



СИНХРОНИЗАЦИЯ И РАЗВИТИЕ НЕСИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.П. Пономаренко

Приведены результаты исследования динамических режимов и бифуркаций в нелинейной модели с двумя с половиной степенями свободы, описывающей процессы в связанных системах синхронизации по частоте и задержке во времени в случае, когда одна из подсистем индивидуально демонстрирует как регулярные, так и хаотические режимы поведения, а другая - только регулярные режимы. Установлено, что в зависимости от начальной частотной расстройки и параметров инерционности цепей управления в системе возможно возбуждение разнообразных регулярных и хаотических несинхронных режимов. Определены границы областей синхронизации, исследованы сценарии преобразования несинхронных режимов при изменении параметров. Результаты представлены в виде двухпараметрического портрета движений и однопараметрических бифуркационных диаграмм.

1. В настоящее время проводятся интенсивные исследования разнообразных нелинейных динамических моделей, способных демонстрировать хаотическое поведение. Большой интерес проявляется к моделям связанных автоколебательных систем, к углубленному изучению возникающих в них явлений коллективной динамики, условий и механизмов возбуждения хаотических колебаний при различных свойствах индивидуального поведения подсистем. В широком классе связанных автоколебательных систем важное место занимают системы взаимодействующих автогенераторов, управляемых по частоте с использованием принципа фазовой синхронизации [1, 2]. Среди таких систем значительный интерес для многочисленных приложений представляют взаимосвязанные системы, состоящие из небольшого числа (двух, трех) подсистем, - так называемые низкоразмерные системы. Изучение возникающих в них процессов сложной динамики и выяснение роли параметров цепей управления и связей между подсистемами в характере этих процессов имеют как теоретический интерес, так и прикладное значение.

В данной работе представлены результаты исследования динамических режимов и бифуркаций в двухкольцевой системе синхронизации (ДСС), которая объединяет подсистемы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) и автоподстройки задержки во времени (АПЗ). Такие системы широко применяются при решении задач передачи и обработки информации в радиотехнических системах со сложными сигналами в качестве схемной реализации оптимальных

алгоритмов следящей оценки фазового угла $\Theta(t)$ и задержки $T(t)$ сигналов с псевдослучайной фазовой манипуляцией [3,4]. Основные элементы системы - управляемые генераторы, при помощи которых синтезируется опорный сигнал с параметрами $\Theta^*(t)$ и $T^*(t)$ (оценками изменяющихся параметров входного сигнала $\Theta(t)$ и $T(t)$), нелинейные дискриминаторы рассогласований $\varphi = \Theta(t) - \Theta^*(t)$ и $\eta = T(t) - T^*(t)$ и цепи управления с фильтрами низких частот (ФНЧ), типы которых определяются используемыми моделями динамики оцениваемых параметров $\Theta(t)$ и $T(t)$. Благодаря нелинейности и инерционности цепей управления и связям между подсистемами в рассматриваемых ДСС наряду с возможностью слежения за параметрами входного сигнала создаются условия для возбуждения сложных автомодуляционных колебаний, проявления эффектов динамического хаоса и управления свойствами и областями существования генерируемых колебаний. Богатый набор колебательных режимов и возможность эффективного воздействия на их свойства и области существования делает взаимодействующие ДСС интересными объектами для исследования динамических закономерностей поведения, свойственных связанным автоколебательным системам.

Мы рассматриваем динамику одной из базовых структур ДСС, в которой взаимодействие подсистем реализуется через связь с выхода подсистемы АПЗ на вход подсистемы ФАПЧ, необходимую для демодуляции входного сигнала, и через связь по цепям управления, посредством которой сигнал о фазовом рассогласовании, образующийся в петле фазовой автоподстройки, передается в цепь управления задержкой [3, 5-7]. Традиционное назначение систем с такой структурой состоит в обеспечении и поддержании стационарного состояния, в котором величины φ и η имеют минимальные значения. Это состояние принято называть режимом синхронизации опорного сигнала, формируемого с помощью подсистем ФАПЧ и АПЗ по входному сигналу. Режиму синхронизации отвечает устойчивое состояние равновесия в фазовом пространстве соответствующей динамической модели. Отыскание условий реализации синхронного режима тесно связано с исследованием асинхронных режимов с непостоянными величинами рассогласований φ и η , которым соответствуют автоколебательные движения динамической модели. Бифуркации, в результате которых появляются асинхронные режимы, определяют в пространстве параметров модели границы областей захвата в синхронный режим. Исследование асинхронных режимов актуально также в целях расширения функциональных возможностей ДСС, в частности, для использования системы в качестве синтезатора шумоподобных колебаний с управляемыми характеристиками.

В зависимости от типа ФНЧ в цепях управления отдельные подсистемы ФАПЧ и АПЗ могут демонстрировать регулярную или хаотическую динамику. В работах [6, 7] исследовалась динамика ДСС, описываемой уравнениями (1), в случае, когда ее подсистемы характеризуются регулярным поведением. Оказалось, что взаимодействие подсистем ФАПЧ и АПЗ приводит к появлению новых колебательных режимов и к существенно более сложной картине бифуркационных переходов, не свойственных одиночным подсистемам. В данной работе, продолжающей исследования [6, 7], рассматриваются особенности динамического поведения ДСС в случае, когда подсистема ФАПЧ автономно демонстрирует только регулярное поведение, а в автономной подсистеме АПЗ наряду с регулярными возможны хаотические асинхронные режимы. Такой случай реализуется при использовании в цепях управления ФАПЧ и АПЗ фильтров, соответственно, первого и третьего порядка.

2. Уравнения динамики рассматриваемой ДСС, записанные в операторной форме ($p = d/dt$) для рассогласований φ и η , имеют вид [3, 7]

$$p \varphi / k = \gamma - F_1(p) R(x) \sin \varphi, \quad (1)$$

$$x = \sigma - b F_2(p) (D(x) + \alpha b^{-1} R(x) \sin \varphi),$$

где $x = \eta / \Delta$ (Δ - длительность одного элемента манипулирующего псевдослучайного сигнала); k и b - коэффициенты усиления по цепям управления; α - степень связи через управляющие сигналы; $\gamma = p \Theta / k$ и $\sigma = (T - T_0) / \Delta$ - начальная частотная и временная расстройки, T_0 - начальное значение задержки сигнала, генерируемого в подсистеме АПЗ; $F_1(p)$ и $F_2(p)$ - коэффициенты передачи ФНЧ в цепях управления ФАПЧ и АПЗ; $R(x)$ и $D(x)$ - нелинейности, представляемые зависимостями

$$R(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad D(x) = \begin{cases} -2-x, & -2 \leq x \leq -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

В уравнениях (1) $R(x)$ - корреляционная функция манипулирующего сигнала, а функции $\sin \varphi$ и $D(x) = R(x-1) - R(x+1)$ представляют характеристики дискриминаторов рассогласований фаз и задержек.

В соответствии с постановкой задачи рассмотрим коэффициенты передачи ФНЧ

$$F_1(p) = (1 + m T_1 p) / (1 + T_1 p),$$

$$F_2(p) = 1 / (1 + (T_2 + T_3 + T_4)p + (T_2 T_3 + T_2 T_4 + T_3 T_4)p^2 + T_2 T_3 T_4 p^3),$$

где T_1, T_2, T_3 и T_4 - постоянные времена, $0 \leq m < 1$. Соответствующие выбранным операторам $F_1(p)$ и $F_2(p)$ уравнения, описывающие динамику процессов в исследуемой ДСС, на основании (1) после перехода к безразмерному времени $\tau = k t$ записываются в виде

$$\begin{aligned} d\varphi/d\tau &= u - m R(x) \sin \varphi, \\ \varepsilon_1 du/d\tau &= \gamma - u - (1 - m) R(x) \sin \varphi, \\ dx/d\tau &= y, \\ dy/d\tau &= z, \\ \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 dz/d\tau &= \sigma - x - b D(x) - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) y - (\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_4 + \varepsilon_3 \varepsilon_4) z - \\ &\quad - \alpha R(x) \sin \varphi \equiv V(\varphi, x, y, z), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon_i = k T_i$ ($i=1, 2, 3, 4$) - параметры инерционности. Система (2) имеет цилиндрическое фазовое пространство $U = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), u, x, y, z\}$.

Поведение отдельной подсистемы ФАПЧ определяется двумя первыми уравнениями модели (2), в которых надо положить $R(x)=1$. В цилиндрическом «парциальном фазовом пространстве» $(\varphi(\text{mod } 2\pi), u)$ существует два типа аттракторов: состояние равновесия и вращательный (2π -периодический по φ) предельный цикл [8]. Уравнения динамики отдельной системы АПЗ с ФНЧ третьего порядка получаем из трех последних уравнений системы (2), полагая в них $\alpha=0$. Отметим, что получаемые уравнения совпадают с уравнениями динамики автогенератора с частотной автоподстройкой [9]. На основании результатов [9] в «парциальном фазовом пространстве» (x, y, z) модели подсистемы АПЗ наряду с состояниями равновесия следует ожидать существования периодических и хаотических аттракторов.

Отметим, что при $\varepsilon_4 \ll \min(1, \varepsilon_1, (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^{-1})$ система (2) имеет малый параметр

при производной dz/dt . Так как $V'_z = -(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4 + \varepsilon_3\varepsilon_4) < 0$, то система (2) имеет в фазовом пространстве U асимптотически устойчивую интегральную поверхность $W: \{z = (\sigma - x - bD(x) - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)y - \alpha R(x) \sin \varphi)(\varepsilon_2 \varepsilon_3)^{-1}\}$, движения на которой определяются системой уравнений, рассмотренной в [6, 7].

Движения модели (2), развивающиеся в фазовом пространстве U , зависят от девяти параметров. Для того чтобы получить представление о возможных динамических состояниях и бифуркациях модели (2), мы выбрали в качестве управляющих параметров начальную расстройку γ и параметр инерционности ε_4 , который характеризует степень влияния ФНЧ третьего порядка подсистемы АПЗ на режимы поведения ДСС. В силу существенной нелинейности модели (2) ее нелокальное исследование сопряжено с большими трудностями, в связи с чем применено компьютерное моделирование, которое базируется на качественно-численных методах анализа нелинейных динамических систем [10, 11] и использовании программного комплекса [12], обеспечивающего решение задач обнаружения периодических и хаотических движений и исследование их бифуркаций в динамических моделях с цилиндрическим фазовым пространством. Исследование периодических движений проведено при помощи анализа неподвижных точек отображения Пуанкаре T_φ плоскости $\varphi = \varphi^0$ в плоскость $\varphi = \varphi^0 + 2\pi$.

