



ДИНАМИКА АВТОГЕНЕРАТОРА С ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ПРИ ИНВЕРСИИ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧАСТОТНОГО ДИСКРИМИНАТОРА

В.П. Пономаренко, Е.А. Тихонов

Исследуются динамические состояния и бифуркации в нелинейных моделях автогенераторной системы с комбинированным частотно-фазовым управлением, особенность которой состоит в инверсии характеристики частотного дискриминатора. На основании качественно-численного исследования установлены области параметров, соответствующие моногармоническому, периодическим и хаотическим автомодуляционным режимам управляемого генератора. Исследованы сценарии преобразования автомодуляционных режимов при изменении параметров моделей. Результаты представлены в виде двухпараметрических портретов движений, однопараметрических бифуркационных диаграмм, фазовых портретов аттракторов.

1. Системы с фазовым и частотным управлением являются особым классом автоколебательных систем, основанных на принципе автоподстройки частоты колебаний управляемого генератора к частоте опорного колебания. Область научно-технических приложений таких систем достаточно широка и включает в себя, например, создание источников колебаний с высокостабильными параметрами, оптимальный прием сигналов, разработку сетей синхронизации, реализацию коммуникационных технологий и др. Обобщенная структура петли автоподстройки содержит три основных элемента [1,2]: фазовый или частотный дискриминатор, выполняющий функции формирователя управляющего сигнала, зависящего от рассогласования фаз или частот управляемого и опорного колебаний; фильтр низких частот (ФНЧ), играющий роль корректирующего звена, придающего петле управления необходимые динамические свойства; частотный модулятор, через который реализуется изменение частоты колебаний управляемого генератора под воздействием управляющего сигнала. Режимы поведения управляемого генератора в значительной степени определяются нелинейной характеристикой дискриминатора и типом ФНЧ. Во многих приложениях применяют комбинированные системы с частотно-фазовым управлением, объединяющие петли частотной и фазовой автоподстройки [1,3].

Процессы в системах с фазовым и частотным управлением являются интересным и важным объектом исследований в области нелинейной динамики. В таких системах реализуются следующие стационарные режимы [1,2]: режим синхронизации (в системах с фазовым и частотно-фазовым управлением),

которому соответствуют моногармонические колебания управляемого генератора на частоте опорного колебания; режим автоподстройки частоты (в системах с частотным управлением), в котором частота колебаний управляемого генератора отличается от опорной частоты на малую величину; несинхронные режимы с непостоянными величинами фазового и частотного рассогласований, которым соответствуют автомодуляционные колебания управляемого генератора. Изучение динамики различных вариантов систем с фазовым и частотным управлением представляет интерес как с позиций теории колебаний и теории фазовой синхронизации, так и применительно к широко обсуждаемым сейчас проблемам генерирования сложных регулярных и хаотических колебаний. В последнее время проявляется заметный интерес к углубленному исследованию несинхронных режимов систем, к поиску эффективных путей расширения набора и областей генерации сложных автомодуляционных колебаний, демонстрируемых управляемым генератором. В качестве таких путей естественно рассматривать изменение нелинейной характеристики дискриминатора, усложнение ФНЧ, а также переход к многокольцевым системам управления.

В работах [4,5] рассмотрено влияние параметров ФНЧ второго порядка и нелинейности фазового дискриминатора на режимы поведения генератора с петлей фазового управления. В работе [6] предложено инверсное включение дискриминатора в петле частотной автоподстройки с ФНЧ третьего порядка, которое соответствует положительной (в отличие от традиционной отрицательной) обратной связи по цепи управления. Как оказалось [6-10], в такой системе создаются условия для более активного взаимодействия автомодуляционных колебаний, возникающих в результате развития неустойчивости режимов стационарной генерации, что делает систему богаче в отношении сложной динамики. В данной работе мы обратимся к исследованию динамики автогенератора с двойной цепью частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) при инверсном включении частотного дискриминатора.

Функциональная схема системы ЧФАП приведена на рис. 1. Объектом управления является перестраиваемый по частоте генератор (управляемый генератор), а регулируемой величиной - текущая частота его колебаний. Фазовый дискриминатор, фильтр низких частот и управляющий элемент (частотный модулятор) образуют петлю фазового управления, которая формирует сигнал рассогласования, зависящий от разности фаз колебаний управляемого генератора и эталонного генератора. Частотный дискриминатор, фильтр низких частот и управляющий элемент образуют петлю частотного управления, формирующую сигнал рассогласования, зависящий от отклонения частоты колебаний управляемого генератора от центральной частоты частотного дискриминатора, которая выбирается равной частоте опорного колебания эталонного генератора. В результате суммарного корректирующего воздействия на управляемый генератор

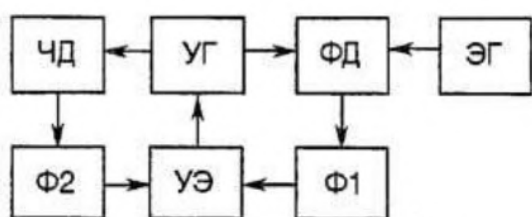


Рис. 1. Функциональная схема системы ЧФАП: УГ - управляемый генератор; ФД - фазовый дискриминатор; Φ_1 , Φ_2 - фильтры низких частот; УЭ - управляющий элемент; ЧД - частотный дискриминатор; ЭГ - эталонный генератор

со стороны фазовой и частотной цепей управления в системе ЧФАП осуществляется подстройка частоты колебаний управляемого генератора к частоте колебаний эталонного генератора. В работах [11-14] показано, что применение частотно-фазового управления приводит к увеличению области захвата в режим синхронизации.

Мы рассмотрим особенности динамики системы ЧФАП, обусловленные инверсией характеристики частот-

ного дискриминатора и инерционностью цепей управления. План статьи следующий. Вначале рассмотрена простейшая двумерная модель системы (в случае ФНЧ первого порядка), на которой выясняются динамические режимы и бифуркации при изменении параметра, характеризующего степень влияния инверсной петли частотного управления. Затем на примере модели с двумя с половиной степенями свободы (в случае ФНЧ второго порядка в фазовой и частотной петлях) анализируется влияние параметров инерционности на динамику системы, выясняется возможность генерации хаотически модулированных колебаний.

2. Исходным уравнением для описания динамических процессов в рассматриваемой системе ЧФАП является следующее уравнение для разности фаз φ управляемого и опорного колебаний, записанное в операторной форме ($p=d/dt$) на основании [11]:

$$p\varphi + \Omega_1 K_1(p)F(\varphi) - \Omega_2 K_2(p)\Phi(p\varphi) = \delta\omega. \quad (1)$$

В уравнении (1) $K_1(p)$ и $K_2(p)$ - коэффициенты передачи фильтров в фазовой и частотной цепях управления; $F(\varphi)$ и $\Phi(p\varphi)$ - характеристики фазового и частотного дискриминаторов, нормированные на единицу; Ω_1 и Ω_2 - коэффициенты усиления по цепям управления; $\delta\omega$ - начальная расстройка частот управляемого и опорного колебаний. Знак «минус» перед Ω_2 соответствует положительной обратной связи по цепи частотного управления. Характеристики дискриминаторов будем аппроксимировать функциями $F(\varphi)=\sin\varphi$ и $\Phi(p\varphi)=2\beta_1 p\varphi/(1+(\beta_1 p\varphi)^2)$, где β_1 - расстройка частот, при которой достигается максимум $\Phi(p\varphi)$. Конкретный вид уравнения (1) определяется коэффициентами передачи $K_1(p)$ и $K_2(p)$.

