



ОДИН СПОСОБ ОПИСАНИЯ И АНАЛИЗА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Л.И. Высоцкий

Цель настоящей работы - обратить внимание на возможность описания и анализа турбулентности на базе нетрадиционного представления компонент скорости, построения новых моделей турбулентности и анализа с их помощью некоторых устоявшихся понятий и представлений. В результате предлагаемого подхода удалось показать, что в выражение для турбулентной вязкости входит не «длина пути смешения» (которой просто не существует), а чистое расстояние от стенки. Новая структура рейнольдсовых напряжений расширяет возможности для их анализа и т.д.

Процедура получения уравнений О. Рейнольдса, описывающих осредненное турбулентное течение жидкости, производится расщеплением в уравнениях Навье - Стокса действительной скорости \mathbf{u} и давления p (при постоянной плотности жидкости, $\rho_{\text{ж}} = \text{const}$) на две части, осредненную $\langle \mathbf{u} \rangle$ и $\langle p \rangle$ и пульсационную \mathbf{u}' и p' , с последующим некоторым их осреднением. Чаще всего считают возможным применить, следуя Рейнольдсу [1], осреднение уравнений Навье - Стокса по времени. Как правило, все необходимые операции производят с использованием декартовой системы координат и представлением компонент скорости в виде

$$u_i = \langle u_i \rangle + u_i', \quad \text{где } i = x, y, z. \quad (1)$$

Реже используются цилиндрическая или иные системы координат [2], однако и в этом случае компоненты скорости представляют в виде (1), то есть за u_i принимают ковариантную компоненту \mathbf{u} .

В [3] показано преимущество использования неортогональной криволинейной координатной системы l, y_1, z^* (рис. 1), благодаря которой получено новое представление уравнений Навье - Стокса. Оно отличается тем, что в них в явном виде входят геометрические параметры пространственно искривленного потока (кривизны $1/R$ и $1/\rho$ и углы поворота α и β линий тока l). Эта форма уравнений Навье - Стокса была названа геометризованной.

Представление декартовых компонент скорости в координатной системе l, y_1, z^* имеет вид

$$\begin{aligned} u_x &= u \cos \alpha \cos \beta, \\ u_y &= u \sin \alpha \cos \beta, \\ u_z &= u \sin \beta, \end{aligned} \quad (2)$$

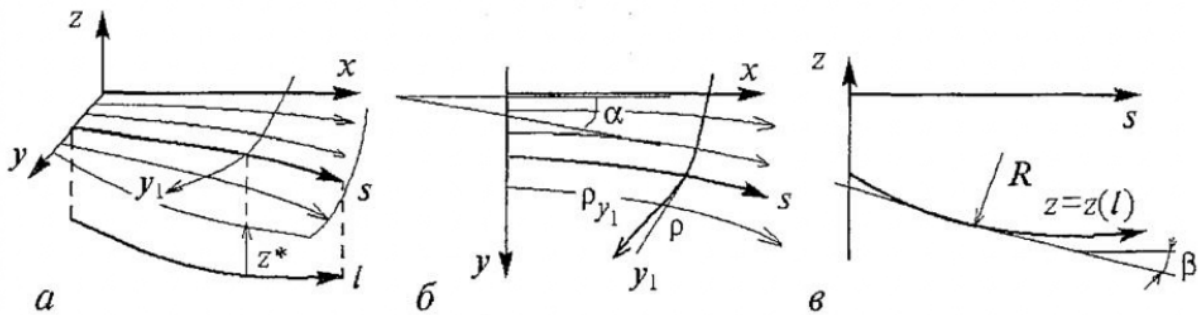


Рис. 1. а - Неортогональная криволинейная система координат: S - проекция линий тока l на плоскость (x, y) ; y_1 - координата, ортогональная семейству S ; z^* - координата, отсчитываемая от l . б - Проекция линий тока на плоскость (x, y) ; ρ - радиус кривизны линий S ; ρ_{y_1} - радиус кривизны линий y_1 . в - Развертка линий тока в цилиндрической поверхности (z, S) ; R - радиус кривизны линий l в этой поверхности (l/R - геодезическая кривизна линий l)

где $u = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$, α и β - углы, составленные касательной к проекции линии тока на координатную плоскость xOy и осью x и касательной к линии тока l с плоскостью xOy , соответственно [3].