3. Исследование динамики ДСС естественно начать с анализа устойчивости режима синхронизации. Система (2), как и в случае, рассмотренном в [6, 7], при значениях параметров $(\sigma, \gamma, b, \alpha) \in C_0$, где

$$C_0 = \{\max(\gamma_3, \gamma_4) < \gamma < \min(\gamma_1, \gamma_2)\}, \quad (4)$$

$$\gamma_{1,2} = (1+b \mp \sigma)/(1+b \mp \alpha), \quad \gamma_{3,4} = -(1+b \pm \sigma)(1+b \mp \alpha),$$

имеет два состояния равновесия $A_1(\varphi_1, m\gamma, x_1, 0, 0)$ и $A_2(\pi - \varphi_1, m\gamma, x_1, 0, 0)$, расположенные в области $-1 < x < 1$ фазового пространства U . Координаты φ_1 и x_1 определяются равенствами

$$\varphi_1 = \arcsin(\gamma/(1-x_1 \operatorname{sign}(\sigma - \alpha\gamma))), \quad x_1 = (\sigma - \alpha\gamma)/(1+b). \quad (5)$$

Состояние равновесия A_1 может быть как устойчивым, так и неустойчивым, состояние равновесия A_2 - неустойчивое седлового типа. Устойчивость состояния равновесия A_1 определяем из анализа коэффициентов характеристического уравнения

$$\lambda^5 + q_1 \lambda^4 + q_2 \lambda^3 + q_3 \lambda^2 + q_4 \lambda + q_0 = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= -(a_1 + b_1 + c_1), \\ q_2 &= b_1(a_1 + c_1) + a_1 c_1 - b_2 - c_2, \\ q_3 &= -(a_1 b_1 c_1 - (a_1 + b_1)c_2 + c_3 - b_2 c_1), \\ q_4 &= -(c_2(a_1 b_1 - b_2) + a_2 c_4 - c_3(a_1 + b_1)), \\ q_0 &= c_4(a_2 b_1 - b_3) + c_3(b_2 - a_1 b_1), \\ a_1 &= -m((1 - (\sigma - \alpha\gamma) \operatorname{sign}(\sigma - \alpha\gamma)/(1+b))^2 - \gamma^2)^{1/2}, \\ a_2 &= m \gamma \operatorname{sign}(\sigma - \alpha\gamma) / (1 - (\sigma - \alpha\gamma) \operatorname{sign}(\sigma - \alpha\gamma)/(1+b)), \\ b_1 &= -1/\varepsilon_1, \\ b_2 &= (1-m)a_1(m\varepsilon_1)^{-1}, \\ c_1 &= -(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_4 + \varepsilon_3\varepsilon_4)(\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)^{-1}, \\ c_2 &= -(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)(\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)^{-1}, \\ c_3 &= (\alpha a_2 - m(1+b))(m\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)^{-1}, \\ c_4 &= \alpha a_1(m\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)^{-1}. \end{aligned}$$

Условия устойчивости записываются в виде

$$q_1, q_2, q_3, q_4, q_0 > 0, \quad q_1 q_2 - q_3 > 0, \quad (q_1 q_2 - q_3)(q_3 q_4 - q_2 q_0) - (q_1 q_4 - q_0)^2 > 0. \quad (7)$$

При выполнении условий (7) существует синхронный режим ДСС, соответствующий состоянию равновесия A_1 . Величины φ_1 и x_1 , определяемые (5), характеризуют точность оценки параметров входного сигнала. Область значений параметров C_s , в которой выполняются условия (7), соответствует области удержания режима синхронизации.

4. Рассмотрим динамические процессы, развивающиеся в модели (2) с изменением параметров γ и ϵ_4 при фиксированных значениях остальных параметров. Как показали результаты численного исследования, система (2) может иметь большое число разнообразных предельных циклов в фазовом пространстве, и полная картина расположения бифуркационных кривых на плоскости (ϵ_4, γ) представляется достаточно сложной. На рис. 1 приведены некоторые из таких кривых, соответствующие бифуркациям состояний равновесия (кривые $l_1 - l_5$) и предельных циклов (кривые $l_6 - l_8, r_0 - r_9$) системы (2), построенные при значениях $\sigma=0.5, b=10, \epsilon_1=1, \epsilon_2=2, \epsilon_3=3, m=0.1, \alpha=5$.

Линия l_1 - это граница γ_2 области C_0 существования состояний равновесия A_1 и A_2 , определяемая (4). Линии l_2 и l_3 - границы области C_s устойчивости состояния равновесия A_1 , определяемой условиями (7); область C_s расположена слева от кривой l_2 и справа от кривой l_3 . При переходе с увеличением (уменьшением) ϵ_4 через кривую l_2 (l_3) в модели (2) наблюдается бифуркация Андронова - Хопфа,

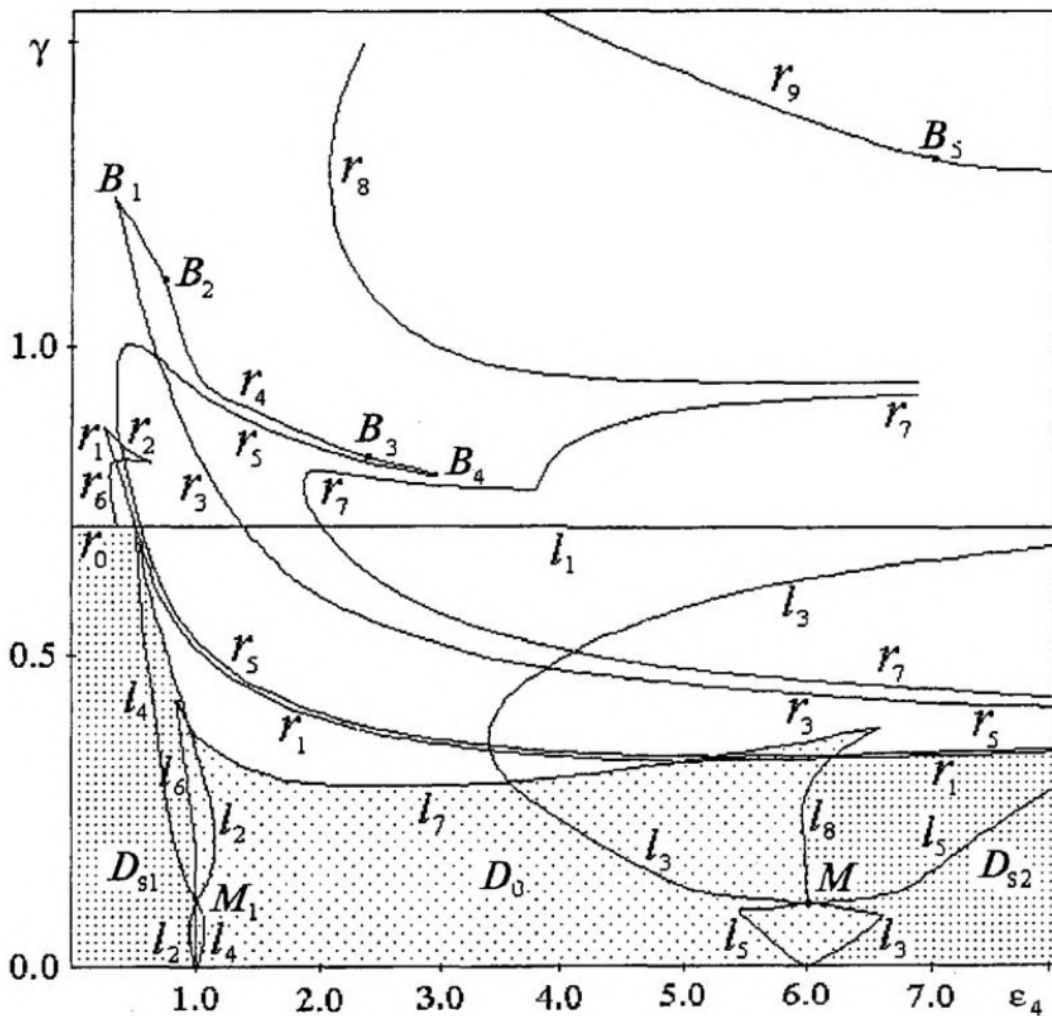


Рис. 1. Параметрический портрет (ϵ_4, γ) модели (2)

когда в решении характеристического уравнения (6) появляется пара комплексно-сопряженных корней с положительной реальной частью. Эта бифуркация является суперкритической на линии l_2 и на части l'_3 линии l_3 ниже точки M и субкритической на части l''_3 линии l_3 выше точки M . При пересечении линии l_2 (линии l'_3) с увеличением (уменьшением) ϵ_4 в фазовом пространстве системы (2) мягко рождается устойчивый предельный цикл L_0 , соответствующий квазисинхронному режиму ДСС.

В этом режиме наблюдаются автомодуляционные колебания относительно ставшего неустойчивым состояния равновесия A_1 . При переходе с уменьшением ϵ_4 через линию l''_3 состояние равновесия A_1 становится неустойчивым в результате стягивания к нему седлового предельного цикла S_0 .

Линии l_4 и l_5 соответствуют бифуркации Андронова - Хопфа для состояния равновесия A_2 . При переходе с увеличением (уменьшением) ϵ_4 через линию l_4 (l_5) в фазовом пространстве системы (2) рождается седловой предельный цикл колебательного типа S_0 . Линии l_6 , l_7 и l_8 соответствуют седло-узловым бифуркациям предельных циклов колебательного типа. Установлено существование еще двух кривых l_9 и l_{10} , отвечающих седло-узловой бифуркации колебательных предельных циклов. Кривая l_9 проходит вблизи части кривой l_2 выше точки M_1 справа от кривой l_2 , кривая l_{10} - между частями кривых l_4 и l_6 ниже точки M_1 (на рис.1 кривые l_9 и l_{10} не построены).

В результате седло-узловых бифуркаций происходит рождение в фазовом пространстве пары устойчивого и седлового предельных циклов при пересечении линий l_6 , l_9 и l_{10} (кривой l_8) с увеличением (уменьшением) параметра ϵ_4 и при пересечении линии l_7 с уменьшением параметра γ или исчезновение этих циклов при обратном движении по параметрам ϵ_4 и γ . На рис. 2, а представлена (φ, x) -проекция фазового портрета колебательного предельного цикла L_0 .

