Обзоры актуальных проблем нелинейной динамики

Изв. вузов «ПНД», т.10, № 1-2, 2002

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНКУРЕНТОВ, МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ СОСТОЯНИЯ И МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО РОСТА

А.В. Подлазов

Масштабная инвариантность является одним из отличительных признаков целостного поведения. Примеры ее возникновения демонстрируют самоорганизованно критические системы и системы с когерентным шумом, состоящие из существенно нелинейных элементов. В настоящей работе, напротив, построены модели линейного роста, имеющие масштабно-инвариантные свойства, что является принципиально новым.

Поскольку целостность не может возникнуть на основе линейных механизмов, в правила предлагаемых моделей она заложена изначально в виде использования информации об интегральных характеристиках системы. Наличия такой «затравки целостных свойств» оказывается вполне достаточно для того, чтобы распределение составляющих систему частей по размеру приняло степенной вид.

Также в работе рассматриваются вопросы обработки статистических выборок при построении ранговых зависимостей, анализ роли входящих в эти зависимости параметров и качественные свойства систем, описываемых степенными законами распределения вероятностей.

Введение

Свойства многих сложных систем, изучаемых естественными и, в особенности, общественными науками, описываются *степенными законами распределения вероятностей*(СЗРВ) [1-15]

$$u(n) \sim n^{-(1+\alpha)}, \tag{1}$$

где $u(n)$ - плотность вероятности того, что рассматриваемая величина принимает значение n, а показатель $\alpha > 0$ является основной характеристикой распределения.

На практике распределение (1) представляет интерес, как правило, лишь при $\alpha<2$, поскольку на значение показателя, равное двойке, приходится «водораздел» свойств СЗРВ.

При $\alpha>2$ свойства распределения (1) схожи со свойствами *нестепенных распределений* (плотность вероятности которых убывает быстрее любой степени n: нормальное, экспоненциальное и т.п.). То есть случайная величина, распределенная в соответствии с формулой (1), имеет при $\alpha>2$ конечную дисперсию и может быть описана *характерным значением* и отклонением от него.

Если же дисперсия мала, то вероятностное описание иногда вообще заменяется детерминированным, что типично для многих естественных дисциплин, в которых наблюдаемые величины часто трактуются как «невероятностные» [1-6].

При $\alpha<2$ ситуация оказывается в корне иной, поскольку из-за бесконечности дисперсии становится неприменимой центральная предельная теорема. Распределение суммы случайных величин, плотность вероятности которых удовлетворяет формуле (1), стремится к *устойчивому распределению*, асимптотика которого при больших n по-прежнему описывается этой формулой [7, 8, 16]. То есть усреднение не устраняет *масштабной инвариантности* (отсутствия характерных значений), присущей СЗРВ. Соответственно, и выделение характерного значения оказывается невозможным. Подобная ситуация наблюдается при описании социально-экономических систем, а также сложных систем естественного происхождения, где наблюдаемые величины имеют существенно вероятностную природу, то есть их ни в каком приближении нельзя рассматривать как детерминированные [1-6].

Вообще говоря, распределение наблюдаемых аддитивных величин не может иметь бесконечных моментов (физика «не знает» бесконечностей). Поэтому формула (1) является лишь приближением, справедливым в *промежуточной асимптотике* и нарушающимся при достаточно малых (иначе распределение не будет нормируемо) и при достаточно больших n [1,2]. Данное обстоятельство при анализе реальных данных практически исключает из рассмотрения СЗРВ с показателем, превышающим двойку. Такие распределения слишком быстро убывают, чтобы можно было достоверно отличить их от нестепенных распределений или, тем более, выделить область промежуточной асимптотики.

Подробный анализ степенных распределений с различных точек зрения можно найти в работах [1-9]. Здесь же мы уделим внимание еще одному «водоразделу» их свойств, приходящемуся на значение $\alpha=1$, который является существенным для всего дальнейшего рассмотрения.

Распределение конкурентов

Если $\alpha\leq1$, то распределение (1) характеризуется не только бесконечной дисперсией, но и бесконечным математическим ожиданием. При этом основной вклад в выборочное среднее вносит сравнительно небольшое число крупнейших значений, а сумма всех значений из некоторой выборки по порядку величины совпадает с максимальным из них. Если же $\alpha > 1$, то основной вклад в среднее и в сумму, напротив, вносит основная масса малых значений [1, 2, 7, 8, 16].

Область доминирующих выборочных значений определяется величиной n_b, удовлетворяющей уравнению

$$\int_{n_{\min}}^{n_b} n\cdot u(n)dn = \int_{n_b}^{n_{\max}} n\cdot u(n)dn, \tag{2}$$

которую уместно назвать *рубежом* распределения. Рубеж разделяет диапазон выборочных значений $[n_{\min}; n_{\max}]$ на части, вносящие равные вклады в среднее (сумму). Найдем для него явное выражение.

Подстановка плотности вероятности (1) в определение (2) дает уравнение

$$2(n_b/n_{\min})^{1-\alpha} = A^{1-\alpha} + 1, \tag{3}$$

где $A=n_{\max}/n_{\min}$ - *амплитуда*выборки. Воспользовавшись очевидным тождеством $(1+e^x)/2 = e^{x/2}\cdot\mathrm{ch}(x/2)$, формулу (3) можно переписать в виде

$$(n_b/n_{\min})^{1-\alpha} = A^{(1-\alpha)/2}\cdot\mathrm{ch}((1-\alpha)(\ln A)/2).$$

Откуда получаем следующее выражение для величины рубежа

$$n_b = (n_{\min} n_{\max})^{1/2} \cdot [\mathrm{ch}((1\text{-}\alpha)(\ln A)/2)]^{1/(1-\alpha)}. \qquad (4)$$

Пограничное значение показателя $\alpha = 1$, при котором распределение (1) принимает вид

$$u(n) \sim n^{-2}, \qquad (5)$$

характеризуется рубежом $n_b=(n_{\min} n_{\max})^{1/2}$ (см. формулу (6) ниже), равным среднему геометрическому величин $n_{\min}$ и $n_{\max}$. Баланс малых и больших значений, имеющий место при $\alpha=1$, означает, что весь диапазон изменения величины n одинаково важен. Такая ситуация является наиболее интересной с точки зрения сложности изучаемых систем и разнообразия их свойств.

Разумеется, точно равенство $\alpha=1$ никогда не выполняется. Однако, как следует из формулы (4), баланс значений сохраняется, пока второй множитель в ее правой части близок к единице. Разложив его по степеням $(1\text{-}\alpha)\ln A$ до квадратичного члена, получаем

$$[\mathrm{ch}((1\text{-}\alpha)(\ln A)/2)]^{1/(1-\alpha)} = 1 + \frac{(1\text{-}\alpha)\ln^2 A}{8} + \ldots, \qquad (6)$$

что дает критерий баланса малых и больших значений

$$|1 - \alpha| \cdot \lg^2 A << 1. \qquad (7)$$

Таким образом, если амплитуда выборки не очень велика, что довольно часто имеет место, то при $\alpha \sim 1$ распределение (5) может служить в какой-то степени адекватным описанием, коль скоро выполнено условие (7). И действительно, распределение (5) возникало во многих областях знания (подробнее - ниже), получая в каждой из них свое название.

Мы полагаем правильным использовать для него название *«распределение конкурентов»*, предложенное Б.А. Трубниковым в работе [10]. Эта работа была, по-видимому, первой попыткой дать теоретическое объяснение природы часто возникающих степенных распределений с $\alpha \sim 1$ с общих позиций, а не на основе анализа частных механизмов, специфичных для той или иной области.

Б.А. Трубников рассматривал процесс роста частиц, представляя его как движение «вдоль координаты масс». Полагая скорость роста частицы v пропорциональной ее массе m, для интенсивности потока j_m вдоль координаты масс он получает выражение

$$j_m = m v n_m \sim m^2 n_m,$$

где n_m - концентрация частиц массы m, что в предположении постоянства потока дает $n_m \sim m^{-2}$ [10].

Разумеется, понятие потока вдоль координаты массы требует пояснений, а его постоянство - обоснований. Тем не менее, описанная схема дает принципиальное представление о природе распределения (5). Оно служит отражением конкурентной природы роста, происходящего по формуле «на деньгу деньга бежит», когда достигнутый успех является подспорьем для дальнейшего развития, что типично для систем, характеризующихся степенным распределением размеров составляющих их частей. Модели, построенные в настоящей работе (см. ниже, раздел 2), являются, по существу, развитием этой идеи. Однако прежде чем переходить к ним, мы уделим внимание теоретическому рассмотрению некоторых свойств степенных распределений, а также вопросам практической работы с ними (см. ниже, раздел 1).

Ранговое представление

Степенные распределения, по сравнению с нестепенными, требуют для анализа существенно большего объема выборок. Как показывает практика, для уверенного установления того, что распределение имеет степенной вид, необходимо порядка 10^2 значений, а для надежного определения его показателя - не менее 10^4. Поскольку такие массивы данных зачастую недоступны, вместо плотности вероятности рассматривается *зависимость ранг - размер*.

Если расположить выборочные значения в порядке убывания величины n (провести ранжировку), то номер r значения в полученном списке называется его рангом. Процедура нумерации выполняется, вообще говоря, с точностью до произвольной аддитивной константы, то есть последовательные выборочные значения будут иметь ранги r_0, r_0+1, r_0+2... Ранг r_0, приписываемый крупнейшему значению, будем, следуя работам [3, 4], называть *величиной рангового искажения*.