Положим в уравнении (1) $K_1(p)=1$, $K_2(p)=1/(1+b_1 p)$, что соответствует простейшим петлям фазового и частотного управления первого порядка (b_1 - постоянная времени). Вводя безразмерное время $\tau=(\Omega_1/b_1)^{1/2}t$, параметр инерционности $\lambda=1/(\Omega_1 b_1)^{1/2}$ и начальную расстройку $\gamma=\delta\omega/\Omega_1$, из (1) получим следующую динамическую систему:

$$d\varphi/d\tau = \eta, \quad d\eta/d\tau = \gamma - \sin\varphi + b\Phi(\beta\lambda\eta) - (\lambda+\lambda^{-1}\cos\varphi)\eta, \quad (2)$$

где $b=\Omega_2/\Omega_1$, $\Phi(\beta\lambda\eta)=2\beta\lambda\eta/(1+\beta^2\lambda^2\eta^2)$, $\beta=\beta_1\Omega_1$. Система (2) имеет цилиндрическое фазовое пространство $U=\{\varphi(\text{mod}2\pi), \eta\}$. В дальнейшем поверхность цилиндра U будем рассматривать развернутой на плоскость. В силу инвариантности системы (2) относительно замены $(\varphi, \eta, \gamma) \rightarrow (-\varphi, -\eta, -\gamma)$ достаточно исследовать ее при значениях $\gamma \geq 0$. При значениях $b \leq 0$ система (2) представляет модель традиционной системы ЧФАП, динамика которой исследована в [13]. Рассмотрим в рамках модели (2) особенности поведения системы ЧФАП, которые возникают в результате инверсии характеристики частотного дискриминатора (то есть при $b > 0$).

Вначале обсудим влияние параметра b , характеризующего степень влияния петли частотного управления, на устойчивость режима синхронизации. Система (2) при значениях $0 \leq \gamma < 1$ имеет два состояния равновесия $A_1(\arcsin\gamma, 0)$ и $A_2(\pi - \arcsin\gamma, 0)$. Состояние равновесия A_1 устойчиво при значениях $b < b_s$ и неустойчиво при $b > b_s$, где $b_s = (1 + (1 - \gamma^2)^{1/2} / \lambda^2) / 2\beta$; состояние равновесия A_2 - седло. Отметим, что в случае $b \leq 0$ состояние равновесия A_1 всегда устойчиво [13]. Устойчивому состоянию равновесия A_1 отвечает режим синхронизации управляемого генератора опорным сигналом. Поведение системы (2) вблизи границы устойчивости $b = b_s$ определяется [15] знаком первой ляпуновской величины L , выражение для которой получаем в виде

$$L(b=b_s) = -\pi\{6\beta^2\lambda^2(1-\gamma^2)(\lambda^2+(1-\gamma^2)^{1/2})-1\}/(8\lambda(1-\gamma^2)^{3/4}).$$

Величина $L=0$ при значениях $\gamma=\gamma^0$, $\gamma^0=(1-(1/2+1/6\beta^2-(1/4+1/6\beta^2)^{1/2})/\lambda^4)^{1/2}$; $L<0$ при $\gamma<\gamma^0$; $L>0$ при $\gamma>\gamma^0$. Следовательно, при переходе с возрастанием параметра b через значение b_s происходит рождение на фазовом цилиндре U устойчивого предельного цикла L_0 колебательного типа (без вращения фазы), охватывающего ставшее неустойчивым состояние равновесия A_1 , когда $\gamma<\gamma^0$, или стягивание неустойчивого предельного цикла Γ_0 колебательного типа к состоянию равновесия A_1 с потерей его устойчивости, когда $\gamma>\gamma^0$.

Устойчивый предельный цикл L_0 отвечает колебаниям относительно состояния равновесия A_1 . В теории фазовой синхронизации режим цикла L_0

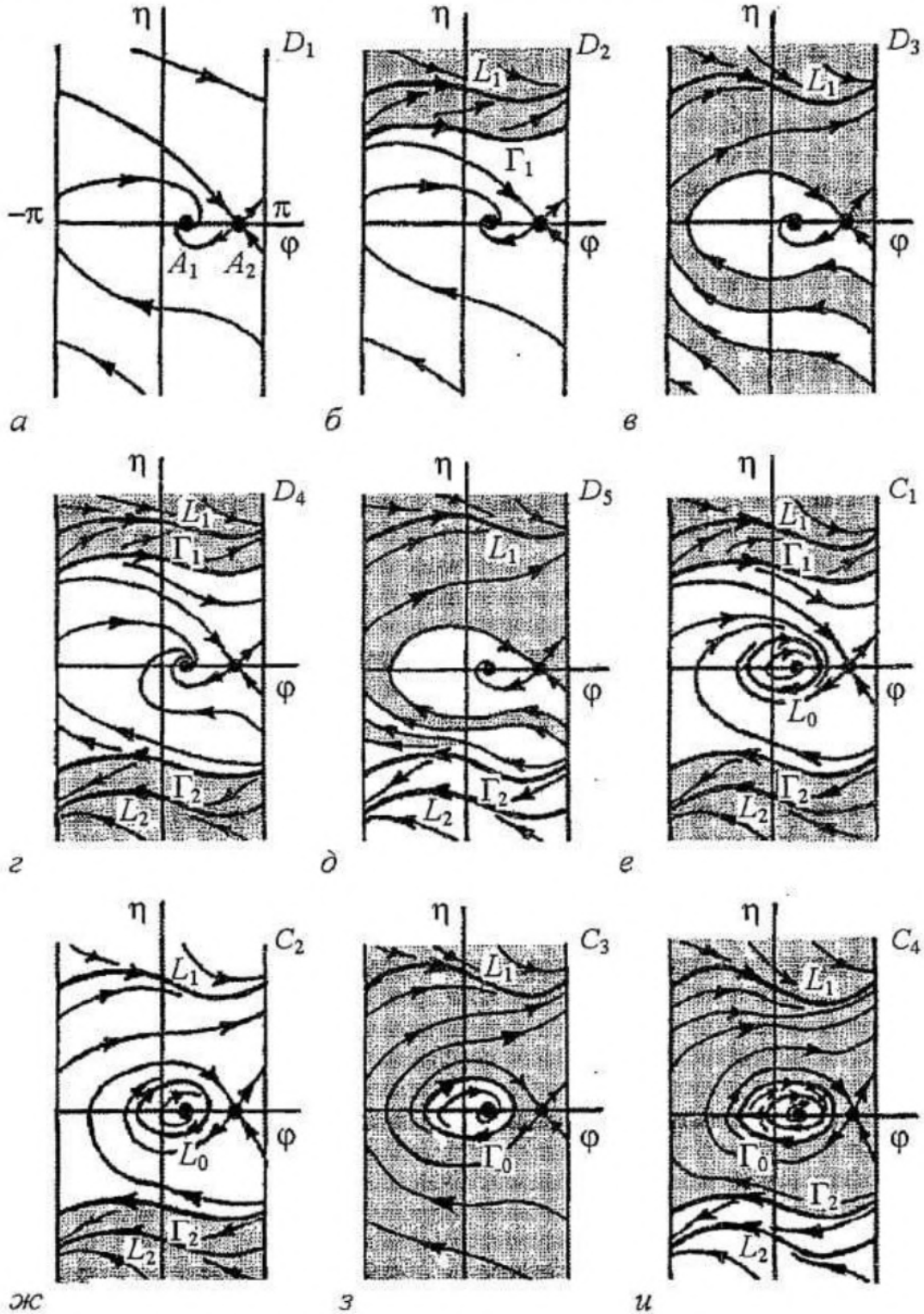


Рис. 2. Фазовые портреты модели (2) в областях D_1-D_5, C_1-C_4

трактуются [16] как режим квазисинхронизации, при котором имеется периодическая автомодуляция частоты колебаний управляемого генератора относительно стабилизированной по опорному сигналу средней частоты.