Представленное на рис. 1 расположение бифуркационных кривых l_1 - l_8 позволяет выделить в области $C_0 = \{0 \leq \gamma < \gamma_2\}$ области существования C_s синхронного и D_0 квазисинхронных режимов ДСС. Область $C_s = C_{s1} \cup C_{s2}$, где область C_{s1} ограничена частью кривой l_1 и кривой l_2 , а область C_{s2} охватывает значения ϵ_4 и γ справа от линии l_3 . Область D_0 ограничена частью линии l_2 ниже точки M_1 , частью линии l_6 выше точки M_1 , линиями l_7 и l_8 и частью линии l_3 ниже точки M . Отметим, что квазисинхронный режим ДСС существует также вне D_0 в узкой области между линиями l_2 и l_9 . Обратим внимание и на то, что в D_0 для значений параметров из невидных в масштабе рис.1 узких областей между линиями l_2 и l_9 и между линиями l_6 и l_{10} в фазовом пространстве существуют два устойчивых колебательных предельных цикла; какой из двух квазисинхронных режимов, определяемых этими циклами, реализуется в системе для указанных узких областей, зависит от начального состояния системы.

Выход из области D_0 через границы l_2 и l_3 (через границы l_6 , l_8 и часть границы l_7 в области C_{s1}) приводит к мягкому (жесткому) прекращению автомодуляционных колебаний и установлению в системе синхронного режима. При переходе с увеличением γ через часть границы l_7 между областями C_{s1} и C_{s2} одновременно с исчезновением квазисинхронного режима появляется перемежаемость - чередование длинной стадии колебательных движений с относительно короткими нерегулярными всплесками вращательных движений. Через перемежаемость в фазовом пространстве возникает хаотический аттрактор P_1 колебательно-вращательного типа, соответствующие ему (φ, x) - и (u, x) -проекции фазового портрета, зависимости $\varphi(\tau)$ и $u(\tau)$ приведены на рис. 2, б-д. Поведение фазовой траектории на аттракторе P_1 представляет собой чередование движений в окрестности исчезнувшего седло-узлового колебательного предельного цикла и вращательных движений с нарастанием разности фаз φ . С удалением от границы l_7

частота и длительность вращательных движений возрастают (рис. 2, *e, ж*). Переход из области D_0 через часть границы l_7 , расположенной в области C_{s2} , сопровождается либо возникновением колебательно-вращательного хаотического аттрактора, либо установлением синхронного режима.

Линии $r_0 - r_9$, построенные на рис. 1, соответствуют бифуркациям вращательных однооборотных (2π -периодических по φ) предельных циклов системы (2). Линии r_1, r_2, r_3 и части линии r_4 между точками B_1 и B_2 и между точками B_3 и B_4 отвечают седло-узловым бифуркациям (при этом появление устойчивого и седлового циклов происходит при пересечении линий r_1 и r_3 с увеличением γ и линий r_2 и r_4 с уменьшением γ). На линиях r_5, r_6, r_7 и на части линии r_9 справа от точки B_5 происходят бифуркации удвоения периода. Линия r_8 , часть линии r_4 между точками B_2 и B_3 и часть линии r_9 слева от точки B_5 являются линиями бифуркации рождения двумерного тора (тор рождается при пересечении линий r_4 и r_8 с увеличением ε_4 , а линии r_9 - с уменьшением γ , когда пара комплексно-сопряженных мультипликаторов предельного цикла пересекает единичную окружность). Линия

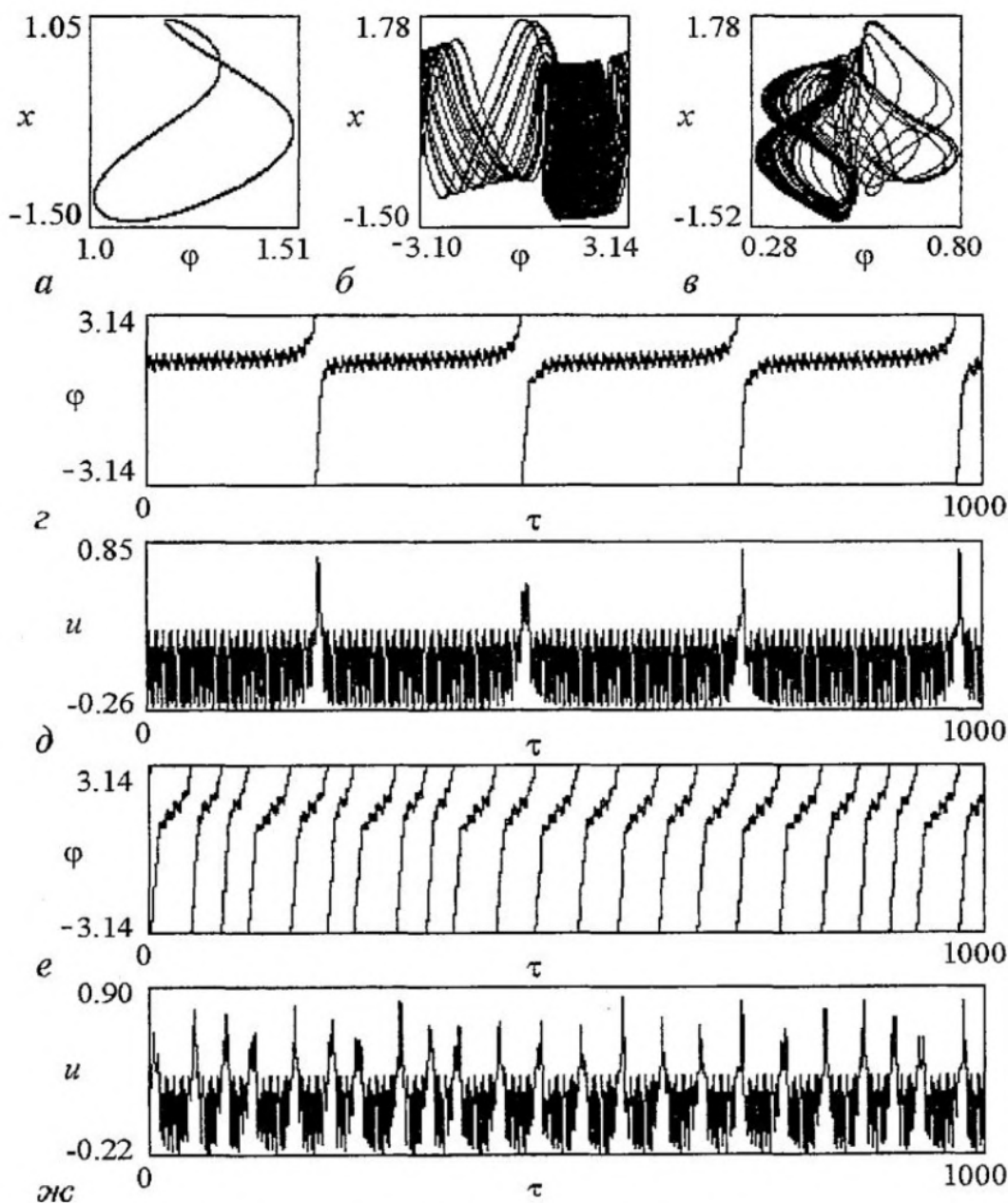


Рис. 2. Проекция фазовых портретов и зависимости $\varphi(\tau)$ и $u(\tau)$ при $\varepsilon_4=2.5$; $\gamma=0.28$ (а), 0.289 (б-д), 0.31 (е, ж)

r_6 смыкается с линией r_0 , соответствующей бифуркации петли сепаратрисы седло-фокуса A_2 с отрицательной седловой величиной $\sigma_c = \lambda_5 + \text{Re } \lambda_i$ ($i=1,2,3,4$, $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ - корни характеристического уравнения (6) для точки A_2 , $\lambda_{1,2} < 0$, $\text{Re } \lambda_{3,4} < 0$, $\text{Im } \lambda_{3,4} \neq 0$, $\lambda_5 > 0$); линия r_0 проходит вблизи (ниже) линии l_1 . При переходе с увеличением γ через линию r_0 из петли сепаратрисы появляется устойчивый вращательный (2π -периодический по φ) предельный цикл.

Обратим внимание на то, что линия r_0 проходит в области C_{s1} , а части линий r_1 , r_3 , r_5 и r_7 расположены в области C_{s2} . Это означает, что вращательные предельные циклы системы (2), рождающиеся при пересечении линий r_1 , r_3 и r_0 , существуют в фазовом пространстве одновременно с устойчивым состоянием равновесия A_1 . Из характера расположения бифуркационных линий на рис.1 следует, что в области $D_{s1} = C_{s1} \setminus C_p$, где $C_p = \{C_{s1} \cap D_0\} \cup C_r$, а область C_r заключена между частью линии l_1 и линией r_0 , и в области D_{s2} , охватывающей значения ϵ_4 и γ ниже линии r_1 справа от линии l_8 и части линии l_3 ниже точки M , аттрактором системы (2) в фазовом пространстве служит состояние равновесия A_1 . При значениях ϵ_4 и γ в областях D_{s1} и D_{s2} синхронный режим реализуется в ДСС при любых начальных условиях. Переход через границы областей D_{s1} и D_{s2} приводит к возможности установления в системе квазисинхронного или асинхронного режимов.

5. Рассмотрим динамические режимы и бифуркации, реализуемые в системе после прекращения синхронного режима при значениях γ и ϵ_4 вне областей C_{s1} и C_{s2} . На рис. 3 приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма (γ, y), соответствующая $\epsilon_4=0.4$, а на рис. 4 даны (φ, y) -проекции фазовых портретов аттракторов ($a, в - e, з$) и (y, x) -проекции точечного отображения T_φ , порождаемого траекториями модели (2) ($б, ж$). Диаграмма (γ, y) отражает динамику асинхронных режимов, возникающих после перехода границы области C_{s1} .