Представим в той же координатной системе действительные скорости при турбулентном движении не в традиционном виде (1), а в форме (2)

$$\begin{aligned} u_x &= \langle u \rangle \cos \langle \alpha \rangle \cos \langle \beta \rangle + u' \cos (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta'), \\ u_y &= \langle u \rangle \sin \langle \alpha \rangle \cos \langle \beta \rangle + u' \sin (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta'), \\ u_z &= \langle u \rangle \sin \langle \beta \rangle + u' \sin (\langle \beta \rangle + \beta'), \end{aligned} \quad (3)$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают осредненные, а штрихи - пульсационные значения скорости и углов α и β (α' и β' представляют собой пульсационное отклонение углов α и β от их осредненного значения). Кроме того, в координатной системе l, y_1, z^* за l принимается конфигурация осредненной линии тока $\langle l \rangle$.

Легко заключить, что вторые слагаемые в правой части равенств (3) имеют смысл пульсационных декартовых компонент скорости, то есть

$$\begin{aligned} u' \cos (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta') &= u_x', \\ u' \sin (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta') &= u_y', \\ u' \sin (\langle \beta \rangle + \beta') &= u_z'. \end{aligned} \quad (4)$$

Но тогда получается, что **первые моменты** случайной скорости являются на самом деле **третьими либо вторыми моментами**. Правило осреднения по времени случайных величин приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \langle u' \cos (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta') \rangle &= 0, \\ \langle u' \sin (\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos (\langle \beta \rangle + \beta') \rangle &= 0, \\ \langle u' \sin (\langle \beta \rangle + \beta') \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Выпишем выражения для вторых статистических одноточечных моментов, входящих в тензор напряжений Рейнольдса,

$$\begin{aligned}
\langle u'_x u'_x \rangle &= \langle u'^2 \cos^2(\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos^2(\langle \beta \rangle + \beta') \rangle, \\
\langle u'_y u'_y \rangle &= \langle u'^2 \sin^2(\langle \alpha \rangle + \alpha') \cos^2(\langle \beta \rangle + \beta') \rangle, \\
\langle u'_z u'_z \rangle &= \langle u'^2 \sin^2(\langle \beta \rangle + \beta') \rangle, \\
\langle u'_x u'_y \rangle &= \langle (u'^2/2) \sin[2(\langle \alpha \rangle + \alpha')] \cos(\langle \beta \rangle + \beta') \rangle, \\
\langle u'_x u'_z \rangle &= \langle (u'^2/2) \sin[2(\langle \beta \rangle + \beta')] \cos(\langle \alpha \rangle + \alpha') \rangle, \\
\langle u'_y u'_z \rangle &= \langle (u'^2/2) \sin[2(\langle \beta \rangle + \beta')] \sin(\langle \alpha \rangle + \alpha') \rangle,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $(u'^2/2) = (u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z)/2 = k$, k - кинетическая энергия турбулентности.

Таким образом, из выражений (6) непосредственно вытекает зависимость рейнольдсовых напряжений от кинетической энергии турбулентности и, кроме того, они оказываются моментами не второго, а шестого - четвертого порядков. Более того, в традиционной форме выражения вторых моментов содержат **взаимозависимые случайные** величины (компоненты пульсационной скорости u'_x , u'_y и u'_z связаны уравнением неразрывности), а в предлагаемой форме - некоррелируемые случайные величины u' , α' и β' .

Представление компонент пульсационной скорости в виде (4) позволяет предложить целый набор упрощенных моделей турбулентности. Они представлены на рис. 2. Здесь «а», «б» типичные модели, «в»-«г» - новые предлагаемые модели турбулентности.

Можно ожидать, что модель турбулентности «в» и близкая ей модель «г» окажутся приемлемыми для многих случаев турбулентных течений. Если допустить, что углы α' и β' малы настолько, что их квадратами и произведениями друг на друга можно пренебречь и, кроме того, можно считать, что $\cos \alpha' \approx \cos \beta' \approx 1$, а $\sin \alpha' \approx \alpha'$ и $\sin \beta' \approx \beta'$, то это резко упрощает дальнейший анализ.