При исследовании системы (2) при $b \leq 0$ в [13] установлено, что она в этом случае обладает свойством глобальной асимптотической устойчивости с фазовым портретом, приведенным на рис. 2, а. Это означает, что при значениях $b \leq 0$, $0 \leq \gamma < 1$ в традиционной системе ЧФАП при любых начальных условиях реализуется режим синхронизации. Исследование системы (2) при значениях $b > 0$ показывает, что в этом случае на фазовом цилиндре U появляются предельные циклы колебательного и вращательного типов, которым соответствуют несинхронные режимы системы ЧФАП, то есть создаются условия для реализации автомодуляционных режимов управляемого генератора. Результаты этого исследования, выполненного с помощью качественно-численных методов и моделирования, представлены на рис. 3 в виде качественного параметрического портрета на плоскости параметров (γ, b) , соответствующего значениям $\lambda = 0.2$, $\beta = 4.0$.

На рис. 3 линия 1 соответствует петле сепаратрисы первого рода Π_0 , охватывающей состояние равновесия A_1 . Седловая величина $\sigma = (2\beta b - 1)\lambda + (1 - \gamma^2)^{1/2} / \lambda > 0$ (так как линия 1 расположена в области значений $b > 1/2\beta$), следовательно, петля Π_0 является неустойчивой. При переходе с увеличением b через линию 1 на фазовом цилиндре из петли Π_0 появляется неустойчивый колебательный предельный цикл Γ_0 , охватывающий A_1 . Линия 2 - это граница b_s области устойчивости состояния равновесия A_1 . Точка M на кривой b_s , соответствующая $\gamma = \gamma^0$ и отвечающая обращению в ноль первой ляпуновской величины L , разделяет линию 2 на две

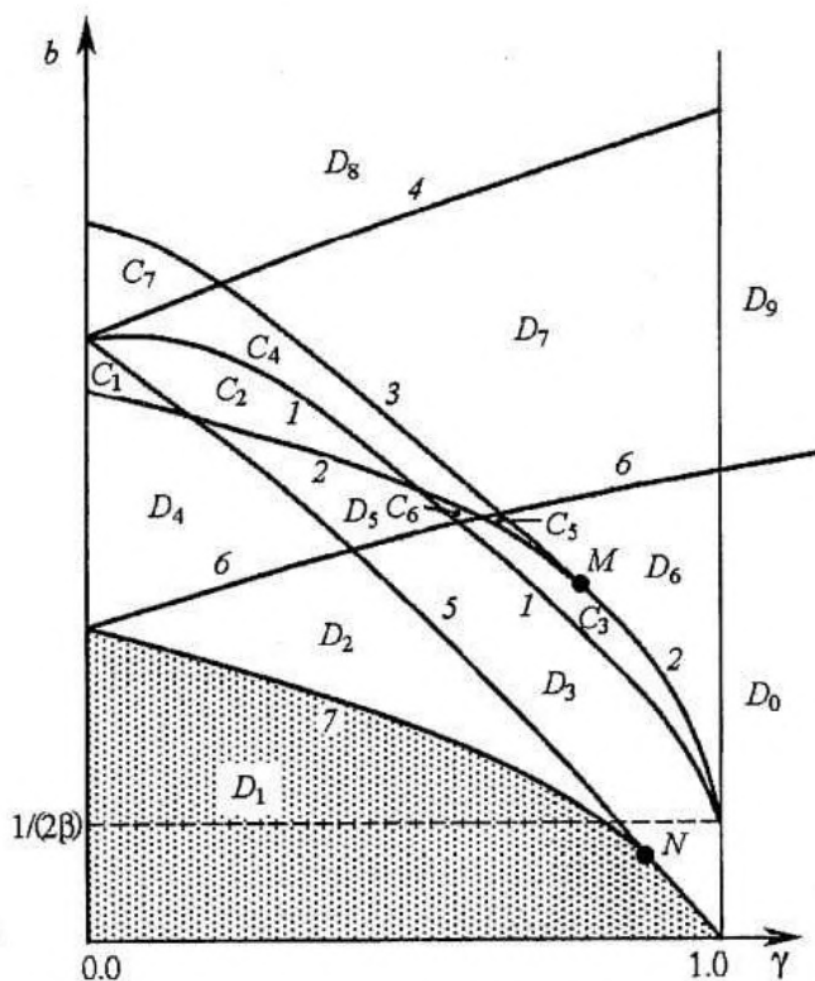


Рис. 3. Параметрический портрет модели (2) при $\lambda = 0.2$, $\beta = 4.0$

части: безопасную b_{s1} (выше точки M), где $L < 0$, и опасную b_{s2} (ниже точки M), где $L > 0$. Линия 3, исходящая из точки M , отвечает бифуркации двойного предельного цикла колебательного типа, охватывающего A_1 . При переходе с увеличением b через линию 3 происходит слияние и исчезновение предельных циклов L_0 и Γ_0 .

Линии 4 и 5 относятся к петлям сепаратрис второго рода Π и Π^+ , охватывающим фазовый цилиндр и расположенным соответственно в областях $\eta < 0$ и $\eta > 0$. Точка N на кривой 5, соответствующая $\gamma = \gamma_s = (1 - \lambda^4(2\beta b - 1)^2)^{1/2}$, отвечает обращению в ноль седловой величины σ . Петля Π^+ неустойчивая на части линии 5 выше точки N (седловая величина $\sigma > 0$) и устойчивая на части линии 5 ниже точки N ($\sigma < 0$). При пересечении с увеличением b части линии 5, соответствующей $\gamma > \gamma_s$, из петли Π^+ на фазовом цилиндре рождается устойчивый предельный цикл L_1 вращательного типа (с вращением фазы) в области $\eta > 0$. При пересечении с уменьшением b части линии 5, соответствующей $\gamma < \gamma_s$, из петли Π^+ рождается неустойчивый вращательный предельный цикл Γ_1 в области $\eta > 0$. Петля Π неустойчивая ($\sigma > 0$), при переходе через линию 4 с уменьшением b на фазовом цилиндре в области $\eta < 0$ появляется неустойчивый вращательный предельный цикл Γ_2 .