Из (γ, y) -диаграммы видно, что после прекращения синхронного режима система переходит к хаотическому асинхронному режиму на аттракторе P_2 колебательно-вращательного типа (рис. 4, $a, б$). При увеличении γ режим аттрактора P_2 преобразуется в режим двухоборотного (4π -периодического по φ) предельного цикла L_1^2 ($в$), который затем жестко сменяется режимом колебаний на однооборотном (2π -периодическом по φ) предельном цикле L_1^1 ($з$). В свою

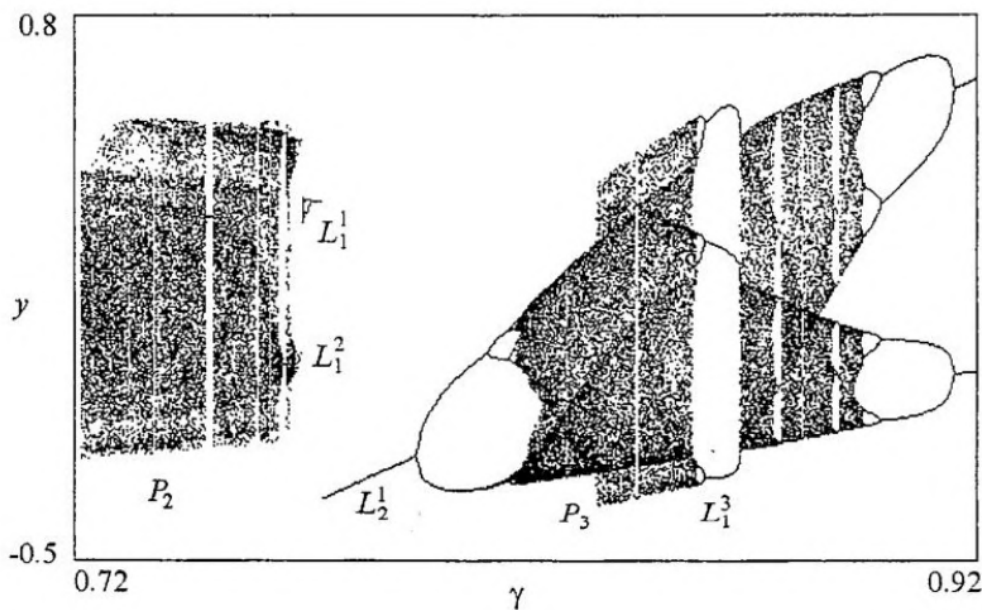


Рис. 3. Диаграмма развития асинхронных режимов при изменении γ , соответствующая $\epsilon_4=0.4$

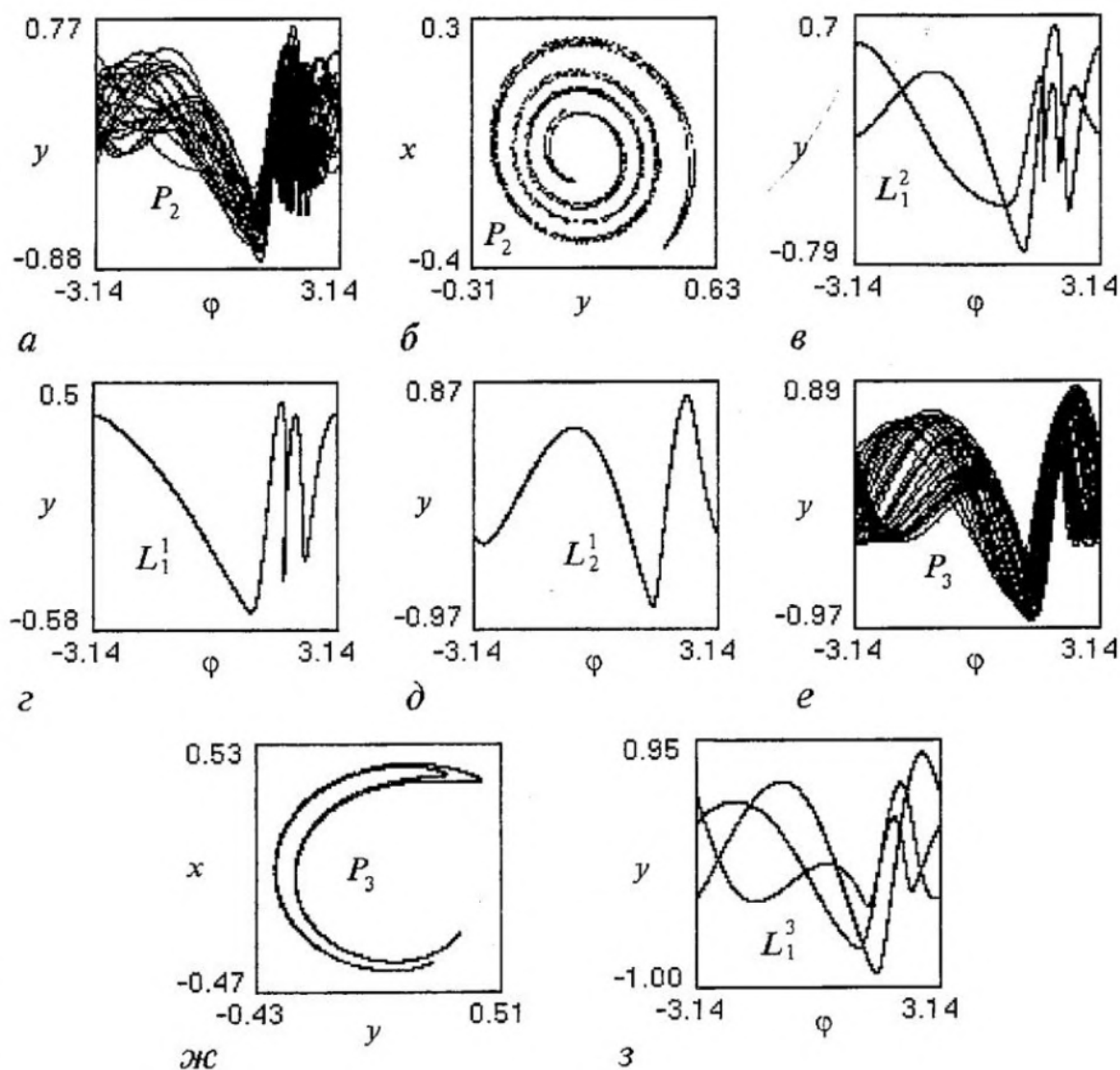


Рис. 4. Проекция фазовых портретов и отображения T_ϕ , соответствующие аттракторам модели (2), при $\epsilon_4=0.4$; $\gamma=0.74$ (а, б), 0.769 (в), 0.772 (г), 0.79 (д), 0.84 (е, ж), 0.86 (з)

очередь, режим цикла L_1^1 при $\gamma > 0.7736$ жестко преобразуется в режим однооборотного вращательного предельного цикла L_2^1 (д). Цикл L_2^1 через бифуркации удвоения периода преобразуется в хаотический вращательный аттрактор P_3 (е, ж). В интервале $0.8171 < \gamma < 0.8943$ наблюдается чередование хаотических и периодических асинхронных режимов на сложных вращательных предельных циклах (на рис. 4, з дан фазовый портрет одного из таких циклов - трехоборотного, бл-периодического по ϕ , предельного цикла L_1^3). От колебаний на аттракторе P_3 система возвращается при $\gamma > 1.037$ к режиму предельного цикла L_2^1 через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения.

Развитие асинхронных режимов, реализуемых в системе после перехода границы области S_{52} , показывает бифуркационная диаграмма (γ, x) , соответствующая $\epsilon_4=5.75$ (рис. 5, а). Здесь после прекращения синхронного режима система также переходит к режиму колебательно-вращательного хаотического аттрактора P_4 . Для движений на этом аттракторе характерно нерегулярное чередование колебаний относительно ставшего неустойчивым состояния равновесия A_1 и колебаний с вращением разности фаз ϕ . На рис. 5, б даны фазовый портрет и зависимость $x(\tau)$, соответствующие аттрактору P_4 вблизи границы области S_{52} . При увеличении γ длительность стадии колебательных движений на аттракторе P_4 уменьшается. Как видно из рис. 5, а, для поведения системы с возрастанием γ

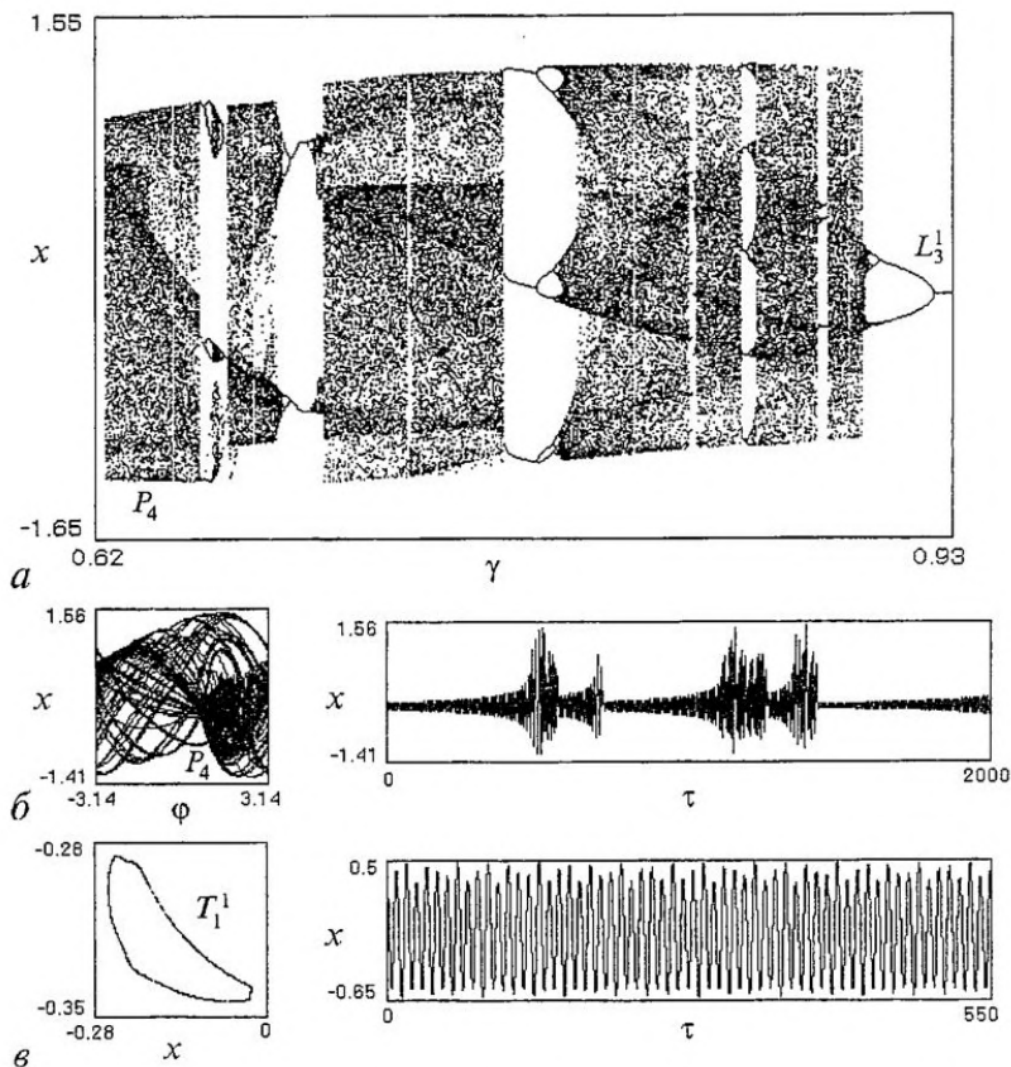


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма (γ, x) при $\epsilon_4=5.75$ (а), фазовые портреты и зависимости $x(\tau)$, соответствующие хаотическому аттрактору P_4 при $\gamma=0.63$ (б) и тору T_1^1 при $\gamma=0.95$ (в)

свойственно чередование регулярных и хаотических асинхронных режимов. При этом для большей части интервала $0.62 < \gamma < 0.93$ наблюдаются хаотические режимы, которые формируются на базе двухоборотного, трехоборотных и пятиоборотного (10л-периодического по ϕ) предельных циклов системы (2).