Если плотность вероятности имеет степенной вид (1), то зависимость ранг - размер также задается степенной функцией

$$n(r) \sim r^{-\gamma}, \tag{8}$$

причем показатели α и γ связаны тривиальным соотношением[1]

$$\alpha\gamma = 1. \tag{9}$$

В самом деле, ранг значения n определяется числом превосходящих его выборочных значений

$$r(n) = \int_n^{n_{\max}} m \cdot u(n')dn' + r_0, \tag{10}$$

где m - объем выборки. Дифференцируя равенство (10) по n, получаем выражение плотности вероятности через ранговую зависимость

$$u(n) = (-1/m)dr(n)/dn,$$

которое, как легко видеть, устанавливает эквивалентность степенного вида формул (1) и (8) при выполнении соотношения (9). В частности, при $\alpha = 1$ зависимость ранг - размер (8) принимает гиперболический вид

$$n(r) \sim 1/r, \tag{11}$$

называемый *законом Ципфа* [3-6, 10, 11], который, таким образом, является альтернативной записью распределения конкурентов.

По сравнению с представлением степенных распределений в виде плотности вероятности ранговое описание содержит дополнительный параметр - величину рангового искажения. Выразив амплитуду выборки при помощи формулы (8) как

$$A = n_{\max}/n_{\min} = r_0^{-\gamma}/\,(m-1+r_0)^{-\gamma},$$

для рангового искажения находим [3]

$$r_0 = (m-1)/(A^{\alpha}-1). \tag{12}$$

Обыкновенно, в силу дискретной природы измеряемых величин или из-за

---

[1] В силу простоты связи между показателями α и γ в дальнейшем будем характеризовать все распределения величиной α вне зависимости от того, получено ли значение путем анализа плотности вероятности или зависимости ранг - размер.

ограниченной чувствительности измерительных приборов и методик n_{min} практически не зависит от объема выборки, то есть $A \sim n_{max}$. В этом случае максимальное значение выборки данного объема можно оценить при помощи формулы (1), что дает

$$m \sim A^{\alpha}. \qquad (13)$$

Сравнение формул (12) и (13) показывает, что при не очень больших m, пока отклонением плотности вероятности от степенного вида можно пренебречь, ранговое искажение имеет величину порядка единицы и отслеживает, главным образом, флуктуации n_{max}. При больших объемах выборки часть ее значений выходит из области промежуточной асимптотики, где справедлива формула (1). При этом амплитуда выборки становится меньше, чем предсказывает соотношение (13), что выражается в росте r_0.

Таким образом, ранговое искажение представляет собой поправку, которая учитывает нестепенной характер убывания функции $u(n)$ при больших n, а также флуктуации в конкретной статистической выборке. Иными словами, величина r_0 содержит в агрегированном виде ту информацию, которая не только не представляет самостоятельного интереса, но и препятствует определению показателя распределения при анализе плотности вероятности $u(n)$.

Два типа степенных распределений. Примеры

Масштабно-инвариантные системы можно отнести к одному из двух типов, которые определяются порядком реализации объектов или событий, описываемых степенным распределением.

Если такие события происходят последовательно, как, например, землетрясения или колебания биржевых индексов, то имеет место *масштабная инвариантность динамики*, обусловленная, как правило, самоорганизацией рассматриваемой системы в критическое состояние. При этом идущие в ней процессы не имеют характерных размеров и ее *поведение* можно рассматривать как целостное. Подробнее эта тема освещается в работах [1, 2, 9].

Отличной является ситуация сосуществования объектов, распределенных степенным образом, когда система слагается из не имеющих характерного размера частей, то есть *сама* является в некотором смысле целостной. Примеры подобной *масштабной инвариантности состояния* не менее многочисленны, чем примеры масштабной инвариантности динамики.

Так, в наукометрии широко известны имеющие вид (1) с $\alpha \sim 1$ *закон Брэдфорда* концентрации и рассеяния публикаций, описывающий распределение научных журналов по числу помещенных в них статей определенной тематики, и *закон Лотки* распределения ученых по научной продуктивности [3-6]. Степенной зависимостью описываются также распределения языков по числу выполненных на них научных публикаций ($\alpha \approx 0.54$) [3], имен ученых по частоте встречаемости в наборе учебников по психологии ($\alpha \approx 1.56$) [3], изданий в некоторой области по частоте цитирования ($\alpha \approx 0.64$) [3], разделов универсального десятичного каталога по числу подразделов ($\alpha = 0.8 \div 1.6$ для различных тем) [4], связанных между собой сотрудничеством групп ученых по их размеру ($\alpha \approx 1.17$) [4] и т.д.

«Именными» степенными законами распределения могут похвастаться также экономика (*закон Парето* распределения граждан по доходам с показателем, меняющимся в диапазоне от единицы до двойки и более в зависимости от страны и исторического периода [3,10]), математическая лингвистика (*закон Эсту -Ципфа* встречаемости различных словоформ в текстах с $\alpha \approx 1$ [3, 5, 6, 11, 13]) и география (*закон Ауэрбаха* распределения городов по числу жителей с $\alpha \approx 1$ [3, 10, 12, 17]).

Однако немало СЗРВ осталось безымянными. Из них отметим распределения фирм по числу служащих [3, 10], малых космических тел по массам [10], родов по числу входящих в их состав видов и отрядов по числу семейств [3, 14, 15], также характеризуемые значением показателя, близким к единице.

1. Практическая обработка выборок

Несмотря на широкую распространенность степенных распределений в самых различных областях знания, методики, которые позволяли бы с высокой степенью достоверности определить, что же именно мы наблюдаем, практически отсутствуют. Связано это не столько со скудностью имеющихся выборок, сколько со специфическими свойствами систем, описываемых СЗРВ, и самих распределений.

Обсуждение этих вопросов нельзя проводить отвлеченно, необходим конкретный фактический материал, в качестве которого нами было избрано распределение стран, а также крупных населенных пунктов (городов и агломераций[2]) по числу жителей. Анализ этих распределений позволяет обозначить основные препятствия, возникающие на пути изучения масштабно-инвариантных систем, и предложить способы преодоления некоторых из этих препятствий.

1.1. Определение параметров распределения

При анализе выборок основная сложность связана с необходимостью выделения области промежуточной асимптотики. Как уже было сказано, отклонение распределений от степенного вида в области больших значений учитывается введением рангового искажения. Однако, чтобы воспользоваться этим обстоятельством, все же необходимо найти величину r_0. Непосредственное использование для этого формулы (12), как предлагается в работе [3], представляется ошибочным. Поскольку то, что хорошо в теории, не всегда оказывается столь же хорошо на практике.

Даже если предположить, что нам каким-то способом удалось с удовлетворительной точностью определить показатель α, рассчитанная по формуле (12) величина r_0 все равно не заслуживает доверия. Связано это с тем, что входящие в эту формулу величины A и - в особенности - m сами по себе являются «довольно случайными», что ощутимо сказывается на результатах обработки выборки.

Хотя формально объем выборки m известен точно, на практике он может быть существенно занижен по сравнению с идеальной ситуацией[3] за счет *отсева* части малых значений, что приводит к завалу зависимости ранг - размер в области больших r (рис. 1). Отсев может быть обусловлен как ошибками при подготовке выборок или недостаточной точностью измерений, пропускающих часть малых значений, так и свойствами самих систем, по тем или иным причинам дискриминирующих свои малые части.

Так или иначе, но обычно возникает необходимость исключить из

---

[2] «Англомерация - компактная территориальная группировка городских и сельских поселений, объединенная в сложную локальную систему многообразными интенсивными связями…, а также совместным использованием ресурсов данного ареала.» [17]

[3] Под «идеальной ситуацией» понимается результат исследования конкретной системы, точно описываемой степенной зависимостью ранг - размер, при заданной величине минимально измеримого значения.

рассмотрения часть значений, наблюдаемая статистика которых не имеет степенного вида. Удовлетворительным оказался следующий алгоритм сокращения выборки. Из нее последовательно изымаются значения с наибольшим рангом до тех пор, пока величина рангового искажения, полученная при помощи аппроксимации данных зависимостью (8) по методу наименьших квадратов (в логарифмическом представлении), не сравняется со значением, которое дает формула (12).

Необходимо отметить, что описанная процедура не всегда выполнима. Связано это с флуктуациями максимального значения выборки и, соответственно, ее амплитуды A, что обычно приводит к занижению величины рангового искажения, вычисленной по формуле (12), из-за того, что максимальное значение «слишком» велико[4]. Поэтому вместо формулы (12), которая основывается лишь на максимальном значение выборки, для оценки r_0 уместно использовать усреднение по небольшому числу $K < 10$ крупнейших значений

$$r_0 = 1/K\, \Sigma_{i=1}^{K}\{(m-i)/[(n(r_0+i-1)/n(r_0))^{\alpha} -1] -i\}. \tag{14}$$

После такой модификации алгоритм определения параметров зависимости ранг - размер сбоев уже не дает. Однако усовершенствование процедуры обработки выборки достигается ценой перехода к двухкритериальной оптимизации. С одной стороны, необходимо охватить степенной зависимостью возможно больший кусок выборки. А с другой - не слишком увеличивать K из формулы (14), иначе есть риск, что степенная зависимость перестанет быть адекватным описанием.

Может так случиться, что алгоритм выдаст несколько решений, то есть наборов параметров r_0 и α, полученных при различных K и различающихся объемом удовлетворительно описываемой части выборки (Парето-оптимум). При этом необходимо как-то выбирать между ними.

Здесь сложно дать какие-либо рекомендации общего порядка. Единственно, необходимо предостеречь от чрезмерного доверия методам определения статистической значимости гипотез, поскольку они не могут служить критериями предпочтения, позволяя лишь отвергать неудовлетворительные гипотезы.