Линии 6 и 7 соответствуют двойному вращательному предельному циклу, расположенному в областях $\eta < 0$ и $\eta > 0$ на фазовом цилиндре. При переходе с увеличением b через линию 7 (через линию 6) на фазовом цилиндре появляется пара вращательных циклов в области $\eta > 0$ (в области $\eta < 0$): верхний L_1 - устойчивый и нижний Γ_1 - неустойчивый (нижний L_2 - устойчивый и верхний Γ_2 - неустойчивый). Устойчивым предельным циклам L_1 и L_2 с вращением фазы отвечают несинхронные режимы биений, когда разность фаз ϕ неограниченно нарастает, а разность частот η управляемого и опорного колебаний периодически изменяется относительно некоторого среднего значения.

Перечисленные бифуркационные кривые выделяют на плоскости (γ, b) области параметров с различным поведением системы (2). На рис. 2 и 4 приведены фазовые портреты системы для этих областей. В области D_1 система (2) не имеет предельных циклов, единственным аттрактором на фазовом цилиндре является состояние равновесия A_1 (см. рис. 2, а); для значений $(\gamma, b) \in D_1$ при любых начальных значениях ϕ и η в системе ЧФАП реализуется режим синхронизации. Для параметров из областей D_2, D_3, D_4, D_5, C_3 и C_6 режим синхронизации продолжает существовать, однако одновременно с ним существуют и асинхронные режимы, определяемые устойчивыми вращательными предельными циклами L_1 и L_2 (рис. 2, б-д, з, рис. 4, б). Для значений параметров из областей $C_1, C_2, C_4, C_5, C_7, D_6, D_7$ и D_8 режим синхронизации становится неустойчивым, в системе реализуются квазисинхронный режим, определяемый колебательным предельным циклом L_0 , и асинхронные режимы предельных циклов L_1 и L_2 (рис. 2, е, ж, и, рис. 4, а, в-е). В областях D_9 и D_0 существуют только асинхронные режимы (рис. 4, ж, з). Области притяжения стационарных режимов отделяются неустойчивыми циклами $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ и сепаратрисами седла A_2 .

Установленный параметрический портрет (γ, b) модели (2) позволяет выяснить возможные варианты поведения системы ЧФАП при увеличении параметра b . Рассмотрим их, выделяя следующие значения начальной расстройки γ : $0 < \gamma < \gamma^*$ (γ^* соответствует пересечению линий 2 и 6 на рис. 3); $\gamma^* < \gamma < \gamma^{**}$ (γ^{**} определяется пересечением линий 3 и 6); $\gamma^{**} < \gamma < \gamma^0$; $\gamma^0 < \gamma < 1$; $\gamma > 1$. В интервале $0 < \gamma < \gamma^*$ при переходе с увеличением b через границы области глобальной асимптотической устойчивости D_1 вначале возникает асинхронный режим (AP) на предельном цикле L_1 , система демонстрирует бистабильное поведение (см. рис. 2, б, в, з), когда этот режим существует одновременно с режимом синхронизации (PC). При дальнейшем увеличении b появляется еще один асинхронный режим на предельном цикле L_2 , и система становится тристабильной (см. рис. 2, г, д, рис. 4, б), затем

режим синхронизации становится неустойчивым, сменяясь квазисинхронным режимом (КР) цикла L_0 (см. рис. 2, е, ж, и, рис. 4, в), после этого происходит исчезновение квазисинхронного режима и в системе реализуется один из асинхронных режимов циклов L_1 и L_2 (см. рис. 4, д, е).

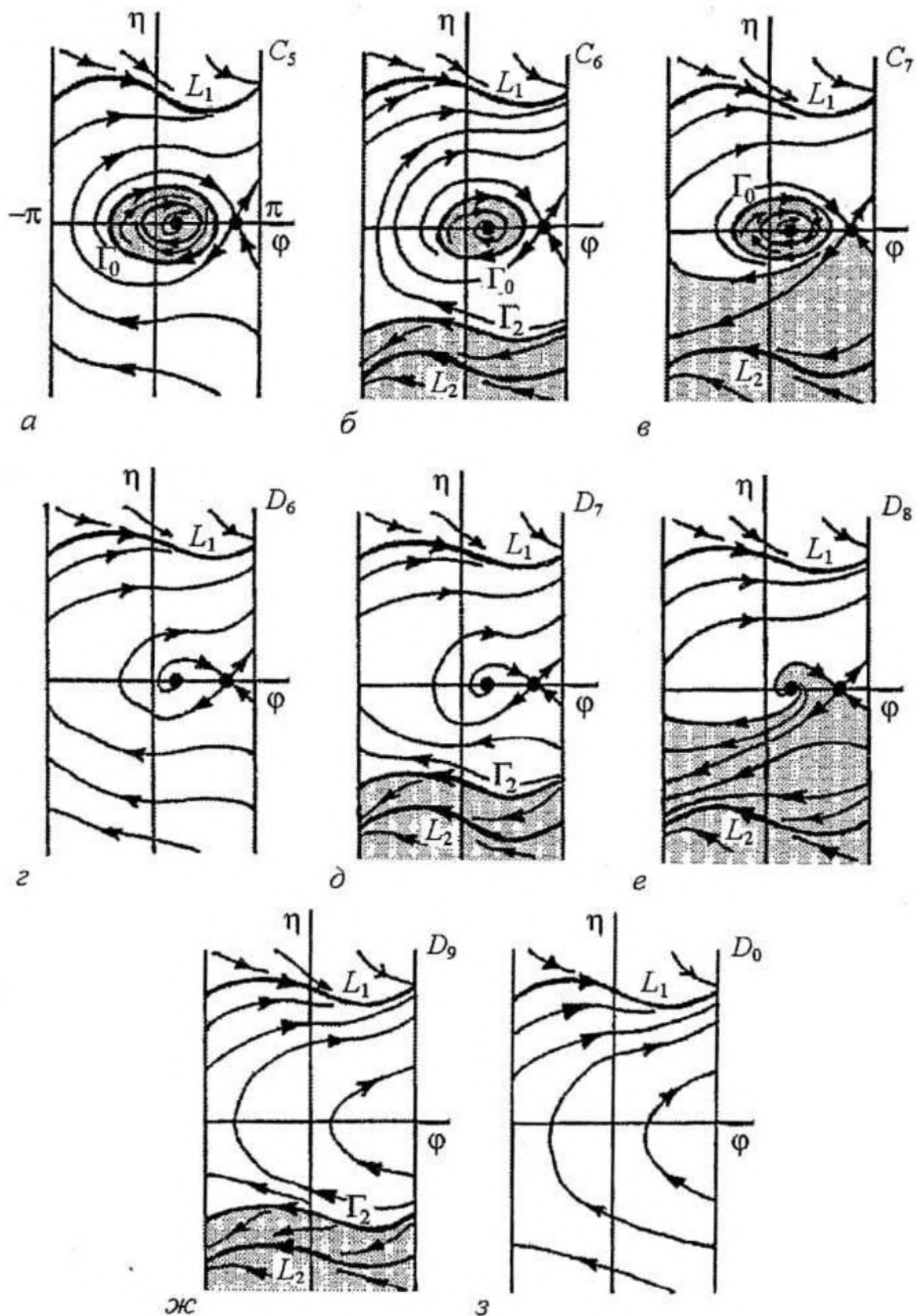


Рис. 4. Фазовые портреты модели (2) в областях C_5-C_7 , D_6-D_9 , D_0

Динамические режимы, наблюдаемые в остальных выделенных интервалах изменения γ , приведены в таблице.