При достижении параметром γ величины 0.9237 происходит мягкий переход к асинхронному режиму на однооборотном вращательном предельном цикле L_3^1 . При $\gamma > 0.9437$ (то есть при пересечении кривой r_8) цикл L_3^1 теряет устойчивость и в фазовом пространстве возникает двумерный тор T_1^1 .

На рис. 5, в даны (x, y) -проекция точечного отображения T_ϕ и зависимость $x(\tau)$, соответствующие тору T_1^1 . При увеличении γ тор T_1^1 разрушается, через хаотизацию колебаний система переходит в асинхронный режим на двухоборотном предельном цикле L_2^2 , который существует в относительно широком интервале $0.9632 < \gamma < 1.3474$.

При $\gamma > 1.3474$ возбуждается хаотический асинхронный режим, затем наблюдается мягкий переход к периодическому асинхронному режиму на пятиоборотном предельном цикле. С увеличением γ этот режим жестко сменяется режимом другого пятиоборотного цикла L_5^5 , который при $\gamma > 1.4908$ жестко преобразуется в режим однооборотного вращательного предельного цикла L_4^1 . Этот режим поддерживается в системе при дальнейшем увеличении расстройки γ .

При значениях $\gamma > 1.487$ кроме указанных выше обнаружены следующие

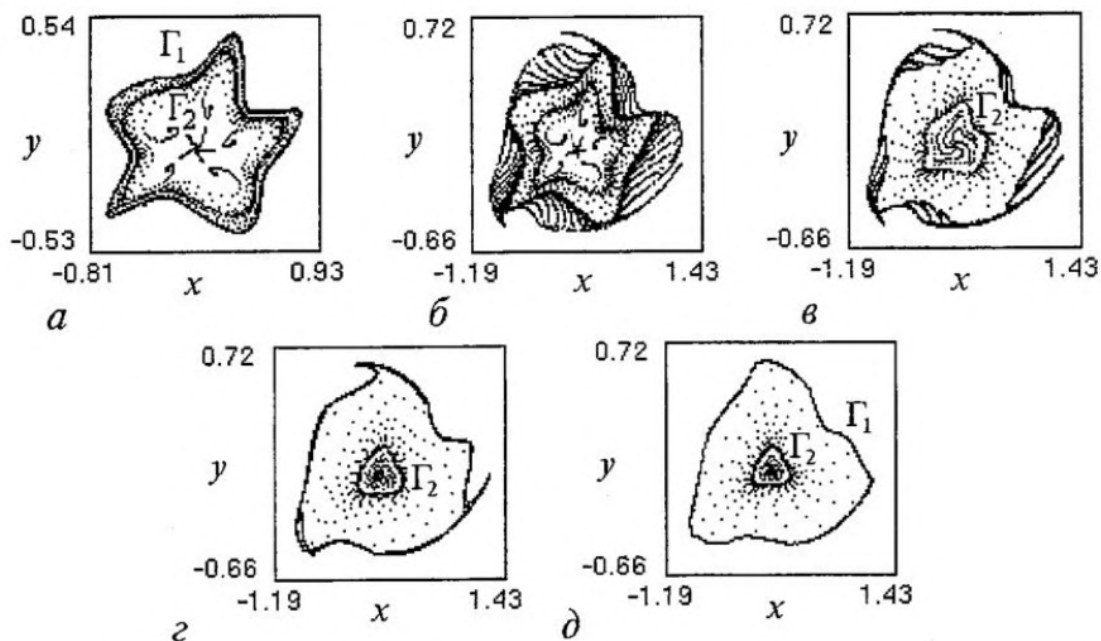


Рис. 6. Проекция отображения T_φ при $\varepsilon_4=5.75$; $\gamma = 1.488$ (а), 1.4895 (б), 1.5 (в), 1.54 (г), 1.576 (д)

динамические режимы системы. С переходом при увеличении γ через значение 1.487 в фазовом пространстве при наличии устойчивых предельных циклов L_4^1 и L_5^1 рождаются два тора: устойчивый T_2^1 и неустойчивый T_3^1 . Рис.6, а, на котором дана (x,y) -проекция отображения T_φ , иллюстрирует одновременное существование этих торов (замкнутые кривые Γ_1 и Γ_2) и предельных циклов L_4^1 (центральная неподвижная точка) и L_5^1 (цикл из пяти неподвижных точек). При $\gamma > 1.489$ на базе тора T_2^1 возникает режим тор-хаоса (рис. 6, б), который при $\gamma > 1.576$ преобразуется (рис.6, б-г) снова в режим тора T_2^1 (рис. 6, д). С превышением параметром γ значения 1.585 наблюдается разрушение квазипериодических колебаний и жесткий переход к асинхронному режиму на шестиоборотном (12π -периодическом по φ) предельном цикле. Далее через бифуркацию, обратную бифуркации удвоения периода, этот режим преобразуется в режим трехоборотного предельного цикла, который при $\gamma > 1.802$ жестко сменяется асинхронным режимом на цикле L_4^1 .

Когда γ переходит через значение 1.954, в фазовом пространстве вновь возникают устойчивый T_2^1 и неустойчивый T_3^1 торы при наличии устойчивого предельного цикла L_4^1 (рис. 7, а). Циклу L_4^1 отвечает неподвижная точка K отображения T_φ . При $\gamma > 1.976$ тор T_2^1 разрушается, фазовые траектории устремляются к семиоборотному (14π -периодическому по φ) предельному циклу L^7 (рис. 7, б). На рис. 7, б этому циклу отвечают семикратные неподвижные точки O_1, O_2, \dots, O_7 отображения T_φ . С увеличением γ цикл L^7 теряет устойчивость и из него рождается устойчивый тор T^7 (цикл замкнутых кривых C_1, C_2, \dots, C_7 на рис. 7, в), после разрушения которого вновь возникает устойчивый тор T_2^1 (рис. 7, г); неустойчивая инвариантная кривая Γ_2 исчезает в результате перестройки инвариантных сепаратрисных кривых семикратных седловых неподвижных точек. На рис. 7, г внутри замкнутой инвариантной кривой Γ_1 , соответствующей тору T_2^1 , существует цикл из семи ставших неустойчивыми неподвижных точек O_1, O_2, \dots, O_7 , цикл из семи седловых неподвижных точек и устойчивая неподвижная точка K отображения T_φ . При возрастании γ семикратные неподвижные точки O_1, O_2, \dots, O_7 вновь обретают устойчивость и, кроме этого, снова появляется неустойчивая инвариантная кривая Γ_2 , отвечающая неустойчивому тору T_3^1 , в результате перестройки сепаратрисных инвариантных кривых семикратных седловых

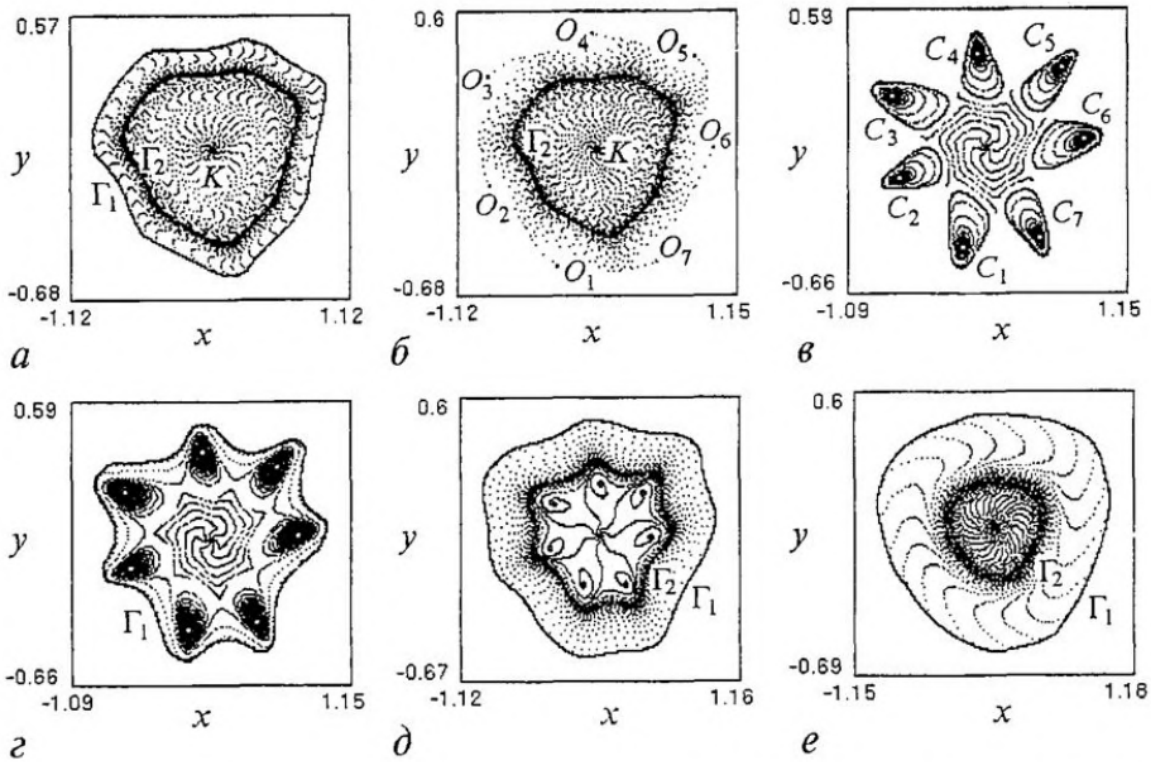


Рис. 7. Проекция отображения T_φ при $\varepsilon_4=5.75$; $\gamma = 1.9744$ (а), 1.98 (б), 2.0004 (в), 2.001 (г), 2.008 (д), 2.05 (е)

неподвижных точек (рис. 7, д). Когда γ становится больше 2.0111, семикратные неподвижные точки исчезают в результате седло-узловой бифуркации, в фазовом пространстве существуют устойчивые тор T^1_2 и предельный цикл L^1_4 (рис.7, е). Поведение системы при дальнейшем увеличении γ характеризуется чередованием режима тора T^1_2 и периодических асинхронных режимов вращательных предельных циклов, число оборотов по φ на которых последовательно увеличивается на единицу, начиная с четырех.