Кроме того, различные аппроксимации одних и тех же экспериментальных данных могут являться не конкурирующими гипотезами, а вариантами одного и того же описания, различающимися учетом тех или иных факторов. А коли так, то выбор между различными решениями должен быть обусловлен нашими представлениями о процессах, действующих в изучаемой системе. А в этом деле, тем более, нельзя полагаться на формальные методы.

Эту ситуацию наглядно демонстрирует рассмотрение зависимости ранг - размер для распределения стран по их населению по состоянию на 1950 и 1989 годы (см. рис. 1). Алгоритм дает два приемлемых решения - при $K = 1$ (рис. 1, *а*) и при $K = 7$ (рис. 1, *б*). Второй из них описывает почти вдвое большее количество стран и, соответственно, имеет меньшие показатели [5].

В чем разница между этими решениями?

Степенные ранговые зависимости, представленные на рис. 1, служат отражением масштабно-инвариантных свойств системы народонаселения. Однако масштабно-инвариантное описание есть лишь некоторое приближение, и, по-

[4] «Слишком» мало оно оказаться не может потому, что тогда оно уже не будет максимальным.

[5] Это обусловлено наличием в системе народонаселения небольшого числа доминирующих стран. По мере увеличения рассматриваемого куска выборки их относительная доля в нем падает, что компенсируется уменьшением показателя α.

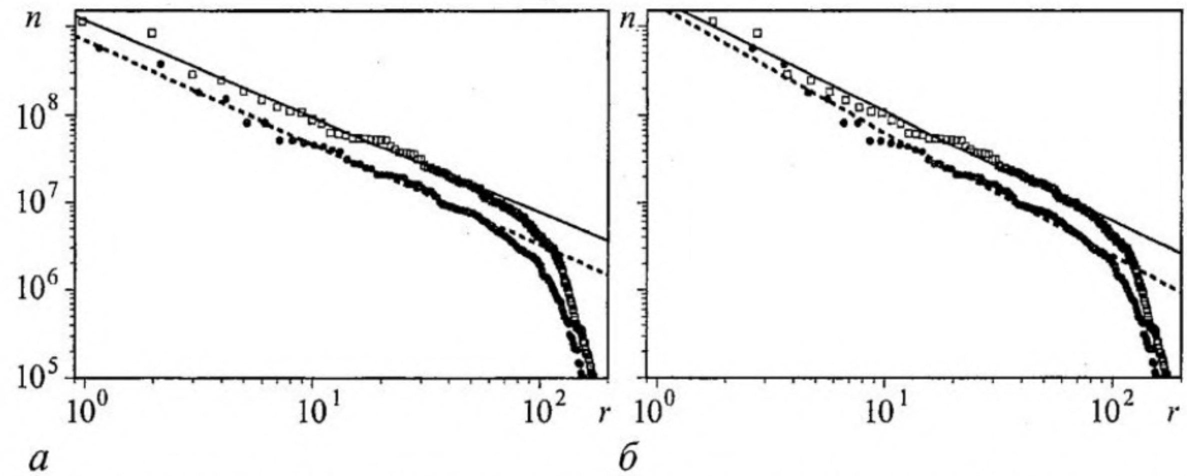

Рис. 1. Зависимость ранг - размер для распределения стран по населению. Зависимость имеет степенной вид на графиках (*а*) и (*б*) для пяти-шести десятков и почти сотни крупнейших стран, соответственно. При больших рангах наблюдается отклонение от степенной зависимости. Его можно интерпретировать как «нехватку» небольших стран или как недостаток населения в них. *а* - 1950: r_0=1.15, α=0.86 (K=1); 1989: r_0=0.97, α=0.92 (K=1). *б* - 1950: r_0=2.63, α=0.70 (K=7); 1989: r_0=1.75, α=0.79 (K=7). По данным [18]

видимому, имеется определенный порог, при превышении которого населением страны изменяются механизмы, управляющие ее положением в системе народонаселения.

Зависимости, показанные на рис. 1, *а*, описывают лишь достаточно крупные страны, попадающие, вероятно, в область действия одних и тех же механизмов, специфичных именно для крупных стран. Рис. 1. *б*, напротив, дает описание стран в более широком диапазоне численностей населения. Однако при этом проявляются лишь наиболее общие механизмы, значимые на протяжении всего этого диапазона, в результате чего графики получаются менее «опрятными» и точки на них располагаются «волной» (отличительный признак завышенного K). С другой стороны, рис. 1, *б* визуализирует индивидуальные демографические особенности некоторых стран. Так, например, две крупнейшие страны мира (Китай и Индия) заметно выбиваются из общей зависимости, а две следующие по размеру (СССР и США), бывшие в 1950-м еще «на уровне», к 1989 году, напротив, стали отставать.

Таким образом, в случае, когда есть несколько значений K, при которых получаемая зависимость ранг - размер описывает достаточный кусок выборки, конкретное предпочтение определяется тем, какие свойства изучаемой системы мы хотим учесть.

Справедливости ради необходимо отметить, что рассмотренная ситуация конкуренции нескольких решений не очень типична и в большинстве случаев предложенный алгоритм дает приемлемое описание лишь при каком-то одном значении K. Кроме того, в многообразии решений есть и свой плюс - разброс получающихся значений показателя распределения может служить некоторой оценкой его погрешности, которая обычно составляет примерно 0.05…0.10.

1.2. Проблемы измерений и формирования выборок

Задачи, связанные с обработкой выборок и интерпретацией получаемых результатов, являются в известной мере вторичными. Они решаются уже после того, как определено существо вопроса. Поэтому проблемы, возникающие на этой стадии, сравнительно легко преодолимы.

Основные же сложности кроются на первичной стадии - стадии формирования выборок и контекста, в рамках которого они должны исследоваться. Возникающие здесь проблемы можно подразделить на связанные с процедурой измерений и с процедурой подготовки выборок.

Первая проблема - *проблема измерений* - обусловлена существенной произвольностью определения размеров измеряемых объектов и разбиения системы на части, которые трактуются как отдельные объекты. При изучении любой сложной системы принципиальным является выделение из огромного множества измеримых величин тех, которые могут адекватно характеризовать данную систему или ее части. Так, например, если границы и население стран известны еще более-менее точно, то корректно определить границы города уже практически невозможно. Соответственно, сложно указать, как измерить число его жителей. В геоурбанистике выделяется несколько уровней городских систем: автономный город, городская агломерация, урбанизированные район и зона, мегалополис [17]. Однако эти понятия не имеют строгих самостоятельных (то есть вне иерархии уровней) определений. Конкретные же способы определения границ городских систем и подсчета числа их жителей определяются национальными стандартами, которые во многом произвольны.

Мы не имеем возможности каким-либо образом усовершенствовать определения или процедуру измерения и единственное, что нам остается, - это проанализировать те данные, которые могут предоставить географы и демографы, и посмотреть, что получится.

На рис. 2 приведены зависимости ранг - размер для распределения городов и агломераций, имеющих более ста тысяч жителей. Степенная зависимость, будучи хорошим приближением в обоих случаях, имеет, однако, существенно различные показатели α_C=1.28 и α_A=1.08 (что хорошо видно на рис. 2, графики (*а*) и (*б*) которого построены в одном масштабе).

Это обстоятельство можно было бы трактовать как отражение каких-то важных свойств различных уровней городских систем, если бы оно не было артефактом!

Построив зависимость населения агломерации n_A от населения образующего ее города n_C, мы видим (рис. 3), что она может быть приближена аллометрическим соотношением

$$n_A \sim n_C^{\lambda}, \tag{15}$$

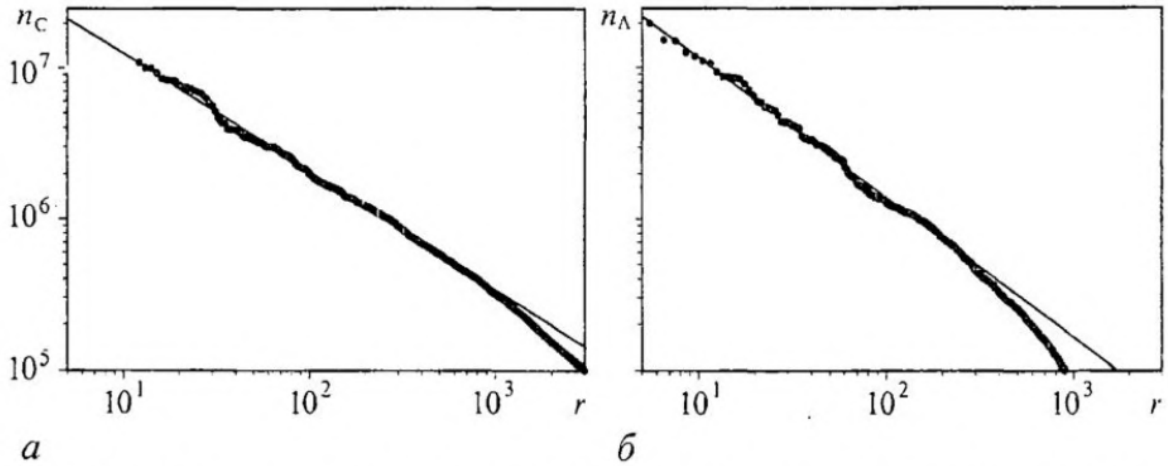

Рис. 2. Зависимость ранг - размер для городов(*а*) и агломераций (*б*), насчитывающих свыше 100 тыс. жителей. Степенная зависимость ранг - размер хорошо описывает порядка 30% крупнейших городов и агломераций. *а* - r_0=12.1, α_C=1.28 (*K*=2), объем выборки 2991; *б* - r_0=5.51, α_A=1.08 (*K*=2), объем выборки 892. По сравнению с рис. 1 завал графиков менее выражен, что говорит о значительно меньшей (по сравнению со странами) нехватке небольших городов и агломераций. По данным [19]

где λ = 0.99±0.02, то есть фактически имеет место прямая пропорциональность

$$n_A = kn_C\ , \qquad (16)$$

с $k \approx 1.6$.

