отображения, а не только точки, где они возникают, и траектории, проходящие через них. Кроме того, предполагается, что разрывы оказывают прямое влияние на динамику бильярда. Так как многие динамические системы можно достаточно хорошо аппроксимировать бильярдными, по крайней мере, в хаотическом случае, это означает, что разрывность может оказаться одной из возможных причин как самой хаотизации, так и связанных с ней особенностей поведения системы в фазовом пространстве. Фазовое пространство типичного бильярда с достаточно гладкой границей заведомо содержит как регулярную, так и хаотическую компоненты, а инволюция при этом может быть в значительной степени кусочно-разрывной (состоять из большого числа локально гладких компонент).

Отметим еще такое наблюдение: степень изрезанности инволюции (как поверхности над фазовым пространством  $Z$ ) «пропорциональна» степени интегрируемости бильярда, то есть объему его регулярной компоненты в фазовом пространстве. Наибольшей регулярностью обладают, очевидно, выпуклые бильярды с аналитической границей, в том числе рассмотренный ранее обычный овал. Как уже отмечалось, в них допустимы только тривиальные скачки, и на торе инволюция становится гладкой. Стохастизация при этом происходит не за счет разрывности отображения, а по тем же причинам, что и в большинстве гладких систем - из-за их нелинейности. (Ясно, что и фактор  $\text{mod } 2\pi$  по своей природе

нелинейный.) Хаос развивается не столь быстро, как при наличии нетривиальных разрывов, и в основном связан с развитием сложной (гомо)гетероклинической структуры вблизи сепаратрис неустойчивых (гиперболических) неподвижных точек и последующим перекрытием резонансов. В этих особенностях можно убедиться на примере численного исследования фазового портрета различных бильярдов. Используя введенные представления о бильярде как отображении с инволюцией можно выполнить и аналитические исследования и в этом направлении. Как видим, в бильярдах могут одновременно реализоваться несколько сценариев стохастизации - как за счет нелинейности, так и за счет разрывности динамической системы.

### Заключение

В данной работе в рамках геометро-динамического подхода к бильярдам как динамическим системам специального класса (обратимые отображения с проективной инволюцией) выявлены роль и геометрические особенности их инволюции. От свойств инволюции зависит характер динамики бильярдного движения. Особое внимание было уделено таким ее свойствам, как проективность и кусочно-разрывность, типичным для бильярдных систем. Оба свойства имеют сугубо геометрическое происхождение. Проективность является следствием зеркального характера отражения от границы бильярда, а разрывность вызвана геометрическими особенностями его границы - сменой знака кривизны, наличием точек, в которых нормаль к границе определена неоднозначно. Указано, что разрывность бильярда (инволюции) в определенном смысле имеет не менее важное значение для его регулярной и хаотической динамики, чем нелинейность рассматриваемой динамической системы. На примере простейших алгебраических кривых показан способ вычисления инволюции бильярда. С использованием общего выражения (4) для инволюции произвольного бильярда, получены алгебраические соотношения (12) - (13), выражающие основные геометрические закономерности бильярда.

### Библиографический список

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
2. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528с.
3. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности. М.: Наука, 1988.
4. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы - 2. Т. 2. Под ред. Я.Г. Синая. М.: Изд-во ВИНТИ, 1985. 312с.
5. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.: Гостехиздат, 1941.
6. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
7. Синай Я.Г. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 6. С.1261; Динамические системы с упругими отражениями // УМН 1970. Т.25, №2. С.141.
8. Бунимович Л.А. О бильярдах, близких к рассеивающим // Мат. сборник. 1974. Т. 94, № 1. С.49.

- 9 Лазуткин В.Ф. Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа. Л.: ЛГУ, 1981. 196с.
- 10 Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432с.
11. Alt H., Graf H.D. et al. Chaotic Dynamics in a Three-Dimensional Superconducting Microwave Billiard // Phys.Rev.E. 1996. Vol. 54. P. 2303.
12. Nocel J.U., Stone A.D., Chen G. et al. Directional emission from asymmetric resonant cavities // Optics Letters. 1996. Vol. 21. P. 1609.
13. Naydenov S.V., Yanovsky V.V. Stochastic theory of light collection. I. Detectors and billiards // Functional Materials. 2000. Vol. 7. №. 4(2). P. 743.
14. Guhr T., Muller-Groeling A., Weidenmuller H.A. Random-Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts // Phys.Rep. 1998. Vol. 299. P. 189.
15. Bunimovich L., Casati G., Guarneri I. Chaotic Focusing Billiards in Higher Dimensions // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol.77. P.2941.
16. Табачников С. Внешние бильярды // УМН. 1993. Т. 48, № 6. С. 75.
17. Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г. Механизм ускорения Ферми в рассеивающих бильярдах с возмущаемыми границами // ЖЭТФ. 1999. Т.116. С. 1781.
18. Arnold V.I., Sevryuk M.B. in Nonlinear phenomena in plasma physics and hydrodynamics. Moskow: Mir, 1986. P. 31.
19. Roberts J.A.G., Qwispel G.R.W. Chaos and Time-reversal Symmetry. Order and Chaos in Reversible dynamical systems // Phys.Rep. 1992. Vol. 216. P. 1.
20. Найдёнов С.В., Яновский В.В. Геометро-динамический подход к бильярдным системам. I-II // Теоретическая Математическая Физика. 2001. Т. 126. С.110; 2001. Т. 128. С.116.
21. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М., 1969. 176с.
22. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760с.
23. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. М.: ФМ, 1961. 580 с.

Институт монокристаллов  
НАН Украины

Поступила в редакцию 04.09.2000  
после доработки 13.03.2002

## GEOMETRICAL NONLINEAR DYNAMICS FEATURES OF SYSTEMS WITH ELASTIC REFLECTIONS

### I. Billiard and its involution

S.V. Naydenov, V.V. Yanovsky

Within the framework of the new geometrical-dynamic approach a special class of dynamic systems - reversible mappings with projective involutions on «symmetric» phase space - is linked with billiard systems. Basic geometrical features of locally smooth billiard involutions - projectivity and piecewise discontinuity are explored and their role in making of one or another (regular and random) nonlinear billiard dynamics is indicated. Billiard involutions for simple algebraic curves are obtained and their common properties are set.



*Найдёнов Сергей Вячеславович* - родился в Харькове (1968), окончил Харьковский государственный университет (1993). После окончания ХГУ работает в Институте монокристаллов НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в ИМ НАНУ (1998) в области теоретической физики. Область научных интересов - теоретическая и математическая физика, хаотическая динамика, теория конденсированных сред. Автор более 20 научных публикаций.

E-mail: naydenov@isc.kharkov.com



*Яновский Владимир Владимирович* - родился в Полтаве (1950), окончил Харьковский государственный университет (1973). После окончания ХГУ работал в Физико-техническом институте (Харьков), Институте космических исследований РАН (Москва). В настоящее время работает в Институте монокристаллов НАН Украины. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в Институте космических исследований РАН (1983) и доктора физико-математических наук в ИМ НАНУ (1996) в области теоретической физики. Область научных интересов - теоретическая физика, хаос и теория турбулентности, нелинейная физика. Автор более 160 научных публикаций.