Если теперь рассмотрим асинхронный режим на цикле L^1_4 в качестве начального состояния системы и проследим за эволюцией колебаний при уменьшении параметра γ , то обнаружим качественно иной характер развития динамических режимов в области значений $\gamma > 0.93$, в поведении системы проявляется гистерезис. При переходе через значение 1.386 (то есть при пересечении кривой r_9 на рис. 1) цикл L^1_4 теряет устойчивость с рождением устойчивого двумерного тора T^1_4 . Соответствующая тору T^1_4 (y, x)-проекция отображения T_φ приведена на рис. 8, а. Здесь внутри замкнутой инвариантной кривой Γ_3 существует неподвижная точка K с парой мультипликаторов, расположенных вне единичного круга, отвечающая ставшему неустойчивым циклу L^1_4 . Когда γ становится меньше 1.3432, один из этих мультипликаторов проходит через значение (-1) и перемещается внутрь единичного круга. При этом реализуется (в соответствии с [13]) бифуркация рождения цикла неустойчивых двукратных неподвижных точек (K_1, K_2) отображения T_φ , соответствующих неустойчивому двухоборотному вращательному предельному циклу L^2_3 (рис. 8, б).

При переходе с уменьшением γ через значение 1.3356 пара комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла L^2_3 пересекает границу единичного круга, перемещаясь внутрь него. Это приводит к превращению неустойчивого предельного цикла L^2_3 в устойчивый, одновременно от него отделяется [13] неустойчивый двумерный тор T^2_1 . На рис. 8, в дана картина отображения T_φ , соответствующая одновременному существованию устойчивого T^1_4 (кривая Γ_3) и

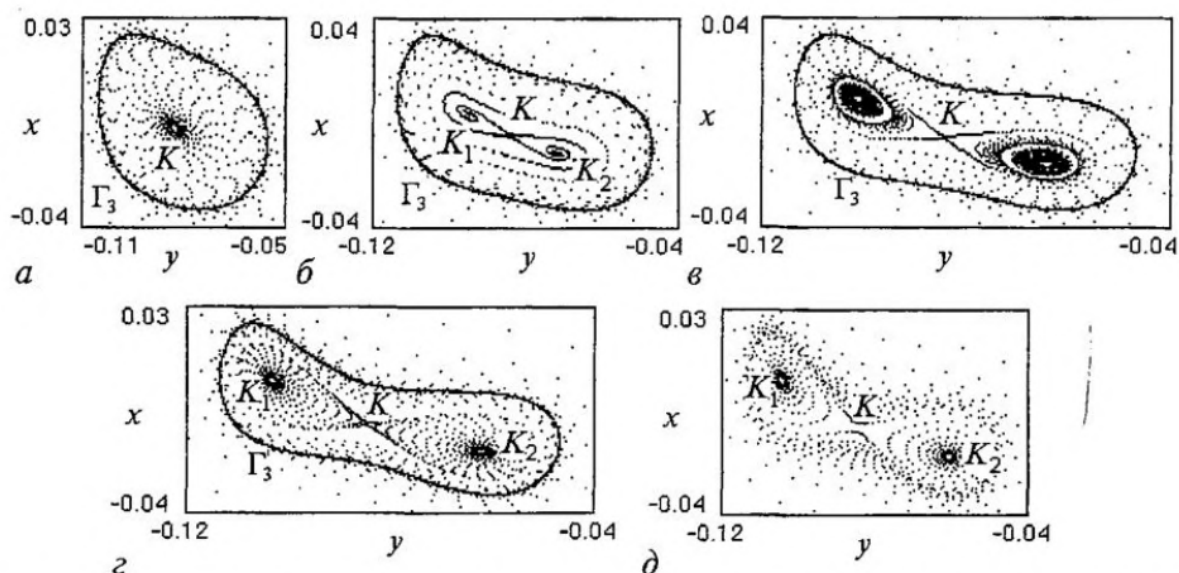


Рис. 8. Проекция отображения T_φ при $\varepsilon_4=5.75$; $\gamma=1.36$ (а), 1.34 (б), 1.335 (в), 1.3332 (г), 1.332 (д)

неустойчивого T^2_1 (замкнутые инвариантные кривые Γ_4 и Γ_5 , охватывающие соответственно неподвижные точки K_1 и K_2) торов, устойчивого двухоборотного предельного цикла L^2_3 (неподвижные точки K_1, K_2) и неустойчивого предельного цикла L^1_4 (седловая неподвижная точка K). При уменьшении γ происходит слияние замкнутых инвариантных кривых отображения T_φ , отвечающих тору T^2_1 , с петлями сепаратрисных инвариантных кривых седловой неподвижной точки K и образуется неустойчивый тор T^1_5 . Соответствующая этому тору замкнутая инвариантная кривая Γ_6 отображения T_φ расположена внутри инвариантной кривой Γ_3 и охватывает неподвижные точки K, K_1 и K_2 (рис. 8, г). С дальнейшим уменьшением γ торы T^1_4 и T^1_5 сближаются и исчезают при переходе через значение $\gamma=1.3321$. В результате этой бифуркации происходит прекращение квазипериодического асинхронного режима и жесткий переход системы к режиму двухоборотного цикла L^2_3 (рис. 8, д).

Когда γ становится меньше 1.295, при наличии в фазовом пространстве цикла L^2_3 в результате седло-узловой бифуркации появляется еще один двухоборотный цикл L^2_4 , который при $\gamma < 1.2908$ становится неустойчивым и из него рождается устойчивый тор T^2_2 . На рис. 9, а-в даны (φ, y) - и (φ, x) -проекции

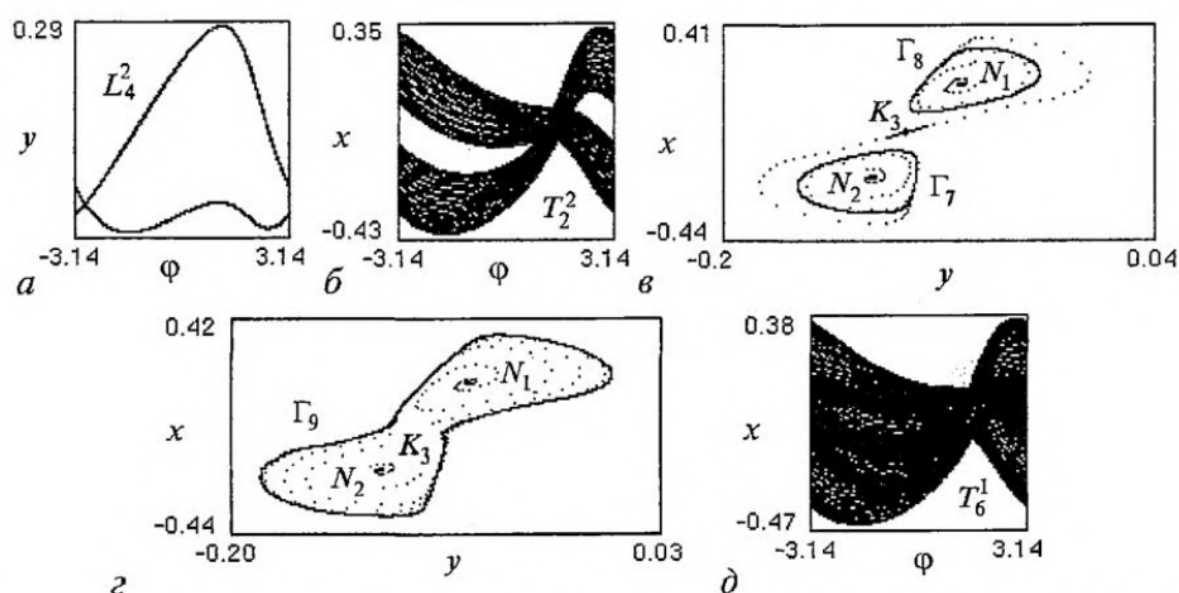


Рис. 9. Проекция фазовых портретов и отображения T_φ при $\varepsilon_4=5.75$; $\gamma=1.294$ (а), 1.2861 (б, в), 1.2844 (г, д)

фазового портрета, соответствующие устойчивому циклу L_4^2 и тору T_2^2 , и (y,x) -проекция отображения T_φ , соответствующая тору T_2^2 . На рис. 9, в, г тору T_2^2 отвечают замкнутые инвариантные кривые Γ_7 и Γ_8 , неподвижная точка K_3 соответствует седловому предельному циклу L_3^1 , а неподвижные точки N_1 и N_2 - неустойчивому двухоборотному циклу L_4^2 . При уменьшении γ тор T_2^2 преобразуется в тор T_6^1 (рис. 9, г, д) в результате слияния замкнутых инвариантных кривых Γ_7 и Γ_8 с петлями сепаратрисных инвариантных кривых седловой неподвижной точки K_3 . На рис. 9, г тору T_6^1 отвечает замкнутая инвариантная кривая Γ_9 отображения T_φ (напомним, что при этом в фазовом пространстве одновременно существуют двухоборотные предельные циклы L_3^2 -устойчивый и L_3^1 -седловой). Далее при $\gamma < 1.2841$ тор T_6^1 разрушается в результате перестройки сепаратрисных инвариантных кривых седловых неподвижных точек отображения T_φ , отвечающих циклу L_3^2 , после чего происходит переход к предельному циклу L_3^2 .