Строго говоря, формулы (15) и (16) справедливы лишь по порядку величины или в среднем. Более подробно вопрос о том, как их трактовать, рассматривается в прил. 1. Там же выводится соотношение (П. 1.4) для показателей распределений взаимосвязанных характеристик (население городов и агломераций), с которым найденные значения $\lambda = 0.99$, $\alpha_C = 1.28$ и $\alpha_A = 1.08$ находятся в противоречии.

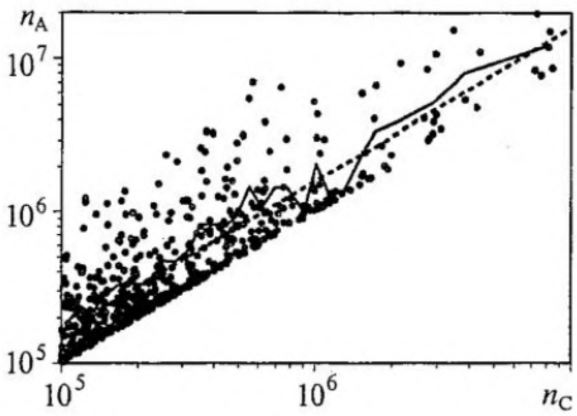

Рис. 3. Зависимость населения агломерации от населения образующего ее города по данным [19]. Хотя разброс точек довольно велик, сглаженная зависимость близка в двойных логарифмических координатах к прямой пропорциональности (показана пунктиром). То есть среднее население агломераций, образуемых городами с определенным населением, можно считать пропорциональным последнему. Отметим отчетливо видимый провал сглаженной зависимости для городов с населением чуть больше и чуть меньше 1 млн. чел. Данное искажение связано с чисто психологическим стремлением «дотянуть» официальное население города до миллионной отметки за счет включения в его черту предместий и городов-сателлитов. А когда ядро агломерации переваливает за миллион, начинается обратный процесс. Вызванные этим обстоятельством искажения можно обнаружить при внимательном рассмотрении ранговых зависимостей, приведенных на рис. 2,*б* и рис. 4.

В известной мере прояснить ситуацию позволяет рис. 4, который аналогичен рис. 2 с тем отличием, что для построения последнего использовались данные только по населенным пунктам, для которых в базе [19] приведены численности населения как города, так и агломерации. В этом случае показатели распределений становятся заметно ближе друг к другу, как и должно быть в соответствии с формулой (П. 1.4) при $\lambda \approx 1$, то есть противоречие в значительной степени снимается[6].

Таким образом, полная выборка городов-стотысячников и ее часть, для которой имеется некоторая дополнительная информация, обладают разными статистическими свойствами. Здесь мы сталкиваемся со второй проблемой первичного анализа - *проблемой формирования выборок.* Она является достаточно типичной при описании систем с масштабной инвариантностью состояния.

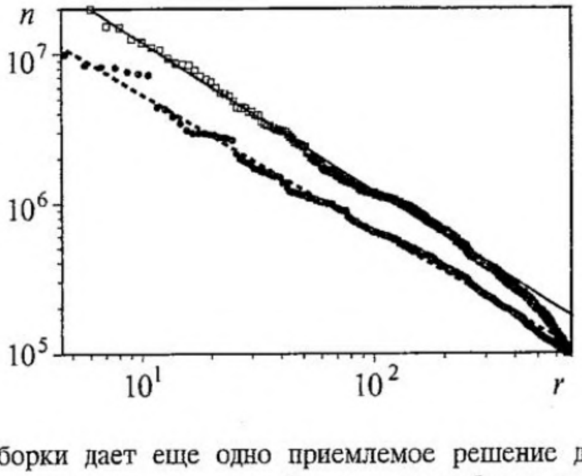

Рис. 4. Зависимость ранг - размер для тех населенных пунктов, насчитывающих свыше 100 тыс. жителей, для которых одновременно приводится численность населения как города, так и агломерации. На степенную зависимость укладываются не менее двух третей городов и половины агломераций. Объем обеих выборок 663 (тот же массив данных, что и для рис. 3). Параметры графиков: города - r_0=4.66, α_C=1.10 (K=1); агломерации - r_0=6.02, α_A=1.01 (K=2). По данным [19]

[6] Отметим, что алгоритм обработки выборки дает еще одно приемлемое решение для агломераций при K=1, имеющее α_A=1.08. Хотя оно описывает лишь чуть более трети выборки, если принять его, то соответствие с формулой (П. 1.4) становится отличным.

Так, например, закон Эсту - Ципфа выполняется лишь для целых текстов, но не выполняется ни для их фрагментов или объединений, ни для языка в целом [13]. Аналогичные сложности, связанные с формированием выборки, имеют место при описании научной продуктивности ученых [3].

Большой разброс показателей распределения родов по числу входящих в них видов для разных групп организмов, вероятно, обусловлен различиями подходов к классификации, применявшихся разными исследователями [14]. Распределение отрядов по числу семейств для ископаемых организмов характеризуется большими значениями показателя α, чем для живущих [15], что также может быть обусловлено различиями в методах их классификации.

Еще одним примером может служить приведенная на рис. 5 зависимость ранг - размер для 320 агломераций, население которых в 1996 году превысило 1 млн. жителей, по состоянию на 1995 и 1950 годы.

С точки зрения критерия формирования выборки анализ этих данных для 1950 года является бессмысленным, однако он позволяет наглядно продемонстрировать один из механизмов отсева малых значений. Многие агломерации среднего размера, существовавшие в 1950 году, не попали в выборку на основании критерия, не имеющего прямого отношения к положению дел на тот момент времени. В самом деле, нет никаких оснований при изучении размеров агломераций принимать или не принимать их к рассмотрению, исходя не из их населения, а из его прироста, который произойдет в течение полувека после момента рассмотрения. Здесь ситуация искусственно доведена до абсурда, но в других случаях неадекватность критерия может и не быть столь очевидной.

Необходимо отметить еще одно весьма существенное обстоятельство. Хотя показатели, полученные нами для разных лет, близки (см. рис. 5), при неаккуратном анализе ранговой зависимости, имеющей завал в области больших рангов, возможно завышение показателя γ (занижение α), что означает преувеличение роли крупных значений.

Сравнение показателей распределения агломераций, полученных на основе данных из книги [17] и базы [19], не позволяет сделать однозначных выводов.

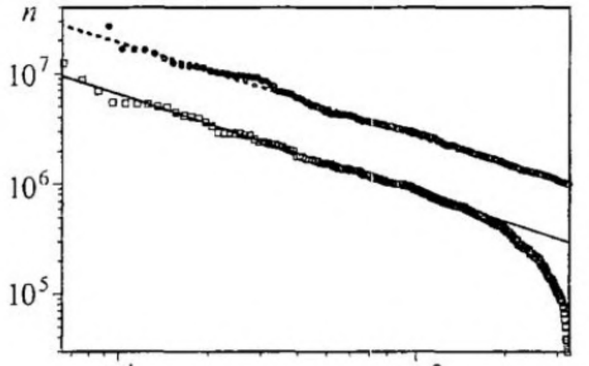

Рис. 5. Зависимости ранг - размер для агломераций, достигших к 1996 г. миллионного рубежа. Зависимость, имеющая степенной вид для данных, относящихся к 1995 г., демонстрирует завал в области малых значений при попытке построить ее для того же самого набора агломераций, но по состоянию на 1950 г. В то время как для 1995 г. степенная зависимость описывает 100% агломераций, для 1950 г. - чуть более 50%. Объем обеих выборок 320. Параметры графиков: 1995 - r_0=9.27, α=1.18 (K=3); 1950 - r_0=6.56, α=1.13 (K=5). По данным [17]

С одной стороны, эти показатели нельзя счесть в точности совпадающими. Их различие может быть обусловлено как тем, что в первом случае данные приведены к одной дате, а во втором - относятся к разным датам 1960-1995 годов, так и различными оценками численности населения агломераций (отличие порой разительно, - например, население агломерации Токио, согласно данным [17], в 1990 году превышало 25 млн. чел., а по данным [19] к октябрю 1989 - не достигало и 12 млн. чел.).

С другой стороны, несмотря на все эти обстоятельства, описание зависимости ранг - размер степенной функцией в обоих случаях является удовлетворительным, а различие показателей не очень велико. Это, по-видимому, означает, что формирование выборок потенциально является источником более сильных и разнообразных искажений, чем непосредственно измерения.

Подводя итог обсуждению практической обработки выборок, можно сказать следующее.

Даже если мы имеем корректные определения анализируемых объектов и процедуру измерения, это не служит гарантией того, что мы сформируем выборки, способные служить отражением действующих в изучаемой системе процессов. Неадекватные выборки могут приводить к «открытию» паразитных закономерностей, исключить или выправить которые без ясных теоретических сведений о конкретной системе, вообще говоря, невозможно.