Таблица

$\gamma^* < \gamma < \gamma^{**}$	$PC \rightarrow PC, AP(L_1) \rightarrow KP(L_0), AP(L_1)$ (рис. 4, а) $\rightarrow KP(L_0), AP(L_1), AP(L_2)$ (рис. 2, и) $\rightarrow AP(L_1), AP(L_2)$ (рис. 4, д, е),
$\gamma^{**} < \gamma < \gamma^0$	$PC \rightarrow PC, AP(L_1) \rightarrow KP(L_0), AP(L_1)$ (рис. 4, а) $\rightarrow AP(L_1)$ (рис. 4, з) $\rightarrow AP(L_1), AP(L_2)$ (рис. 4, д, е),
$\gamma^0 < \gamma < 1$	$PC \rightarrow PC, AP(L_1)$ (рис. 2, в, з)) $\rightarrow AP(L_1)$ (рис. 4, з) $\rightarrow AP(L_1), AP(L_2)$ (рис. 4, д, е),
$\gamma > 1$	$AP(L_1)$ (рис. 4, з) $\rightarrow AP(L_1), AP(L_2)$ (рис. 4, ж).

Таким образом, результаты, полученные при исследовании системы (2), показывают, что даже в случае простейших ФНЧ первого порядка инверсия характеристики частотного дискриминатора приводит к значительному усложнению поведения системы ЧФАП при увеличении параметра b : существенно уменьшаются область устойчивости режима синхронизации и область глобальной асимптотической устойчивости; в зависимости от значений параметров вне этих областей в системе могут реализоваться периодические автомодуляционные режимы управляемого генератора, отвечающие колебательному и вращательным предельным циклам на фазовом цилиндре U .

3. Применение фильтров более высокого порядка в цепях фазового и частотного управления ведет к усложнению динамики системы ЧФАП - наряду с регулярными становятся возможными хаотические несинхронные режимы. Рассмотрим систему в достаточно распространенном случае фильтров второго порядка, когда $K_1(p) = 1/(1+a_1p+a_2p^2)$, $K_2(p) = 1/(1+b_1p+b_2p^2)$, где a_1, a_2, b_1 и b_2 - параметры инерционности. Уравнения динамики процессов в исследуемой системе на основании (1) после перехода к безразмерному времени $\tau = \Omega_1 t$ записываем в виде

$$d\varphi/d\tau = u, \quad du/d\tau = z, \quad dz/d\tau = v, \quad dv/d\tau = w,$$

$$\begin{aligned} \mu_1 \mu_2 dw/d\tau = & \gamma - \sin\varphi + b\Phi(y) - (1 + \varepsilon_2 \cos\varphi)u - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_2 \cos\varphi - b\beta\varepsilon_1 \Phi'(y))z - \\ & - (\mu_1 + \mu_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - b\beta\mu_1 \Phi'(y))v - (\mu_1 \varepsilon_2 + \mu_2 \varepsilon_1)w + b\beta^2 \mu_1 \Phi''(y)z^2 + \mu_2 u^2 \sin\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon_1 = a_1 \Omega_1$, $\varepsilon_2 = b_1 \Omega_1$, $\mu_1 = a_2 \Omega_1^2$, $\mu_2 = b_2 \Omega_1^2$, $\Phi(y) = 2y/(1+y^2)$, $\Phi'(y) = 2(1-y^2)/(1+y^2)^2$, $\Phi''(y) = -4y(3-y^2)/(1+y^2)^3$, $y = \beta u$. Система (2) имеет цилиндрическое фазовое пространство $U_1 = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), u, z, v, w\}$.

Условия устойчивости состояния равновесия $A_1(\arcsin\gamma, 0, 0, 0, 0)$ системы (3) определяем из анализа коэффициентов характеристического уравнения

$$\lambda^5 + c_1 \lambda^4 + c_2 \lambda^3 + c_3 \lambda^2 + c_4 \lambda + c_5 = 0, \quad (4)$$

где

$$c_1 = (\mu_1 \varepsilon_2 + \mu_2 \varepsilon_1) / (\mu_1 \mu_2), \quad c_2 = (\mu_1 + \mu_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 2b\beta\mu_1) / (\mu_1 \mu_2),$$

$$c_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_2(1-\gamma^2)^{1/2} - 2b\beta\varepsilon_1) / (\mu_1 \mu_2), \quad c_4 = (1 + \varepsilon_2(1-\gamma^2)^{1/2}) / (\mu_1 \mu_2), \quad c_5 = (1-\gamma^2)^{1/2} / (\mu_1 \mu_2),$$

и записываем в виде

$$c_1 c_2 - c_3 > 0, \quad (c_1 c_2 - c_3)(c_3 c_4 - c_2 c_5) - (c_1 c_4 - c_5) > 0. \quad (5)$$

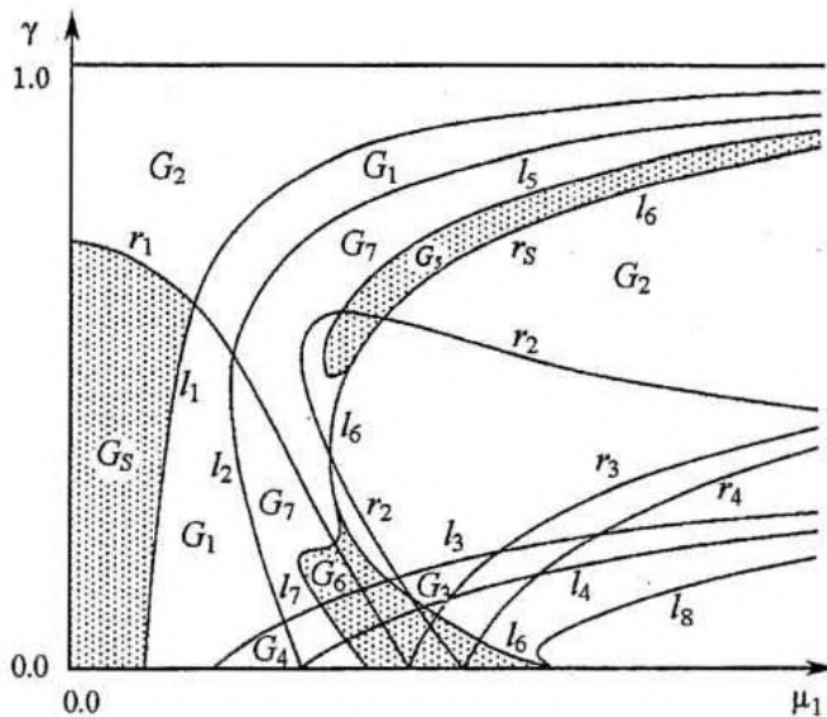


Рис. 5. Области динамических режимов модели (3) при следующих значениях параметров: $\varepsilon_1=1.0$, $\varepsilon_2=25.0$, $\beta=1.0$, $\mu_2=3.0$, $b=0.5$

Область значений параметров C_s , в которой выполняются условия (5), соответствует области существования синхронного режима.