Дальнейшие преобразования, наблюдаемые в системе при уменьшении γ характеризует бифуркационная диаграмма γ, x , приведенная на рис. 10, а, которая отображает развитие режима цикла L_3^2 при изменении γ от 1.285 до 0.93. Процесс эволюции цикла L_3^2 сопровождается следующими явлениями. Вначале (при

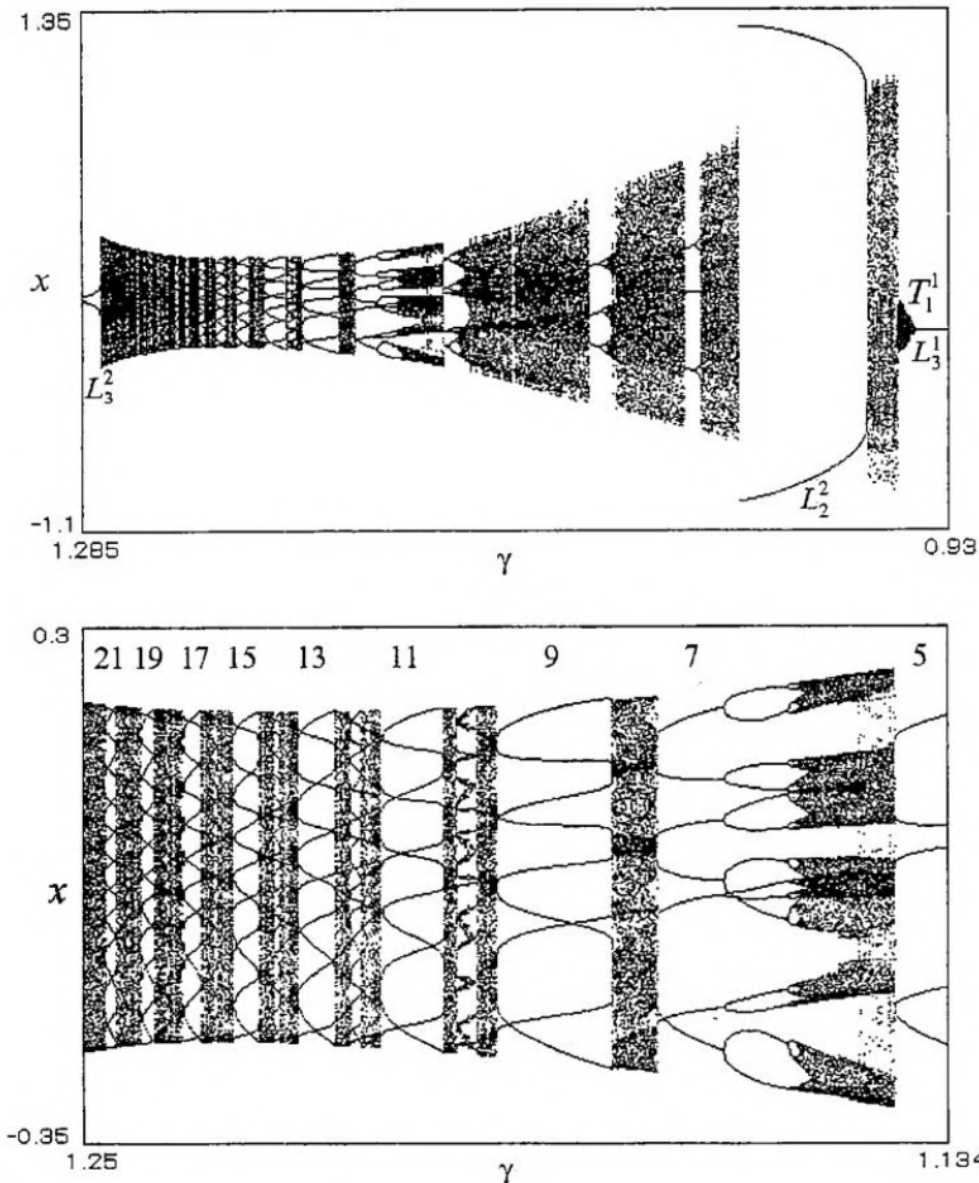


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма (γ, x) , соответствующая $\epsilon_4 = 5.75$ (а) и ее фрагмент (б)

$\gamma < 1.2771$) снова происходит переход к режиму тора T_6^1 . Далее появляется большое количество «окон» предельных циклов, число оборотов по φ на которых последовательно уменьшается на два. Последнее из этих окон соответствует однооборотному предельному циклу L_3^1 при $\gamma < 0.9428$. На рис. 10, б дан фрагмент (γ, x) -диаграммы в интервале $1.134 < \gamma < 1.25$, где отчетливо видны окна предельных циклов с числом оборотов от 21 до 5. Видно также, что внутри окон семи-, пяти- и трехоборотного циклов реализуются бифуркации удвоения периода с переходами к хаосу.

Изучение структуры отображения T_φ в окнах между циклами показывает, что после окна 15-оборотного цикла наблюдается искажение формы замкнутой инвариантной кривой, что свидетельствует о постепенном вырождении тора T_6^1 в тор-хаос. На рис. 11 даны (x, y) -проекции отображения T_φ , показывающие изменения в структуре хаотического аттрактора, происходящие в интервале между окнами пятнадцати- и однооборотного циклов. При $\gamma < 1.0161$ режим хаотических колебаний жестко сменяется асинхронным режимом на двухоборотном предельном цикле L_2^2 , затем при $\gamma < 0.963$ после исчезновения цикла L_2^2 через перемежаемость вновь возбуждаются хаотические колебания. При $\gamma < 0.9506$ наблюдается переход от хаотических колебаний к квазипериодическим колебаниям, соответствующим тору T_1^1 (см. рис. 5, в), через перемежаемость типа хаос-тор, а при $\gamma < 0.9428$ - мягкий переход от квазипериодических колебаний к асинхронному режиму предельного цикла L_3^1 .

Представленные сценарии поведения модели (2) при изменении начальной расстройки γ интересны еще и тем, что дают представление о возможных несинхронных режимах рассматриваемой ДСС, возникающих на пути к синхронному режиму при уменьшении γ .

Приведенные выше результаты о динамике модели (2) не исчерпывают всех колебательных режимов и бифуркационных переходов, которые наблюдаются в исследуемой ДСС. В частности, при численном исследовании модели (2) обнаружены широкие области параметров, соответствующие двух- и трехоборотному предельным циклам, претерпевающим при изменении параметров

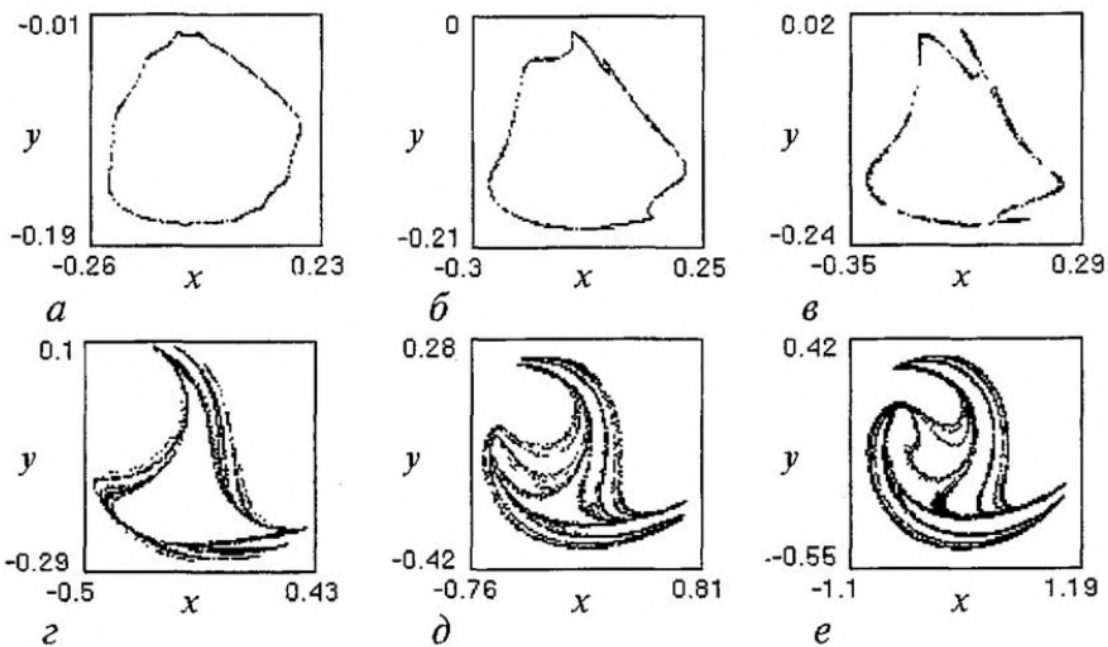


Рис. 11. Проекции отображения T_φ при $\epsilon_4=5.75$; $\gamma=1.225$ (а), 1.176 (б), 1.142 (в); 1.09 (з), 1.022 (д), 0.953 (е)

бифуркации удвоения периода и рождения торов и эволюционирующих к хаотическим аттракторам.

6. Рассмотрим влияние параметров инерционности ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 на поведение модели (2). Численное исследование модели (2) показывает, что увеличение ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 ведет в итоге к дехаотизации колебаний системы и переходу к периодическому асинхронному режиму однооборотного вращательного предельного цикла или к синхронному режиму.