Единственным подспорьем здесь может быть общее представление о том, какие закономерности в принципе возможны в сложных системах и каким образом они возникают. То есть необходимо понимание универсальных механизмов, которые могут действовать в системах любой природы. Подробному анализу одного из таких механизмов, обуславливающего масштабную инвариантность состояния, посвящен раздел 2.

2. Линейные модели, приводящие к степенным распределениям

Широкая распространенность СЗРВ в системах различной природы означает, что их возникновение должно быть обусловлено простыми механизмами [1, 2]. По этой причине при теоретическом исследовании уместно отрешиться от любой конкретной специфики и строить схематичные модели, упрощенные настолько, насколько это возможно при сохранении изучаемого явления.

2.1. Модель А - простейшие правила

Рассмотрим систему, представляющую собой набор агентов, характеризуемых своим размером n. На каждом шаге времени в нее извне приходит единица ресурса. С вероятностью p она становится новым агентом единичного размера, а с вероятностью q=1-p прилипает к одному из уже имеющихся агентов, который избирается для этого случайно с вероятностью, пропорциональной его размеру (конкуренция за поступающий ресурс).

Сформулированные правила описывают систему, элементы которой взаимодействуют непосредственно с системой в целом, но не друг с другом. Причем сама система, как и входящие в нее агенты, характеризуется лишь своим размером, который равен суммарному размеру всех составляющих ее агентов.

Будем считать, что исходно система пуста и приходящие единицы ресурса «проходят мимо» до тех пор, пока одна из них не становится первым агентом. Для определенности положим, что он появился на нулевом шаге времени. Тогда размер системы к моменту t

$$S(t) = t, \tag{17}$$

а среднее количество агентов в ней

$$m(t) \cong pt\,. \tag{18}$$

Без потери общности можно считать, что чем раньше появился агент, тем больше его размер. В самом деле, если более молодой агент обгоняет в росте более старого, то в момент равенства размеров они находятся в одинаковых условиях, что позволяет провести переобозначение. Таким образом, ранги агентов однозначно связаны с порядком их возникновения. Среднее время появления агента ранга r дается формулой

$$t(r) = 1+(r - r_0)/p, \tag{19}$$

где r_0 - ранг, приписываемый крупнейшему агенту.

Усредненный рост агентов описывается уравнением

$$n(r,t+1) = p_+(r, t) \cdot (n(r, t) + 1) + (1 - p_+(r, t)) \cdot n(r, t) = p_+(r, t) + n(r, t), \tag{20}$$

где $p_+(r,t) = q \cdot n(r,t)/S(t)$ - вероятность, что именно агенту ранга r достанется пришедшая в момент времени t единица ресурса.

При переходе от дискретного времени к непрерывному с учетом формулы (17) уравнение (20) превращается в дифференциальное уравнение

$$dn(r)/n(r) = qdt/t,$$

решение которого, удовлетворяющее условию (19), есть

$$n(r, t) = \{m(t)/[r - (r_0 - p)]\}^q, \tag{21}$$

так как на момент своего появления все агенты имеют единичный размер.

Если положить $r_0 = p$, формула (21) превращается в степенную зависимость ранг - размер (8) с $\gamma = q$, которая, в свою очередь, переходит при $p << 1$ в закон Ципфа (11). Соответственно, плотность вероятности распределения агентов по размеру описывается формулой (1) с $\alpha = 1/\gamma = 1+p/q$.

Типичный вид ранговых зависимостей, получающихся при компьютерном прогоне модели, представлен на рис. 6. Видно, что зависимость (21), полученная рассмотрением процесса роста в среднем, удовлетворительно описывает его.

Вместе с тем необходимо отметить, что теоретическая зависимость огибает сверху данные, полученные при моделировании. Соответственно, при их усреднении или сглаживании зависимость ранг - размер «приобретает» завал в области больших r, обусловленный дискретной природой ранжируемой величины.

Отсюда можно сделать вывод, что одной из возможных причин отсева малых значений может служить дискретность. Если дискретность привносится процедурой измерений, то ее можно легко выявить по «ступенькам», пример которых мы можем видеть на рис. 6, и компенсировать при анализе. Если же дискретность заключена в природе происходящих в системе процессов (они могут, например, иметь пороговый характер), то для элиминации порожденных дискретностью искажений необходима, вообще говоря, уже специальная обработка выборки типа той, которая была описана в разделе 1.

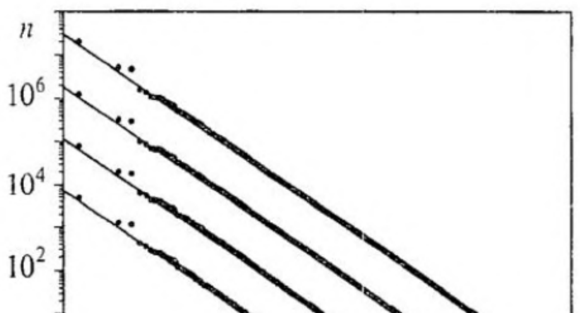

Рис. 6. Результаты прогона модели А с p=0.2. Полученная зависимость ранг - размер приведена на моменты времени $t = 2^{15}, 2^{20}, 2^{25}$ и 2^{30} (снизу вверх). Для сравнения приведены также графики теоретической зависимости (21). Отметим, что отклонения экспериментальной зависимости от теоретического вида в области малых r, возникшие на ранних стадиях, со временем не демонстрируют тенденций к исчезновению

Завершая рассмотрение модели, остановимся на следующем принципиально важном обстоятельстве. Самоорганизованно критические системы, обладающие масштабно-инвариантной динамикой, состоят из локально взаимодействующих элементов с нелинейными свойствами [1, 2, 9]. Предложенная модель формирования масштабной инвариантности имеет иную природу. Она описывает систему линейных элементов, друг с другом непосредственно не взаимодействующих. Однако в правила модели изначально заложена целостность системы. Несмотря на «примитивный» характер этой целостности (информация о суммарном размере системы), она все же необходима для возникновения масштабной инвариантности в линейной системе без тонкой подстройки параметров модели.

Отметим, что схожая ситуация имеет место в моделях с когерентным шумом, где воздействие на ансамбль невзаимодействующих нелинейных элементов как на единое целое приводит к масштабно-инвариантной динамике [20-22]. Тем не менее, настоящая модель принципиально отличается от моделей с когерентным шумом линейностью элементов.

2.2. Временная динамика модели А

Хотя описанные правила быстро приводят систему в состояние, описываемое СЗРВ, ее состояние продолжает меняться со временем, а качествен-ные свойства оказываются вовсе не такими, как можно было бы ожидать на первый взгляд.

Как указывалось выше, величина рангового искажения обыкновенно больше или порядка единицы. Однако для зависимости (21) $r_0 = p$, то есть возможна ситуация, когда $r_0 << 1$.

Кроме того, значение показателя $\alpha > 1$ означает, что основной вклад в размер системы вносят мелкие агенты. Тем не менее, как следует из формулы (21), размер только одного крупнейшего агента есть $n_{max}(t) = n(r_0, t) = t^{q}$. Его доля в полном размере системы составляет $n_{max}(t)/S(t) = t^{-p}$, уменьшаясь в e раз за время $t^* = e^{1/p}$.

При $p << 1$ величина t^* астрономически велика, и на разумных временах имеет место ситуация доминирования одного или нескольких (в зависимости от начальных условий) крупнейших агентов над остальными. Поскольку она не является типичной для реальных масштабно-инвариантных систем, в них должны существовать механизмы, направленные против крупных агентов. Таковыми могут быть, например, замедление темпов их роста или даже их исчезновение по причинам исчерпания ресурса роста, старения и т.п. Модель В, включающая подобный механизм, строится в п. 2.3, а сейчас выведем еще одну формулу, дающую представление о временной динамике модели А.

При анализе ранговых зависимостей иногда рассматривается величина $r_b = r(n_b)$, которую, следуя логике данного изложения, уместно именовать *рангом рубежа*. Она разделяет ранжировку на два отрезка, суммы значений в которых равны. По аналогии с формулой (4) для ранга рубежа можно вывести соотношение

$$r_b = (r_0 m)^{1/2} \cdot [\mathrm{ch}((1-\gamma)/2 \cdot \ln(m/r_0))]^{1/(1-\gamma)}, \qquad (22)$$

второй множитель в котором неотличим от единицы при $|1-\gamma|(\lg^2(m/r_0) << 1$. Если, кроме того, $r_0 \sim 1$, то формула (22) переходит в так называемый *закон квадратного корня* [3]

$$r_b \cong m^{1/2},$$

гласящий, что для выборки, описываемой законом Ципфа, количество крупных значений, вносящих половинный вклад в сумму, составляет приблизительно корень квадратный из объема выборки.

Применительно к модели А соотношение (22) можно упростить на основании формул (18) и (21), переписав его в виде

$$r_b/m = 1/t^{1/2}\,[\mathrm{ch}(p\ln(t^{1/2}))]^{1/p} \cong \begin{cases} 1/t^{1/2} & \text{при } p\,\lg^2 t << 1 \\ 2^{-1/p} & \text{при } p\,\lg^2 t >> 1. \end{cases}$$

Таким образом, отношение ранга рубежа к полному количеству агентов в течение долгого времени убывает, асимптотически приближаясь к очень малой, но постоянной величине. С формальной точки зрения это может означать, что на больших временах (в стационарном режиме) основной вклад в среднее и в сумму вносит конечная доля выборки, как и должно быть при $\alpha>1$[7]. Однако эта доля весьма невелика, что является следствием наличия на начальном этапе времени доминирующих агентов и слишком длительного переходного процесса.