В частности, при указанных предположениях осредненные геометризованные уравнения Навье - Стокса [3] переходят в геометризованные уравнения Рейнольдса [4], а именно:

для l направления

$$\begin{aligned}
-\partial/\partial l (\Pi_{(m)} + P) &= \partial/\partial l (\langle u \rangle^2/2 + \langle k \rangle) - \langle \beta' \partial/\partial l (u'^2/2) \rangle \operatorname{tg} \beta + \langle \beta' \partial/\partial z (u'^2/2) \rangle (1/\cos \beta) + \\
&+ \langle \alpha' \partial/\partial y_1 (u'^2/2) \rangle \cos \beta - \langle u'^2 \beta' \rangle / R,
\end{aligned} \tag{8}$$

для y_1 направления

$$\begin{aligned}
-\partial/\partial y_1 (\Pi_{(m)} + P) &= [(\langle u \rangle^2 + 2\langle k \rangle) \cos^2 \beta] / \rho + \langle u' \partial/\partial l (u' \alpha') \rangle \cos \beta + \\
&+ \langle u'^2 \alpha' \rangle [(\cos^2 \beta) / \rho_{y_1} - \sin \beta / R] - (\langle u'^2 \beta' \rangle \sin 2\beta) / \rho,
\end{aligned} \tag{9}$$

для z направления

$$\begin{aligned}
-\partial/\partial z (\Pi_{(m)} + P) &= \partial/\partial l (\langle u \rangle^2/2 + \langle k \rangle) \sin \beta + [(\langle u \rangle^2 + 2\langle k \rangle) \cos^2 \beta] / R + \\
&+ \langle u' \partial/\partial l (u' \beta') \rangle \cos \beta + \langle u'^2 \beta' \rangle (2 \sin \beta / R - \partial \beta / \partial z) - \langle \beta' \partial/\partial l (u'^2/2) \rangle \sin \beta \operatorname{tg} \beta + \\
&+ \langle \beta' \partial/\partial z (u'^2/2) \rangle \operatorname{tg} \beta + \langle \alpha' \partial/\partial y_1 (u'^2/2) \rangle \sin \beta \cos \beta + \langle u'^2 \alpha' \rangle \cos^2 \beta \partial \beta / \partial y_1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\Pi_{(m)}$ - потенциал массовых сил, P - функция давления (функция Громеки). Уравнение неразрывности при этом примет вид [2]