Движения модели (3), развивающиеся в фазовом пространстве U_1 , зависят от семи параметров. Для того чтобы получить представление о возможных динамических состояниях и бифуркациях модели (3), рассмотрим в качестве управляющих параметров начальную расстройку γ и параметр инерционности μ_1 , который характеризует степень влияния фильтра подсистемы фазового управления на режимы поведения исследуемой системы. Обратимся к бифуркационным кривым (рис. 5), построенным на плоскости параметров (μ_1, γ) по результатам качественно-численного исследования модели (3) при значениях $\varepsilon_1=1.0$, $\varepsilon_2=25.0$, $\beta=1.0$, $\mu_2=3.0$, $b=0.5$. Отметим, что расположение бифуркационных линий на рис. 5 представлено лишь качественно в силу малого расстояния между некоторыми из них. На рис. 6 даны примеры (φ, u) -проекции фазовых портретов и временных реализаций, соответствующих аттракторам системы (3).

В области G_s , ограниченной частями линий l_1 и r_1 (см. рис. 5), аттрактором системы (3) в фазовом пространстве служит состояние равновесия A_1 . При значениях параметров из области G_s в системе ЧФАП при любых начальных условиях реализуется режим синхронизации. Для значений параметров вне области G_s в системе наблюдаются квазисинхронные и асинхронные режимы различной сложности. Линия l_1 соответствует границе области C_s устойчивости состояния равновесия A_1 , определяемой условиями (5); область C_s ограничена линиями l_1 , $\mu_1=0$ и $\gamma=1$. При переходе с увеличением μ_1 или с уменьшением γ через линию l_1 в системе (3) реализуется суперкритическая бифуркация Андронова - Хопфа, когда в решении характеристического уравнения (4) появляется пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью. В результате этой бифуркации в фазовом пространстве U_1 мягко рождается устойчивый предельный цикл S_1 колебательного типа (рис. 6, а), которому соответствует режим квазисинхронизации. Этот режим существует при значениях μ_1 и γ из области G_1 , заключенной между линиями l_1 и l_2 . Линия l_2 отвечает потере устойчивости цикла S_1 в результате бифуркации удвоения периода. Линия r_1 соответствует седло-

узловой бифуркации вращательного предельного цикла системы (3), расположенного в области $u > 0$ в фазовом пространстве. При переходе с увеличением μ_1 через линию r_1 у системы (3) появляется пара вращательных (2π -периодических по φ) предельных циклов в области $u > 0$: устойчивый L_3 (рис. 6, б) и седловой G_3 . Цикл L_3 существует в области параметров G_2 (между r_1 и r_2). На линии r_2 происходит бифуркация удвоения периода цикла L_3 .

Для значений параметров из области G_3 (между линиями l_3 и l_4) в фазовом пространстве системы (3) существует еще один устойчивый предельный цикл колебательного типа S_2 . При переходе через линию l_3 с увеличением γ или с

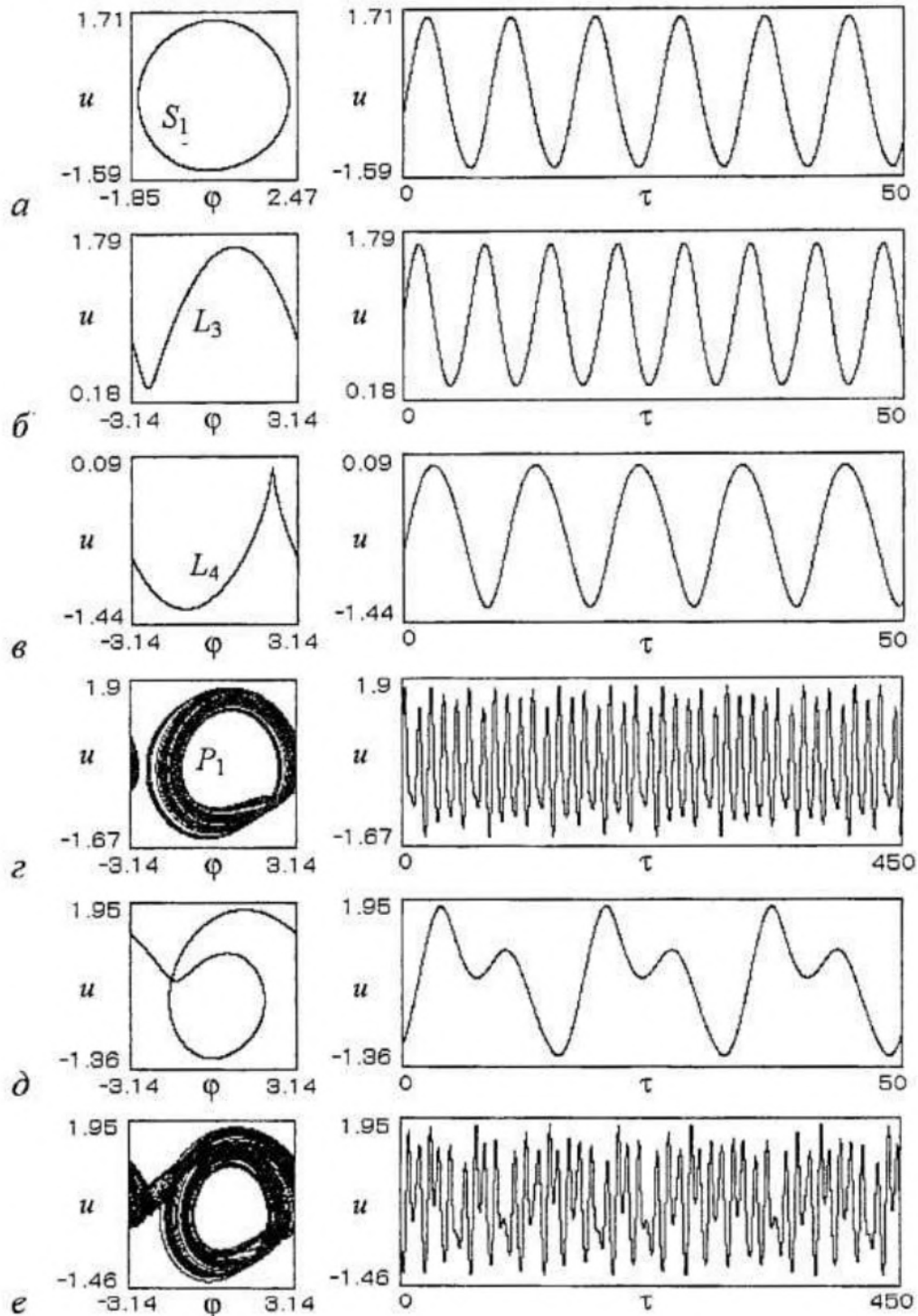


Рис. 6. Фазовые портреты аттракторов модели (3) и соответствующие им временные реализации $u(\tau)$ при значениях $\gamma=0.1, \mu_1=1.75$ (а); $\gamma=0.3, \mu_1=2.1$ (б); $\gamma=0.1, \mu_1=5.5$ (в); $\gamma=0.1, \mu_1=2.97$ (г); $\gamma=0.15, \mu_1=2.967$ (д); $\gamma=0.22, \mu_1=2.671$ (е)

уменьшением μ_1 происходит бифуркация рождения устойчивого двумерного тора из цикла S_2 , когда пара комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла S_2 пересекает единичную окружность. Как показало численное исследование системы (3), этот тор быстро разрушается при удалении от линии l_3 , при этом система жестко переходит к режиму хаотического аттрактора колебательно-вращательного типа. Для колебаний на таком аттракторе характерно чередование вращательных движений и движений вокруг состояния равновесия A_1 . Линия l_4 отвечает бифуркации удвоения периода цикла S_2 . В области $G_4 = G_1 \cap G_3$, ограниченной частями линий l_2, l_3 и $\gamma=0$, в фазовом пространстве одновременно существуют устойчивые предельные циклы S_1 и S_2 . Какой из режимов периодической автомодуляции установится при этом в системе ЧФАП - это зависит от начальных условий.