Данное обстоятельство служит дополнительным доводом в пользу введения в модель факторов, противодействующих чрезмерному росту крупных агентов и способствующих скорейшему ее выходу на стационарный режим.

2.3. Модель В - правила с выбытием

Рассмотрим модификацию модели А такую, что захваченная агентом единица ресурса с некоторой вероятностью $p'<p/q$ оказывается «смертельной», вызывая его исчезновение.

Выкладки на этот раз проведем в терминах плотности вероятности. Обозначим через $N(n,t)$ количество агентов размера n на момент времени t. Для $n > 1$ эта величина за один шаг времени в среднем изменяется на

$$\dot{N}(n,t) \cong N(n,t+1) - N(n,t) = -\,q[N(n,t)n/S(t)] + qq'[N(n\text{-}1,t)(n\text{-}1)/S(t)], \qquad (23)$$

где отношение $N(n,t)n/S(t)$ определяет вероятность слипания пришедшей единицы ресурса с агентом размера n, а $q'=1-p'$ - вероятность выживания агента после слипания.

Плотность вероятности распределения агентов по размерам есть не что иное как

$$u(n,t) = N(n,t)/m(t), \qquad (24)$$

где $m(t) = (p-qp')t$. В стационарном режиме, когда u не зависит от t, уравнение (23) сводится с учетом формулы (24) к равенству

$$[u(n)/q]\cdot S(t)/t = -u(n)n + q'u(n-1)(n-1). \qquad (25)$$

Поскольку его правая часть не зависит от времени, левая также не должна зависеть. Введя обозначение $S(t)/t = a$, окончательно перепишем формулу (25) в виде разностного уравнения относительно $v_n = u(n)n$

$$a/(qn) = -1 + q'v_{n-1}/v_n. \qquad (26)$$

Выразив отношение последовательных значений v_n как

$$v_{n-1}/v_n = (1/q')[1+a/(qn)] \approx q'^{\,n-1}/q'^{\,n}[(n-1)/n]^{-a/q},$$

[7] При $\alpha<1$, как следует из формулы (22), $r_b \sim r_0$ на больших временах, то есть ранг рубежа не меняется с увеличением m (конечно в области применимости формулы (1)), а отношение r_b/m, соответственно, неограниченно убывает.

легко находим решение уравнения (26), а следовательно, и выражение для плотности вероятности при $n >> 1$

$$u(n) = Bn^{-(1+\alpha)}e^{-\beta n}, \qquad (27)$$

где $\beta = -\ln q'$ и $\alpha = a/q$, а B - нормировочный коэффициент.

Как следует из формулы (27), при $\beta n << 1$ распределение агентов имеет степенной вид. Явное выражение β через параметры модели позволяет свести обработку результатов моделирования к определению параметров линейной зависимости, что продемонстрировано на рис. 7.

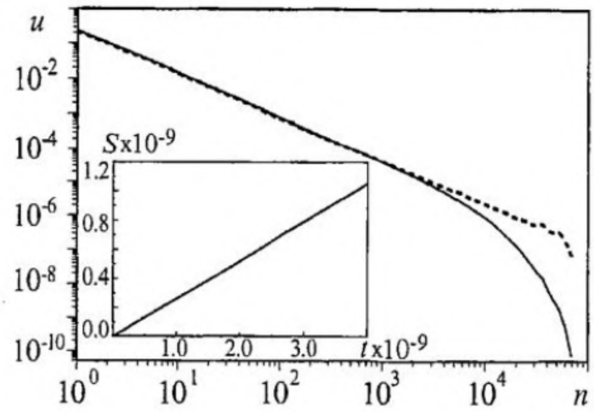

Рис. 7. Результаты моделирования при $p=10^{-3}$ и $p'=10^{-4}$. Моделирование проводилось до достижения системой размера $S=2^{30}\approx1.07\cdot10^9$, что при данных параметрах потребовало $t\approx4.05\cdot10^9$ шагов. Пунктиром показана экспериментальная плотность вероятности, домноженная на $e^{\beta n}$. Видно, что эта функция имеет в двойных логарифмических координатах линейный вид, как и следует из формулы (27). Показатель $\alpha=0.265\pm0.005$. На врезке дана зависимость размера системы от времени

С другой стороны, показатель может быть найден на основе данных о скорости роста системы как $\alpha = S(t)/qt$ (см. врезку на рис. 7). При компьютерном моделировании сложных систем всегда существует риск возникновения ошибок, вызванных недостаточным для установления стационарного режима временем моделирования. Наличие двух независимых оценок α позволяет если и не избежать подобных ошибок, то, по крайней мере, выявить их.

Компьютерное моделирование показывает, что распределение агентов действительно может быть описано формулой (27). Для полноты картины осталось связать входящие в нее величины α и B с параметрами модели.

Аналитическое определение нормировочного коэффициента B затруднено, поскольку нормировочный интеграл $\int u(n)dn$ набирает свое значение в области малых значений n, где формула (27) неточна. Вытекающая из нее грубая оценка $B \approx \alpha$ вряд ли может быть улучшена.

В отличие от нормировочного коэффициента, конкретная величина которого принципиального значения не имеет, показатель α является основной характеристикой распределения, поэтому мы приводим для него выкладки, несмотря на их громоздкость.

Размер системы S удовлетворяет (в среднем) уравнению

$$\dot{S}(t) \cong S(t+1) - S(t) = (1 - qp') - qp'\Sigma_n[N(n,t)n/S(t)]n = 1 - qp'(1 + \mathrm{Sc}\,n),$$

где $\mathrm{Sc}\,n = \langle n^2\rangle/\langle n\rangle$ - масштаб агентов [1, 2, 23], а $\langle n\rangle = S(t)/m(t)$ - их средний размер. Как было указано выше, $S(t) = at = \alpha qt$. Следовательно,

$$\alpha q = 1 - qp'(1 + \mathrm{Sc}\,n), \qquad (28)$$

что дает выражение, связывающее показатель распределения с масштабом.

С другой стороны, величина масштаба может быть рассчитана непосредственно на основе формулы (27). Вычислим для этого его i-й момент распределения

$$\langle n^i\rangle = \Sigma_{n=1}^{\infty} n^i u(n) \cong \int_{n_0}^{\infty} u(n)n^i dn = \int_0^{\infty} u(n)n^i dn - \int_0^{n_0} u(n)n^i dn. \qquad (29)$$

Введение нижнего предела $n_0 \sim 1$ при переходе от суммирования к интегрированию учитывает дискретность величины n. После подстановки плотности вероятности (27) в формулу (29) первый интеграл в ней вычисляется точно, а во втором можно пренебречь экспоненциальным множителем, что дает

$$\langle n^i \rangle \sim \beta^{\alpha-i} \cdot \Gamma(i-\alpha) - n_0^{\,i-\alpha}/(i-\alpha),$$

откуда окончательно получаем

$$\mathrm{Sc}n = \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot \frac{1-(\beta n_0)^{2-\alpha}/\Gamma(3-\alpha)}{1-(\beta n_0)^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha)} \approx \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{1-\beta^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha)}. \tag{30}$$

При $\beta<<1$ поправкой в числителе можно пренебречь, в то время как поправка, входящая в знаменатель, оказывается существенной при α, близких к 1, даже для малых β, так как β возводится в степень, близкую к нулю (по этой же причине можно пренебречь и возможным отклонением n_0 от 1).

Система уравнений (28) - (30) в общем случае слишком сложна для аналитического исследования. Ее приближенное исследование при $p'<<1$ дается в прил. 2, а численные решения изображены сплошными линиями на рис. 8. На этом рисунке приведены также результаты моделирования при различных p и p', полученные на момент достижения системой размера $S = 2^{30}$.

Поскольку при достаточно малых p и p' система даже на столь больших временах не демонстрировала выхода на стационар, было применено итерирование. В качестве начального состояния для последующих итераций устанавливался набор агентов общей суммой $S_0 = 2^{24}$ (против $S_0 = 1$ для первой итерации), размеры которых выбирались из распределения, найденного в результате предыдущей итерации. Для получения приведенных результатов потребовалось от одной до трех итераций в зависимости от значений p и p'.

Анализ результатов, приведенных на рис. 8, и выкладки из прил. 2 позволяют сделать следующие выводы.

• Как и следовало ожидать, при фиксированном p и $p'\to 0$ модель B переходит в модель A, имеющую показатель $\alpha = 1+p/q$;

• При фиксированном p' показатель распределения монотонно уменьшается по мере приближения p к p'.

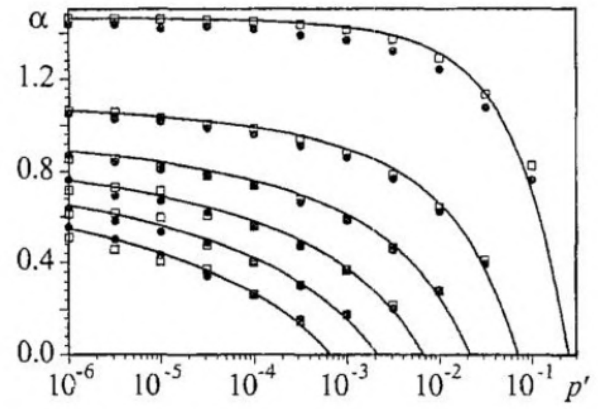

Рис. 8. Значения показателя α в зависимости от вероятностей p и p'. Кружочками показаны значения, полученные на основе результатов компьютерного моделирования при анализе плотности вероятности с помощью формулы (27), а квадратиками - из зависимости $S(t)$. Сплошные линии - теоретическая зависимость. Графики (снизу вверх) соответствуют значениям p=0.001, 0.0032, 0.01, 0.032, 0.1 и 0.32

Таким образом, несмотря на то, что при $p' = 0$ модели A и B идентичны, при сколь угодно малом, но ненулевом p' их свойства оказываются принципиально различны. В то время как модель A дает СЗРВ с $\alpha >1$, модель B может иметь $\alpha<<1$ при близких p' и p. При этом диапазон значений, описываемый степенным законом распределения, который определяется условием $\beta n<<1$, может быть сколь угодно расширен путем уменьшения p'.