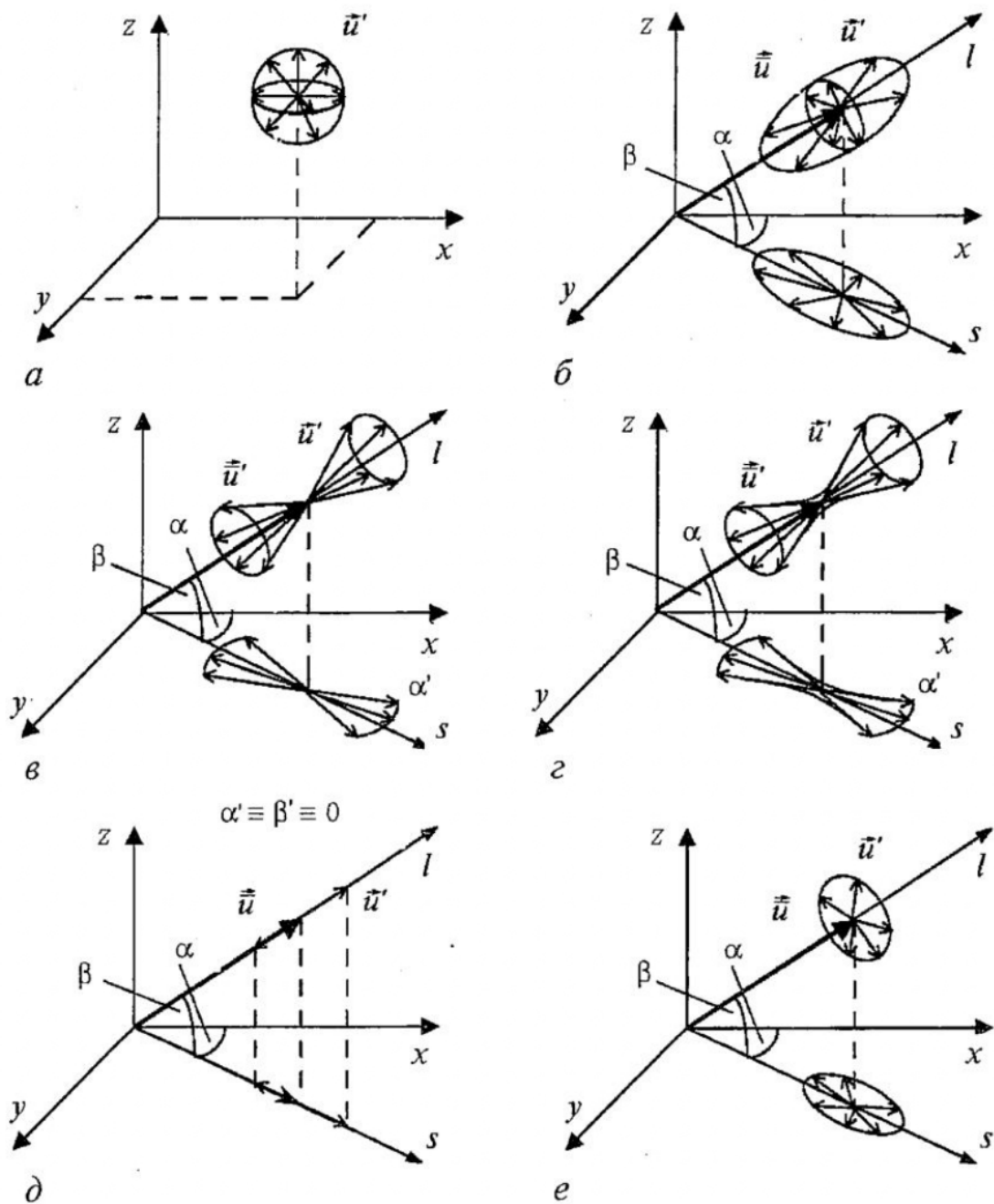


Рис. 2. Варианты моделей турбулентности. Традиционные модели: *a* - изотропная турбулентность; *б* - неизотропная турбулентность. Новые модели: *в* - случай малых значений α' и β' ; *г* - случай малых значений u' вне пределов малых значений α' и β' в модели «*в*»; *д* - продольно пульсирующее течение; *е* - поперечно пульсирующее течение

$$\begin{aligned}
 \langle k \rangle = & (k_0) + \int_{l_0}^l \langle u' \partial(u' \beta') / \partial l \rangle \operatorname{tg} \beta dl - \int_{l_0}^l \langle u' \partial(u' \beta') / \partial y_1 \rangle \cos \beta dl - \\
 & - \int_{l_0}^l \langle u' \partial(u' \beta') / \partial z \rangle (dl / \cos \beta) + \int_{l_0}^l \langle u'^2 \alpha' \rangle [\sin \beta \partial \beta / \partial y_1 + \cos \beta / \rho] dl + \\
 & + \int_{l_0}^l \langle u'^2 \beta' \rangle [1 / (R \cos^2 \beta) + \sin \beta / \rho_{y_1}] dl - \int_{l_0}^l \langle u'^2 \rangle [\cos \beta / \rho_{y_1} + \partial \beta / \partial z] dl. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Полученная форма уравнений Рейнольдса интересна тем, что в них прослеживается связь турбулентных параметров течения с геометрическими параметрами осредненного течения (R , ρ , ρ_{y_1} , α , β и т.д.).