Линия r_3 соответствует седло-узловой бифуркации вращательного предельного цикла системы (3), расположенного в области $u < 0$ в фазовом пространстве. При переходе с увеличением μ_1 через линию r_3 в области $u < 0$ появляются устойчивый L_4 (рис. 6, в) и седловой Γ_4 вращательные предельные циклы. На линии r_4 происходит бифуркация удвоения периода цикла L_4 .

Для того чтобы получить более полное представление о динамике модели (3), проследим за развитием режимов циклов S_1, S_2, L_3 и L_4 при увеличении параметра μ_1 . Как показало численное исследование системы (3), преобразование режима цикла S_1 (см. рис. 6, а) при удалении от линии l_1 происходит по разным сценариям в зависимости от величины расстройки γ . При значениях $\gamma > 0.475$ и $0 \leq \gamma < 0.23$ с возрастанием μ_1 наблюдаются бифуркации удвоения периода цикла S_1 , которые завершаются образованием в фазовом пространстве хаотического аттрактора P_1 колебательного типа (рис. 6, з). Режим аттрактора P_1 существует при значениях параметров из областей G_5 (между линией l_5 и частью линии l_6 , соответствующей $\gamma > 0.475$) и G_6 (между линией l_7 , частью линии l_6 , соответствующей значениям $0 \leq \gamma < 0.23$, и частью линии $\gamma=0$) (см. рис. 5). В этом режиме имеют место хаотические автомодуляционные колебания относительно неустойчивого состояния равновесия A_1 . В интервале $0.23 < \gamma < 0.475$ при увеличении μ_1 реализуются прямые и обратные бифуркации удвоения периода цикла S_1 , хаотические колебания на базе этого цикла не возникают. Таким образом, в области параметров G_7 (между линиями l_2, l_5, l_7 , частью линии l_6 , соответствующей значениям $0.23 < \gamma < 0.475$, и частью линии l_3) существуют сложные квазисинхронные режимы на многооборотных колебательных предельных циклах, развивающихся на базе цикла S_1 . При переходе с увеличением μ_1 из областей G_5, G_6 и G_7 через линию l_6 происходит прекращение квазисинхронных режимов и переход системы к асинхронным режимам предельных циклов (рис. 6, д) или хаотических аттракторов (рис. 6, е) вращательного или колебательно-вращательного типа.

Исследование поведения предельного цикла S_2 показало, что при движении на плоскости (μ_1, γ) с изменением μ_1 от линии l_3 к линии l_8 на базе цикла S_2 в фазовом пространстве формируется хаотический аттрактор P_2 колебательного типа в результате бифуркаций удвоения периода. Затем режим аттрактора P_2 либо мягко преобразуется в режим цикла S_2 через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения, либо прерывается асинхронными режимами. Численное исследование системы (3) обнаружило существование в области параметров между линиями l_4 и l_8 других колебательных предельных циклов, соответствующих квазисинхронным режимам системы ЧФАП. Линия l_8 соответствует прекращению квазисинхронных режимов (при пересечении этой линии с увеличением μ_1 или с уменьшением γ) и переходу к периодическим или хаотическим асинхронным режимам.

На рис. 7, а приведена бифуркационная диаграмма $\{\mu_1, u\}$ точечного отображения плоскости $\varphi = \varphi^0$ в плоскость $\varphi = \varphi^0 + 2\pi$, порождаемого траекториями

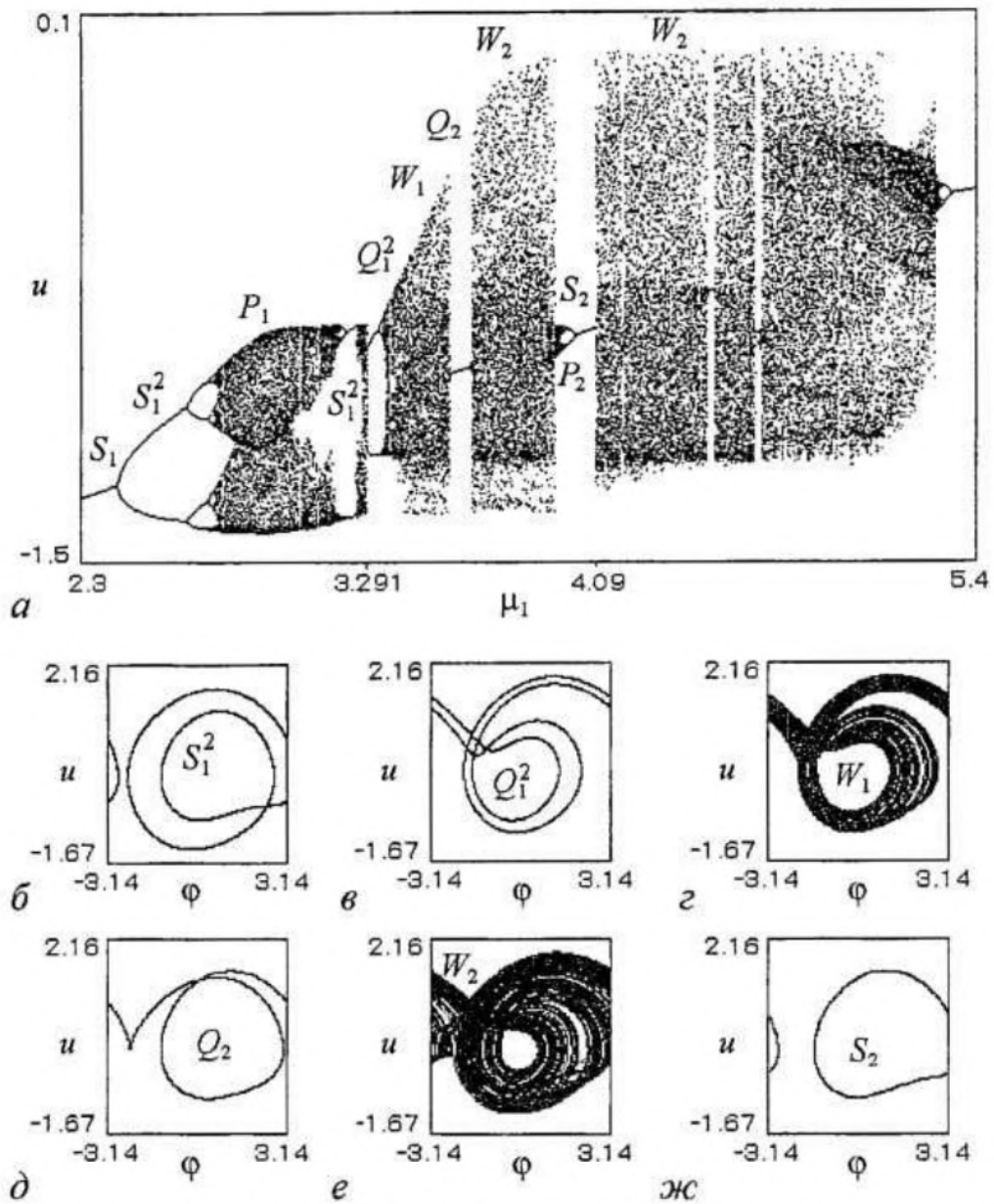


Рис. 7. Эволюция квазисинхронного режима предельного цикла S_1 с увеличением μ_1 при $\gamma=0.1$ (а) и фазовые портреты аттракторов модели (3) при следующих значениях μ_1 : б - 3.25; в - 3.3; г - 3.4; д - 3.6; е - 3.7; ж - 4.05