2.4. Линейный рост. Общий анализ

Как уже отмечалось выше, правила рассматриваемых моделей линейны. Так, например, для модели A рост агентов описывается (в среднем) уравнением

$$\dot{n} = f(t, n),$$

правая часть которого $f(t,n) = qn/t$ - линейна по n, а количество агентов $m(t)$ задается формулой (18).

Рассмотрим случай произвольных функций $f(t,n)$ и $m(t)$.

Количество агентов размером $n>1$ подчиняется уравнению неразрывности

$$N_t + (fN)_n = 0. \tag{31}$$

В стационарном режиме плотность вероятности u не зависит от времени. Подстановкой $N(n,t) = m(t)u(n)$ уравнение (31) сводится к

$$-(fu)_n/u = \dot{m}/m. \tag{32}$$

Решение уравнения (32)

$$u(n) \sim 1/f(n,t) \exp\{-\dot{m}/m \int dn'/f(n',t)\}$$

в случае линейного роста с $f(n,t) = n{\cdot}g(t)$ представляет собой СЗРВ (1) с показателем

$$\alpha = \dot{m}/(mg) \tag{33}$$

(разумеется, при условии, что эта комбинация не зависит от времени, - в противном случае стационарная плотность вероятности может не иметь степенного вида или даже не существовать вовсе).

Таким образом, показатель распределения при линейном росте может принимать, вообще говоря, произвольное положительное значение, определяемое соотношением скоростей появления новых агентов и роста уже имеющихся. Процессы появления и роста агента являются противонаправленными в том смысле, что первый усиливает роль мелких агентов, а второй - крупных. Значение $\alpha = 1$, которое дает модель А при $p \to 0$, соответствует балансу этих процессов.

Отметим, что отражающая целостность системы информацияо ее размере существенна для получения $\alpha \sim 1$. В противном случае говорить о масштабной инвариантности не приходится, поскольку при $\alpha>>1$ распределение будет практически неотличимо от нестепенного, а при $\alpha<<1$ - от равномерного. Однако для ансамбля агентов, рост и появление которых описываются произвольными функциями $g(t)$ и $m(t)$, шансы на то, что отношение (33) окажется порядка единицы (даже если оно будет постоянным), не больше, чем шансы, что управляющий параметр сложной системы случайно окажется в окрестности критической точки. Поэтому для возникновения масштабной инвариантности необходима либо искусственная подстройка отношения (33) к значению, близкому к единице, либо прямое согласование скоростей процессов появления и роста агентов через информацию о полном размере системы.

Схожим образом устроены самоорганизованно критические системы, где вместо подстройки управляющего параметра к *a priory* неизвестному критическому значению производится установка параметра порядка в +0 [1, 2, 24]. Для этого не требуется никакая дополнительная информация, что отличает самоорганизованно критичное поведение от линейного роста в целостной системе. Разница между ними состоит также в том, что при линейном росте значение показателя распределения можно без труда варьировать, в то время как самоорганизованно критические системы являются грубыми и произвольное изменение их параметров обыкновенно не приводит к изменению показателя [1, 2, 9, 25].

Наряду с определением вида плотности вероятности по заданной функции f интерес представляет рассмотрение обратной задачи: какова должна быть эта функция, чтобы плотность вероятности имела определенный вид? Для случая $u(n) \sim n^{-(1+\alpha)}$ на основании формулы (32) легко находим общий вид функции

$$f(t, n) = (\dot{m}/m)\cdot(n/\alpha) + c(t) \cdot n^{1+\alpha}, \tag{34}$$

где $c(t)$ - произвольная функция времени. Отметим, что при $\alpha=1$ правая часть формулы (34) представляет собой полином и может рассматриваться как два первых члена разложения произвольной функции от n по степеням аргумента. Данное обстоятельство является дополнительным доводом в пользу «особенности» случая $\alpha=1$.

Обсуждение и выводы

Одной из основных числовых характеристик масштабно-инвариантного поведения являются показатели степенных распределений. Преимущественный интерес представляет ситуация, когда показатель не превышает двойки. В противном случае принципиальных отличий между статистическими свойствами величин, подчиняющихся такому степенному распределению и быстро убывающим нестепенным распределениям, нет.

Случайную величину, не имеющую характерного значения, можно также характеризовать областью значений, вносящих доминирующий вклад в сумму (среднее). При показателе, меньшем единицы, доминируют крупные значения выборки, а при большем - мелкие. Введенная в работе величина рубежа, разделяющего диапазон значений на части, вносящие равный вклад в сумму, может здесь служить ориентиром.

На практике вместо распределений вероятностей часто используются зависимости ранг - размер, менее требовательные к объему выборок. Кроме того, для точного определения показателя распределения необходимо выделение области промежуточной асимптотики, где только и применимо степенное описание. А если размер этой области невелик, то существенным становится знание о том, как именно нарушается степенной вид плотности вероятности при очень больших значениях. Ранговый подход дает возможность обойти эти препятствия, сосредоточив всю важную информацию о нестепенном поведении распределения в одном числе - величине рангового искажения.

Менее очевидной является ситуация с отсевом малых значений, приводящим к нестепенному виду функции распределения и ранговой зависимости на другом конце диапазона значений. Предложенный в работе алгоритм обработки выборок позволяет эту ситуацию удовлетворительно разрешить. Однако при этом иногда получается несколько решений, имеющих различные показатели и описывающих различные объемы данных. В этом случае окончательный выбор может основываться только на конкретных сведениях о рассматриваемой системе.

Изучение сложных масштабно-инвариантных систем затрудняется также проблемами измерений и формирования выборок, заключающимися в отсутствии формальных критериев, определяющих, соответственно, размеры и границы измеряемых объектов и правила отбора данных. Следствием этого может явиться ощутимое искажение результатов - вплоть до ошибок в величине показателей.

Помочь здесь могут только общетеоретические представления о механизмах, действующих в системах, демонстрирующих масштабную инвариантность состояния. Их общей чертой является конкурентный рост, при котором увеличение размеров отдельных частей системы - агентов - представляет собой результат дележа общего прироста размеров системы или перераспределения между агентами долей участия в системе, если ее размер постоянен. В первом случае рост происходит тем быстрее, чем больше уже достигнутый размер, а во втором - чем больше контролируемая агентом доля системы, тем больше он сможет отобрать у конкурентов в дальнейшем. Так, рост населения городов или стран представляет собой часть глобального демографического процесса, а распределение граждан по доходам или фирм по числу служащих формируется в результате рыночной конкуренции. Однако в большинстве случаев выбор между этими вариантами - лишь вопрос трактовки. Например, изменение объема тематических разделов научных журналов можно рассматривать и как часть процесса увеличения числа тем вследствие общего развития науки, и как конкуренцию между различными ее областями.

В любом случае, наличие во многих системах связи между размером ее частей и перспективами их развития не вызывает сомнений. Как показывает проведенный анализ, для возникновения степенных распределений достаточно, чтобы эта связь носила характер прямой пропорциональности (мальтузианский рост), хотя возможны и более сложные зависимости. Существенным, однако, является также постоянное появление новых мелких агентов.

В построенных моделях линейного роста предполагается, что коэффициент пропорциональности между скоростью роста и размером одинаков для всех агентов. Это, вообще говоря, не так, и иногда имеет место ситуация, когда агенты одинакового размера растут с различной скоростью. При этом систему можно разбить на группы агентов, существующих как бы в разном времени (для одних оно может идти быстрее, для других - медленнее, а для третьих - и вовсе останавливаться). Однако темп времени не оказывает влияния на показатель распределения, который определяется лишь отношением скоростей появления новых агентов и роста имеющихся, но не их абсолютными значениями. Если это отношение будет различным для различных временных групп, то окажется невозможным установление стационарного вида плотности вероятности, а если одинаковым - то их наличие не скажется на величине показателя. Таким образом, сделанное упрощение, по-видимому, является вполне законным.

Введение в модель механизма выбытия агентов, действующего также по линейным правилам, помимо ускорения процесса ее выхода на стационар, оказывает влияние на показатель. Парадоксальным является то, что увеличение вероятности гибели агента приводит к уменьшению показателя, то есть к увеличению роли крупных агентов, против которых в первую очередь и направлен механизм выбытия.

Чтобы линейные правила приводили к масштабной инвариантности, необходима их дополнительная настройка, ориентированная именно на целостные свойства системы. В рамках предложенных моделей она осуществляется естественным образом через информацию о полном размере системы (мы назначаем каждому агенту именно такие вероятности захвата приходящих частичек ресурса, чтобы имел место баланс между ростом и появлением агентов). В то же время, нелинейные правила самоорганизованно критических систем, как это следует из самого их названия, не требуют никакой настройки для возникновения масштабно-инвариантной динамики.

Самопроизвольное появление целостных свойств возможно только в нелинейных системах, но, как показывает данная работа, линейным системам не хватает для этого совсем чуть-чуть.

В заключение пользуюсь приятной возможностью поблагодарить Г.Г. Малинецкого за плодотворное обсуждение и помощь при подготовке настоящей статьи, а также В.А. Шупера, А.И. Ноарова и Ю.А. Данилова за консультации по ряду важных вопросов.