В тех же предположениях (то есть для моделей турбулентности «в» и «г») можно установить, что выражения (6) упрощаются и пульсационные величины не находятся под знаком тригонометрических функций

$$\begin{aligned}
 \langle u_x'^2 \rangle &= \langle u'^2 \rangle \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \langle u'^2 \alpha' \rangle \sin 2\alpha \cos^2 \beta - \langle u'^2 \beta' \rangle \cos^2 \alpha \sin 2\beta, \\
 \langle u_y'^2 \rangle &= \langle u'^2 \rangle \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \langle u'^2 \alpha' \rangle \sin 2\alpha \cos^2 \beta - \langle u'^2 \beta' \rangle \sin^2 \alpha \sin 2\beta, \\
 \langle u_z'^2 \rangle &= \langle u'^2 \rangle \sin^2 \beta + \langle u'^2 \beta' \rangle \sin 2\beta, \\
 \langle u_x'^2 \rangle + \langle u_y'^2 \rangle + \langle u_z'^2 \rangle &= 2\langle k \rangle, \\
 \langle u_x' u_y' \rangle &= \langle k \rangle \sin 2\alpha \cos^2 \beta + \langle u'^2 \alpha' \rangle \cos^2 \beta \cos 2\alpha - \langle u'^2 \beta' / 2 \rangle \sin 2\alpha \sin 2\beta, \\
 \langle u_x' u_z' \rangle &= \langle k \rangle \cos \alpha \sin 2\beta - \langle u'^2 \alpha' / 2 \rangle \sin \alpha \sin 2\beta + \langle u'^2 \beta' \rangle \cos \alpha \cos 2\beta, \\
 \langle u_y' u_z' \rangle &= \langle k \rangle \sin \alpha \sin 2\beta - \langle u'^2 \alpha' / 2 \rangle \cos \alpha \sin 2\beta + \langle u'^2 \beta' \rangle \sin \alpha \cos 2\beta, \\
 \partial \langle u' \alpha' \rangle / \partial q_i &= 0, \quad \partial \langle u' \beta' \rangle / \partial q_i = 0, \quad \partial \langle u' \alpha' \beta' \rangle / \partial q_i = 0, \quad q_i = l, y_1, z^*.
 \end{aligned} \tag{12}$$

В случае продольно однородного течения ($\alpha = 0, \beta = \text{const}$) эти соотношения упрощаются

$$\begin{aligned}
 \langle u_x'^2 \rangle &= 2\langle k \rangle \cos^2 \beta - \langle u'^2 \beta' \rangle \sin 2\beta, \quad \langle u_y'^2 \rangle = 0, \\
 \langle u_z'^2 \rangle &= 2\langle k \rangle \sin^2 \beta + \langle u'^2 \beta' \rangle \sin 2\beta, \\
 \langle u_x'^2 \rangle + \langle u_z'^2 \rangle &= 2\langle k \rangle, \\
 \langle u_x' u_y' \rangle &= \langle u'^2 \alpha' \rangle \cos^2 \beta, \\
 \langle u_x' u_z' \rangle &= \langle k \rangle \sin 2\beta + \langle u'^2 \beta' \rangle \cos 2\beta, \\
 \langle u_y' u_z' \rangle &= \langle u'^2 \alpha' / 2 \rangle \sin 2\beta.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Осредненные одноточечные моменты

$$\langle u' \partial(u' \beta') / \partial z \rangle, \quad \langle u' \partial(u' \alpha') / \partial y \rangle, \quad \langle \partial u' / \partial l [\partial(u' \alpha') / \partial q_i] \rangle, \quad \langle \partial u' / \partial l [\partial(u' \beta') / \partial q_i] \rangle,$$

$\langle \partial k / \partial l [\partial(u' \alpha') / \partial q_i] \rangle, \langle \partial k / \partial l [\partial(u' \beta') / \partial q_i] \rangle, \langle u' \alpha' \partial k / \partial l \rangle, \langle \alpha' \partial k / \partial l \rangle, \langle \beta' \partial k / \partial l \rangle$ и $\langle \partial u' \beta' / \partial l \rangle$ равны нулю.

Кроме уже отмеченных, можно выявить другие важные результаты. Так, например, сопоставляя соответствующие члены уравнений Рейнольдса, записанные в координатах l, y_1, z^* и декартовых, легко установить следующие соотношения для касательных компонент напряжения τ :

$$-\partial \tau_{xz} / \partial z = \rho_{\text{ж}} \langle \beta' \partial k / \partial z \rangle, \tag{14}$$

$$-\partial \tau_{xy} / \partial y = \rho_{\text{ж}} \langle \alpha' \partial k / \partial y \rangle. \tag{15}$$

Проинтегрируем выражение (14) по z

$$-\int_0^z (\partial \tau_{xz} / \partial z) dz = -\tau_{xz} \Big|_0^z = -\tau_{xz} = \rho_{\text{ж}} \int_0^z \langle \beta' \partial k / \partial z \rangle dz.$$

Здесь учтено, что $\tau_{xz} \Big|_{z=0} = 0$. Следовательно,

$$\tau_{xz} = -\rho_{ж} \int_0^z \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle dz. \quad (16)$$

Выражение (16) является новой интегральной формой представления рейнольдсова напряжения.