На рис. 12 приведены бифуркационные диаграммы, соответствующие значениям $\gamma=0.73$, $\epsilon_4=5.75$ и тем же значениям остальных параметров, при которых построен параметрический портрет на рис. 1. Исходным состоянием системы

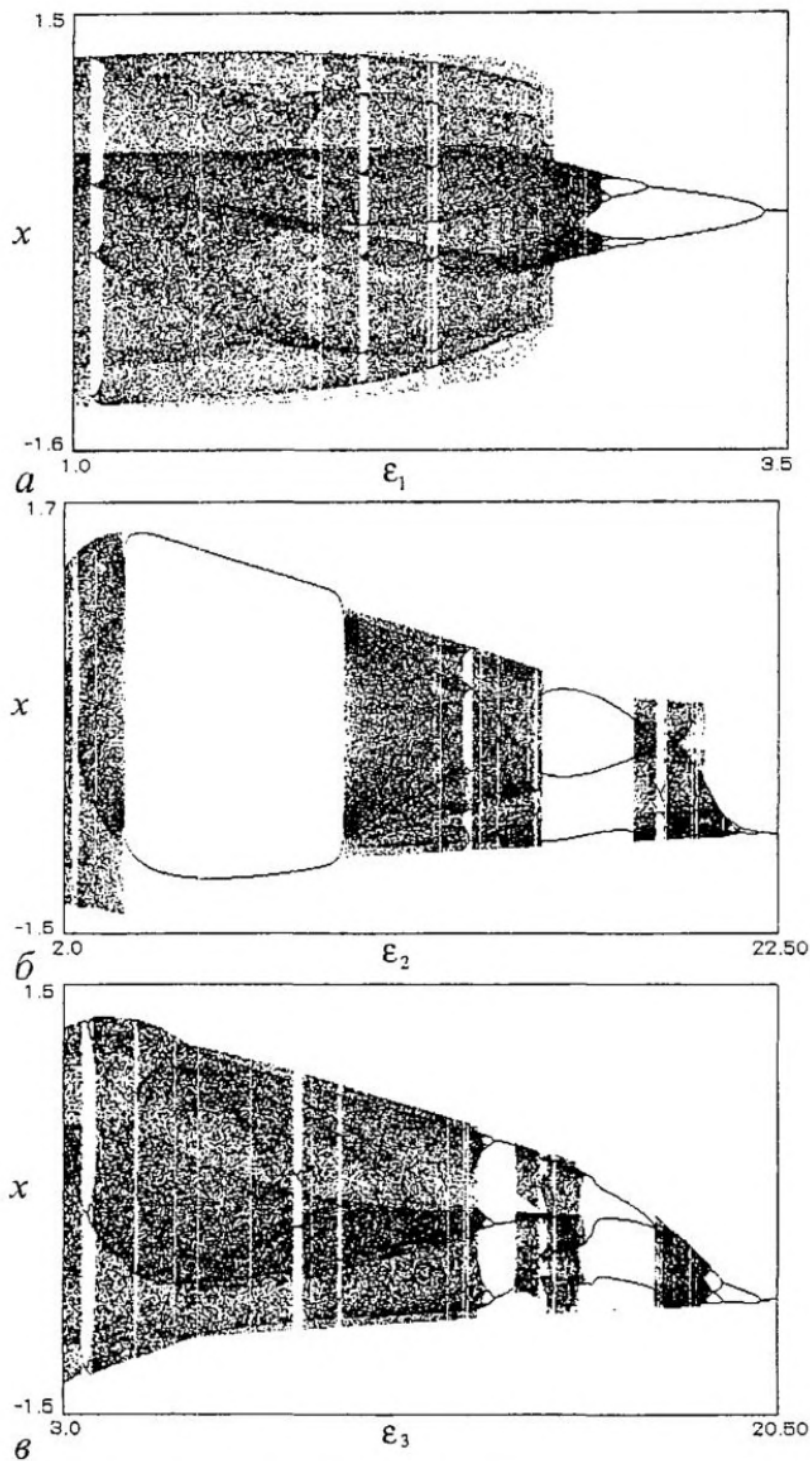


Рис. 12. а -Эволюция хаотического асинхронного режима при изменении ϵ_1 . б - Бифуркационная диаграмма (ϵ_2, x). в -Эволюция хаотического асинхронного режима при изменении ϵ_3 .

является режим колебательно-вращательного хаотического аттрактора P_4 (см. рис. 5, а, б). Видно, что в случае диаграмм (ϵ_1, x) и (ϵ_3, x) для большей части значений ϵ_1 и ϵ_3 из исследуемых интервалов в системе поддерживаются хаотические режимы. Периодические асинхронные режимы при изменении параметра ϵ_1 в интервале $1.0 < \epsilon_1 < 2.8537$ наблюдаются в узких (в масштабах рис. 12, а, в) областях значений γ и соответствуют четырех- и семиоборотному предельным циклам. Такие же узкие области, соответствующие трех-, двух- и пятиоборотному предельным циклам, существуют и при изменении параметра ϵ_3 в интервале $3.0 < \epsilon_3 < 13.5912$ (рис. 12, в). В интервале $13.5912 < \epsilon_3 < 18.7816$ для поведения системы с увеличением ϵ_3 характерно чередование периодических асинхронных режимов на трехоборотных предельных циклах и хаотических режимов. На (ϵ_2, x) -диаграмме (рис. 12, б) наблюдаются узкие области шести-, четырех- и двухоборотного предельных циклов и относительно широкие области двух- и трехоборотного предельных циклов. Переход от хаоса к режиму однооборотного предельного цикла при увеличении каждого из параметров ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 происходит через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения периода. Режим однооборотного цикла поддерживается в системе при дальнейшем увеличении ϵ_1 , ϵ_2 или ϵ_3 .

Обнаруженный характер влияния параметров инерционности ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 на динамическое поведение системы открывает возможность перевода ее из хаотического асинхронного режима в желаемого типа периодический асинхронный режим, а также из периодического асинхронного режима в хаотический подходящим изменением этих параметров.

7. Проведенное качественно-численное исследование динамической модели (2) с двумя с половиной степенями свободы в цилиндрическом фазовом пространстве позволило выяснить закономерности коллективного поведения связанных систем с фазовым управлением в случае, когда одна из подсистем (автоподстройки частоты) характеризуется регулярной динамикой, а другая (автоподстройки задержки) автономно может демонстрировать как регулярные, так и хаотические режимы. Результаты исследования показывают, что в такой системе могут реализоваться как динамические режимы, наблюдаемые в случае подсистем с регулярной индивидуальной динамикой [6, 7] (синхронный режим, периодические и хаотические асинхронные режимы), так и режимы и явления сложной динамики, обязанные своим происхождением применению фильтра третьего порядка в цепи управления задержкой (потеря устойчивости синхронного режима, появление периодических квазисинхронных режимов, определяемых колебательными предельными циклами, и асинхронных режимов, соответствующих колебательно-вращательным предельным циклам и двумерным торам в фазовом пространстве модели (2)).

Выделены области параметров, соответствующие установлению и удержанию синхронного режима (эти области представляют основной интерес для традиционных задач синхронизации и слежения) и квазисинхронным режимам. При значениях параметров вне этих областей рассматриваемая система ведет себя как автоколебательная система со сложной динамикой. Анализ перестроек поведения системы после нарушения синхронного и квазисинхронного режимов позволил выяснить большое разнообразие асинхронных режимов и бифуркационных переходов при изменении начальной частотной расстройки γ и параметров инерционности цепей управления ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 и ϵ_4 . Хаотические режимы формируются через бифуркации удвоения периода и седло-узловые бифуркации вращательных предельных циклов, через перемежаемость и разрушение двумерных торов. Примечательно, что сложные режимы и переходы к хаосу наблюдаются в системе при сравнительно небольших величинах параметров ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 и ϵ_4 , когда обе взаимодействующие подсистемы в отдельности демонстрируют

регулярное поведение. Показано, что увеличение параметров ε_1 , ε_2 и ε_3 способствует процессам дехаотизации асинхронных режимов. Обнаружено явление потери и последующего восстановления устойчивости синхронного режима при монотонном увеличении параметра ε_4 . Результаты исследования сценариев преобразования асинхронных режимов при изменении расстройки γ объясняют механизмы сложного поведения системы в процессе ввода в режим слежения, а также после нарушения этого режима. Сильная зависимость динамических состояний системы от параметров γ , ε_1 , ε_2 , ε_3 и ε_4 позволяет при помощи изменения этих параметров переходить от несинхронных режимов к синхронному или, наоборот, стимулировать возбуждение несинхронных режимов, отвечающих различным аттракторам модели (2), и решать на этой основе задачи генерации разнообразных сложных, в том числе случайноподобных, колебаний.

Работа выполнена при поддержке научной программы Минобразования РФ «Университеты России - фундаментальные исследования» (проект № 992870) и РФФИ (грант № 99-02-17742).

Библиографический список

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
2. Капранов М.В. Взаимодействующие многосвязные СФС // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. Гл. 4. С. 55.
3. Тузов Г.И., Сивов В.А., Прытков В.И. и др. Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами / Под ред. Г.И.Тузова. М.: Радио и связь, 1985.
4. Бабич О.А. Обработка информации в радионавигационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991.
5. Мищенко И.Н., Волынкин А.И., Волосов П.С., Григорьев М.И. Глобальная навигационная система «NAVSTAR» // Зарубежная радиоэлектроника. 1980. № 8. С. 52.
6. Пономаренко В.П. Динамика нелинейной двухконтурной следящей системы с однонаправленными связями // Известия РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С.115.
7. Пономаренко В.П., Кузовкин С.А. Колебания в двухкольцевой системе связанных управляемых генераторов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т.6. № 5. С.28.
8. Белюстина Л.Н., Белых В.Н. Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9. № 3.С.403.
9. Заулин И.А., Пономаренко В.П. Динамические режимы и бифуркационные явления в нелинейных статических системах синхронизации // Радиотехника и электроника. 1993. Т.38. № 5. С. 889.
10. Белюстина Л.Н., Кивелева К.Г., Фрайман Л.А. Качественно-численный метод в исследовании трехмерных нелинейных СФС // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В.Шахгильдяна и Л.Н.Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. Гл.2. С. 21.
11. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
12. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // Вестник Верхне-Волжского отделения

АТН РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Н.Новгород. 1997. Вып.2(4). С. 15.

13. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания.- М.: Наука, 1987.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 26.11.01

SYNCHRONIZATION AND DEVELOPMENT OF NONSYNCHRONOUS REGIMES IN COUPLED SYSTEMS WITH PHASE CONTROL

V.P. Ponomarenko

Dynamical regimes and bifurcations in nonlinear model with two-and-half-degree-of-freedom are investigated, which describes the behaviour of two coupled phase-locked and delay-locked systems. One of the interacting systems demonstrates only regular regimes of behaviour while the other system exhibits both regular and chaotic regimes. Numerical simulations of the model reveals various periodic and chaotic oscillatory regimes. The boundaries of lock range are determined, scenarios of development of nonsynchronous regimes under variation of the system parameters are shown. The results are presented in the form of one- and two-parameter bifurcation diagrams.



Пономаренко Валерий Павлович родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский государственный университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года - заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Соавтор коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.