Приложение 1

Связь показателей

Пусть есть две произвольные характеристики x и y одного и того же явления. Их плотности вероятностей связаны соотношением

$$p_y(y) = \int p(y|x)\cdot p_x(x)dx, \qquad (\text{П.1.1})$$

где $p(y|x)$ - условное распределение y при данном x.

Если между величинами x и y имеется функциональная зависимость, то $p(x|y) = \delta(y(x) - y)$ и соотношение (П.1.1) сводится к формуле $p_y(y)dy = p_x(x)dx$, по сути означающей, что при переходе от одной характеристики к другой должна сохраняться вероятность. Однако характеристики сложных систем обычно связаны между собой лишь вероятностным образом, что не позволяет при строгом рассмотрении пользоваться этой формулой (хотя даже она в некоторых случаях приводит к верным результатам).

В масштабно-инвариантных системах величины x и y подчиняются СЗРВ с некоторыми показателями α_x и α_y, соответственно. При этом запись условного распределения также не должна содержать характерных значений, что ограничивает его общий вид функцией

$$p(y|x) = x^{-\lambda}f(yx^{-\mu}). \qquad (\text{П.1.2})$$

В случае произвольности рассматриваемых характеристик, по-видимому, нельзя сделать больше никаких утверждений относительно вида функции $p(y|x)$. Однако ситуация меняется, если мы предполагаем наличие взаимной связи между x и y, выражающееся в существовании некоторой функциональной комбинации $z = z(x,y)$, условное распределение которой

$$p(z|x) = g(z)$$

не зависит от x. Тогда дифференциал условной вероятности есть

$$g(z)dz = p(z|x)\,dz = p(y|x)\,dy = f(yx^{-\mu})d(yx^{-\lambda}),$$

что возможно лишь при выполнении равенства $z = h(yx^{-\lambda})$, где h - некоторая функция, и $\lambda = \mu$. При этом условное среднее есть

$$\langle y(x)\rangle = \int y\cdot p(y|x)\,dy \sim x^{\lambda}, \qquad (\text{П.1.3})$$

что проясняет смысл показателей в формуле (П.1.2) и позволяет переписать ее в более наглядной форме

$$p(y|x) \sim f(y/\langle y(x)\rangle)/\langle y(x)\rangle.$$

Подставив условное распределение (П.1.2) в формулу (П.1.1)

$$y^{-(1+\alpha_y)} \sim \int x^{-\lambda}(yx^{-\lambda})\cdot x^{-(1+\alpha_x)}dx \sim y^{-(\lambda+\alpha_x)/\lambda},$$

окончательно получаем формулу

$$\lambda = \alpha_x/\alpha_y. \qquad (\text{П.1.4})$$

Соотношение (П.1.4), связывающее показатели распределений и условного среднего, в известной степени узаконивает использование аллометрических соотношений или сглаженных зависимостей для вероятностно связанных величин.

Приложение 2

Приближенное вычисление показателя для модели В

При $p'<<1$ можно пренебречь разницей между p' и β. Тогда система (28)-(30) сводится к уравнению

$$\Gamma(1-\alpha)/\beta^{1-\alpha} = 1/(1-\alpha) + 1/\varepsilon, \qquad (\text{П.2.1})$$

где величина $\varepsilon = p/q-\beta$ характеризует разность скоростей образования и гибели агентов.

При $\beta \to 0$ модель В должна переходить в модель А, имеющую $\alpha>1$. При этом левую часть уравнения (П.2.1) можно положить равной нулю и оно сводится к

$$\alpha \approx 1 + \varepsilon, \qquad (\text{П.2.2})$$

что, естественно, совпадает со значением показателя для модели А.

Если $\alpha\sim1$, то положив $x = 1-\alpha$, перепишем уравнение (П.2.1) в виде

$$\beta^{-x}\Gamma(1+x) = 1 + x/\varepsilon.$$

Воспользовавшись разложением для логарифма гамма-функции

$$\ln\Gamma(1+x) = -Cx + \frac{\pi^2}{12}x^2 + \ldots$$

(где $C \approx 0.577...$ - постоянная Эйлера), находим

$$\alpha = 1-x \approx 1 - [1/\varepsilon + C + \ln\beta]/[1/2\varepsilon^2 + \pi^2/12]. \qquad (\text{П.2.3})$$

В случае $\alpha<<1$ решение уравнения (П.2.1) находится разложением по степеням α до линейного члена и имеет вид

$$\alpha = (1 - \beta/\varepsilon)/[\ln(1/\beta) - C]. \qquad (\text{П.2.4})$$

Необходимо отметить, что, хотя при $p<2\beta$ решение (П.2.4), очевидно, становится неудовлетворительным, оно, тем не менее, дает адекватное представление о поведении показателя. Приближение p к p' приводит к уменьшению α до нуля.

В исследованном диапазоне значений p и p' (см. рис. 8) отклонение лучшей из аппроксимаций (П.2.2), (П.2.3) и (П2.4) от решения системы (28) - (30) не превышает 15%.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №01-01-00628) и РГНФ (проект № 99-03-19696).

Библиографический список

1. *Подлазов А.В.* Самоорганизованная критичность и анализ риска // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т.9, № 1. С. 49.

2. *Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л. и др.* Управление риском: риск, устойчивое развитие, синергетика (Сер. Кибернетика: Неограниченные возможности и возможные ограничения). М.: Наука, 2000. 431 с.

3. *Хайтун С.Д.* Наукометрия. Состояние и перспективы. М.: Наука, 1983. 279 с.

4. *Хайтун С.Д.* Проблемы количественного анализа науки. М.: Наука, 1989. 280 с.

5. *Петров В.М., Яблонский А.И.* Математика и социальные процессы: Гиперболические распределения и их применение (Сер. Математика и кибернетика). М.: Знание, 1980. 64 с.

6. *Яблонский А.И.* Математические модели в исследовании науки. М.: Наука, 1986. 352 с.

7. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения (Сер. Теория вероятностей и математическая статистика). М.: Наука, 1983. 304 с.

8. *Золотарев В.М.* Устойчивые законы и их применения (Сер. Математика и кибернетика, № 11). М.: Знание, 1984. 64 с.

9. *Bak P.* How nature works: the science of self-organized criticality. Springer-Verlag, New York, Inc. 1996.

10. *Трубников Б.А.* Закон распределения конкурентов // Природа. 1993. Т.11. С. 3.

11. *Пиотровский Р.Г., Бектаев К.Б., Пиотровская А.А.* Математическая лингвистика. М.: Высш. школа, 1977.

12. *Хаггет П.* География: синтез современных знаний. М.: Прогресс, 1979.

13. *Орлов Ю.К.* Невидимая гармония // Сб. Число и мысль. Вып. 3. М.: Знание, 1980. С. 70.

14. *Burlando B.* The fractal dimension of taxonomic systems// J. Theor. Biol. 1990. Vol. 146. P. 99.

15. *Burlando B.* The fractal geometry of evolution// J. Theor. Biol. 1993. Vol. 163. P .161.

16. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1967. 752 с.

17. *Пивоваров Ю.Л.* Основы геоурбанистики. Урбанизация и городские системы. М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999. 232 с.

18. Rank Countries by Population. http://www.census.gov/ipc/www/idbrank.html

19. Demographic Yearbook. Capital cities and cities of 100,000 and more inhabitants. http://www.un.org/Depts/unsd/demog/index.html

20. *Newman M.E.J., Sneppen K.* Avalanches, scaling and coherent noise// Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 6, p.6226-6231. http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9606066

21. *Newman* M.E.J. Self-organized criticality, evolution and the fossil extinction record// Proc. R. Soc. London B. 1996. Vol.263. P. 1605. http://xxx.lanl.gov/abs/adap-org/9607002

22. *Sneppen K., Newman M.E.J.* Coherent noise, scale invariance and intermittency in large systems // Physica D. 1997. Vol. 110, № 3-4. P. 209. http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9611229

23. *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В.* Парадигма самоорганизованной критичности. Иерархия моделей и пределы предсказуемости// Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т.5, № 5. С. 89.

24. *Sornette D., Johansen A., Dornic I.* Mapping self-organized criticality onto criticality. J. Phys. I (France). 1995. Vol. 5. P.325.

25. *Подлазов А.В.* Модель гекатонхейров освобождения поверхности и мягкая универсальность в теории самоорганизованной критичности// Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т.7, № 6. С. 3.

Институт прикладной математики РАН

Поступила в редакцию 13.12.01

COMPETITORS' PROBABILITY DISTRIBUTION LAW, STATE SCALE INVARIANCE AND LINEAR GROWTH MODELS

A.V. Podlasov

The scale invariance is one of the distinguishers of the holistic behavior. Self-organized critical systems and systems with coherent noise giving examples of the scale invariance consist of essentially nonlinear elements. On the contrary, linear growth models with scale invariant properties are formulated in the paper.

Since the wholeness can't arise from linear schemes, it is initially included in the rules of the proposed models by means of using the information about the cumulative characteristics of the system. The presence of such «seed of the holistic properties» is quite enough for the distribution of system parts sizes to be power-law.

Besides that the questions of statistical samples processing for the construction of rank dependences, the analysis of the role of their parameters and the qualitative properties of systems described by power law probability distributions are considered in the paper.

Подлазов Андрей Викторович- родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996), к.ф.-м.н. В настоящее время работает в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Область научных интересов - нелинейная динамика, теория самоорганизованной критичности, математическая история, теоретическая демография, теория управления риском. E-mail: Tiger@Keldysh.ru