Поскольку $\tau_{xz} = -\rho_{ж} \langle u'_x u'_y \rangle$, то можно заключить, что должно выполняться соответствие

$$\langle u'_x u'_z \rangle = \int_0^z \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle dz, \quad (17)$$

которое должно подвергнуться экспериментальной проверке.

Так как принято рейнольдсовы напряжения выражать по Буссинеску

$$\tau_{xz} = -\rho_{ж} \langle u'_x u'_z \rangle = \mu_z \partial \langle u \rangle / \partial z,$$

то получим

$$\mu_z \partial \langle u \rangle / \partial z = -\rho_{ж} \int_0^z \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle dz$$

или

$$v_z = -[\int_0^z \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle dz] / (\partial \langle u \rangle / \partial z), \quad (18)$$

где $v_z = \mu_z / \rho_{ж}$ - кинематическая турбулентная вязкость, являющаяся по сути своей некоей согласующей функцией, которую во избежание путаницы лучше было бы назвать, например, функцией Буссинеска.

Поскольку в размерность v_z входит длина L , а также скорость u , то Л. Прандтль ввел знаменитую гипотетическую «длину пути смешения». Многочисленными исследователями было предложено значительное число формул, базирующихся на опытных данных, для расчета длины пути смешения L . Лишь, пожалуй, Л. Ландау [5] принял за L просто расстояние от стенки, не приведя, впрочем, никаких доказательств. С помощью выражения (18) легко показать, что он был прав и что «длины пути смешения» **не существует**. На самом деле, по теореме о среднем значении имеем

$$\int_0^z \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle dz = \langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle_z \cdot z, \quad (19)$$

где нижний индекс z означает осреднение подынтегральной функции на расстоянии z от стенки. Тогда получим, что

$$v_z = \frac{\langle \beta'(\partial k / \partial z) \rangle_z \cdot z}{\partial \langle u \rangle / \partial z}. \quad (20)$$

Из формулы (20) непосредственно следует, что $L \equiv z$. Таким образом, гипотезу Прандтля, давшую (в свое время) мощный импульс анализу турбулентности, следует признать имеющей лишь историческое значение.

Аналогично можно установить, что

$$v_y = -\frac{\int_0^y \langle \alpha' \partial k / \partial y \rangle dy}{\partial \langle u \rangle / \partial y} = -\frac{\langle \alpha' \partial k / \partial y \rangle_y \cdot \delta}{\partial \langle u \rangle / \partial y}, \quad (21)$$

где δ - расстояние от боковой стенки.

Далее, в продольно однородном потоке на свободной поверхности (при $z = H$, где H - глубина потока) или на оси симметрии (при $z = r_0$, где r_0 - радиус трубы)

градиент скорости должен быть нулевым ($\partial\langle u \rangle / \partial z = 0$). Во избежание неопределенности в (21) должно быть

$$-\langle \beta' \partial k / \partial z \rangle_{z=H} = 0. \quad (22)$$

Применяя правило Лопиталья, найдем

$$v_z = \frac{-\langle \beta' \partial k / \partial z \rangle}{\partial^2 \langle u \rangle / \partial z^2} \Big|_{z=H} \neq \infty, \quad (23)$$

где

$$\partial^2 \langle u \rangle / \partial z^2 \Big|_{z=H} \neq 0, \quad \langle \beta' \partial k / \partial z \rangle = \langle \partial(\beta' k) / \partial z \rangle - \langle k \partial \beta' / \partial z \rangle. \quad (24)$$

Аналогичный анализ пригоден и для v_y .

Кстати, легко заключить, что турбулентная кинематическая вязкость в случае продольно однородного течения будет скаляром, то есть будут удовлетворяться условия

$$v_z = v_y = v_T, \quad (25)$$

при соблюдении соотношения

$$\frac{\langle \beta' \partial k / \partial z \rangle_z}{\langle \alpha' \partial k / \partial y \rangle_y} = \frac{v (\partial \langle u \rangle / \partial z)}{z (\partial \langle u \rangle / \partial y)} \quad (26)$$

в каждой точке сечения потока.

Изложенным не исчерпываются возможности дальнейшего анализа турбулентности с использованием предложенных моделей.

Заключение

Анализ некоторых турбулентных параметров, основанный на новом представлении осредненных уравнений Навье - Стокса и упрощенной модели турбулентности, позволяет получить некоторые новые результаты, отличные от традиционных:

- в то время как компоненты пульсационной скорости u'_x , u'_y и u'_z являются коррелируемыми величинами, u' , α' и β' имеют нулевую корреляцию;

- осредненные величины типа $\langle u'_i u'_j \rangle$ определяют как вторые одноточечные моменты, однако они содержат третьи моменты типа $\langle u'^2 \beta' \rangle$, что должно наложить отпечаток на их анализе;

- v_T должно содержать некоторую характерную длину, Прандтль назвал ее «длиной пути смещения», в то время как эта длина есть просто расстояние от стенки;

- традиционный анализ приводит к условию $v_T = 0$ на оси симметрии, а использование нового представления показывает, что $v_T \neq 0$ на той же оси.

Кроме того, этот же подход позволяет установить, что целый ряд одноточечных моментов имеет нулевые значения, что турбулентные параметры связаны с геометрическими (например, кривизной и углами расхождения линий тока) и т.д.

По мнению автора, возможности предлагаемого подхода далеко не исчерпаны как в теоретическом, так и экспериментальном смысле. В данной статье автор не касался проблем возникновения и развития турбулентности, проблем замыкания уравнений Рейнольдса, а также новых подходов к трактовке турбулентности, превосходно описанных в статье Ю.Л. Климонтовича [6] и ряде других статей, опубликованных там же, а сосредоточил внимание на результатах, к

которым приводит введенный им способ расщепления вектора пульсационной скорости.

Библиографический список

1. *Reynolds O.* On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // *Phil. Trans. of the Royal Society.* 1895: F186. 123 p.
2. *Таунсенд А.А.* Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: 1959. 394 с.
3. *Высоцкий Л.И.* Геометризованная форма уравнений Навье - Стокса (часть первая). Саратов: Изд-во СГТУ, 1995. 212 с.
4. *Vysotsky L.I.* The geometrized form of Reynolds equations. *Proc. of Hydro-informatic - 98.* CD ROM.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
6. *Климонтович Ю.Л.* Что же такое турбулентность? // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т.3, №2. С.7.

*Саратовский государственный
технический университет*

*Поступила в редакцию 01.03.2002
после доработки 15.05.2001*

THE TECHNIQUE OF DESCRIPTION AND ANALYSIS OF TURBULENCE

L.I. Vysotsky

The purpose of the paper is to call attention to the possible description and analysis of turbulence based on non-traditional representation of the velocity components, development of new models of turbulence and their analysis using traditional methods. The suggested technique allows to show that the turbulent viscosity expression contains not the «mixing way lenght» (actually it doesn't exist) but the distance from the wall. The new structure of Reynolds stresses provides new possibilities of their analysis etc.



Высоцкий Лев Ильич - родился в 1931 году. Выпускник Саратовского автодорожного института по специальности «Мосты и тоннели» (1953). Кандидат технических наук (1960), доктор технических наук (1970). В 1972 году присвоено профессорское звание, а в 1981 году - звание заслуженного деятеля науки и техники РСФСР. С 1972 года заведует кафедрой гидравлики, геодезии и водоснабжения (и гидравлических машин) Саратовского государственного технического университета. Автор 15 монографий, учебников и учебных пособий, опубликовал более 200 статей, имеет более 50 изобретений. Круг научных интересов - трехмерные течения пространственно деформированных потоков по криволинейным поверхностям, решение прикладных обратных задач гидравлики по управлению бурными потоками на водосбросах на основе предложенной им теории, разработка и совершенствование теории лопастных фильтрующих центрифуг.

E-mail: vys@sfire.san.ru