системы (3), построенная при $\gamma=0.1$. Эта диаграмма показывает характер эволюции режима предельного цикла S_1 при изменении μ_1 от 2.3 до 5.4. На ней можно выделить следующие три области: $M_1=\{2.3<\mu_1<3.291\}$, $M_2=\{3.291<\mu_1<4.09\}$ и $M_3=\{4.09<\mu_1<5.4\}$. В области M_1 динамика системы связана с преобразованием режима цикла S_1 (см. рис. 6, а) в режим хаотического аттрактора P_1 (см. рис. 6, з), мягким переходом от аттрактора P_1 к двухоборотному колебательному предельному циклу S_1^2 (рис. 7, б), жестким переходом от цикла S_1^2 к колебательному хаотическому аттрактору. При переходе в область M_2 хаотические колебания прекращаются, система переходит к асинхронному режиму двухоборотного (4π -периодического по φ) вращательного предельного цикла Q_1^2 (рис. 7, в). В области M_2 с увеличением μ_1 вначале режим цикла Q_1^2 преобразуется в асинхронный режим вращательного хаотического аттрактора W_1 (рис. 7, г) через бифуркации удвоения периода, далее наблюдается чередование режимов вращательного предельного цикла Q_2 (рис. 7, д) и колебательно-вращательного хаотического аттрактора W_2 (рис. 7, е), а затем происходит жесткий переход к режиму хаотического аттрактора P_2 колебательного типа, который с увеличением μ_1 мягко преобразуется в режим колебательного предельного цикла S_2 (рис. 7, ж).

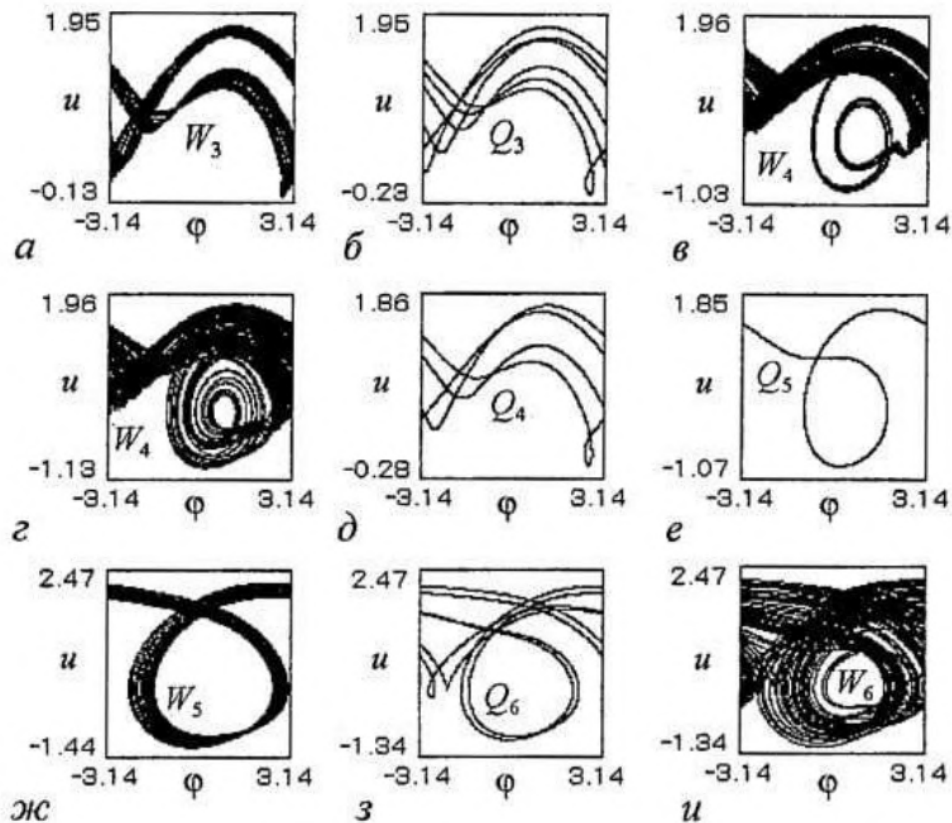


Рис. 8. Фазовые портреты, соответствующие аттракторам модели (3) при $\gamma=0.4$ для различных значений μ_1 : а - 2.82; б - 2.9; в - 3.0; г - 3.15; д - 3.08; е - 3.4; ж - 5.39; з - 5.6; и - 5.85

При переходе в область M_3 квазисинхронный режим цикла S_2 жестко сменяется асинхронным режимом хаотического аттрактора W_2 . Этот режим поддерживается в системе для большей части области M_3 , при $\mu_1 > 5.318$ происходит мягкий переход к периодическому асинхронному режиму (см. рис. 6, д).

Бифуркационная диаграмма, приведенная на рис. 7, а, дает представление о динамических состояниях, через которые проходит система (3) при увеличении μ_1 для значений γ из интервалов $0 \leq \gamma < 0.23$ и $\gamma > 0.475$. Отметим особенности эволюции режима предельного цикла S_1 при увеличении μ_1 для значений γ из интервала $0.23 < \gamma < 0.475$, выясненные в случае $\gamma=0.4$. Вначале цикл S_1 претерпевает две бифуркации удвоения периода, затем - бифуркацию, обратную удвоению с образованием двухоборотного предельного цикла S_1^2 . Далее цикл S_1^2 исчезает в результате седло-узловой бифуркации и система переходит к другому колебательному предельному циклу, при исчезновении которого наблюдается жесткий переход к колебательно-вращательному хаотическому аттрактору с редкими витками вращательных движений. С увеличением μ_1 происходит чередование хаотических и периодических колебательно-вращательных аттракторов такого типа, а затем при $\mu_1 > 2.375$ - жесткий переход к двухоборотному вращательному предельному циклу L_3^2 , который образуется в результате бифуркации удвоения периода предельного цикла L_3 (см. рис. 6, б).

Численное исследование эволюции вращательного предельного цикла L_3 показывает, что при продвижении с изменением μ_1 и γ внутрь области, ограниченной линией r_2 (см. рис. 5), на базе этого цикла через бифуркации удвоения в фазовом пространстве формируется вращательный хаотический аттрактор W_3 (рис. 8, а). На рис. 9 также приведены бифуркационные диаграммы $\{\mu_1, u\}$, которые отражают процессы преобразования асинхронного режима предельного цикла L_3^2 при изменении μ_1 от 2.6 до 6.1. Из этих диаграмм видно, что область существования хаотического аттрактора W_3 прерывается областью шестиоборотного (12π -периодического по ϕ) предельного цикла Q_3 (рис. 8, б). С

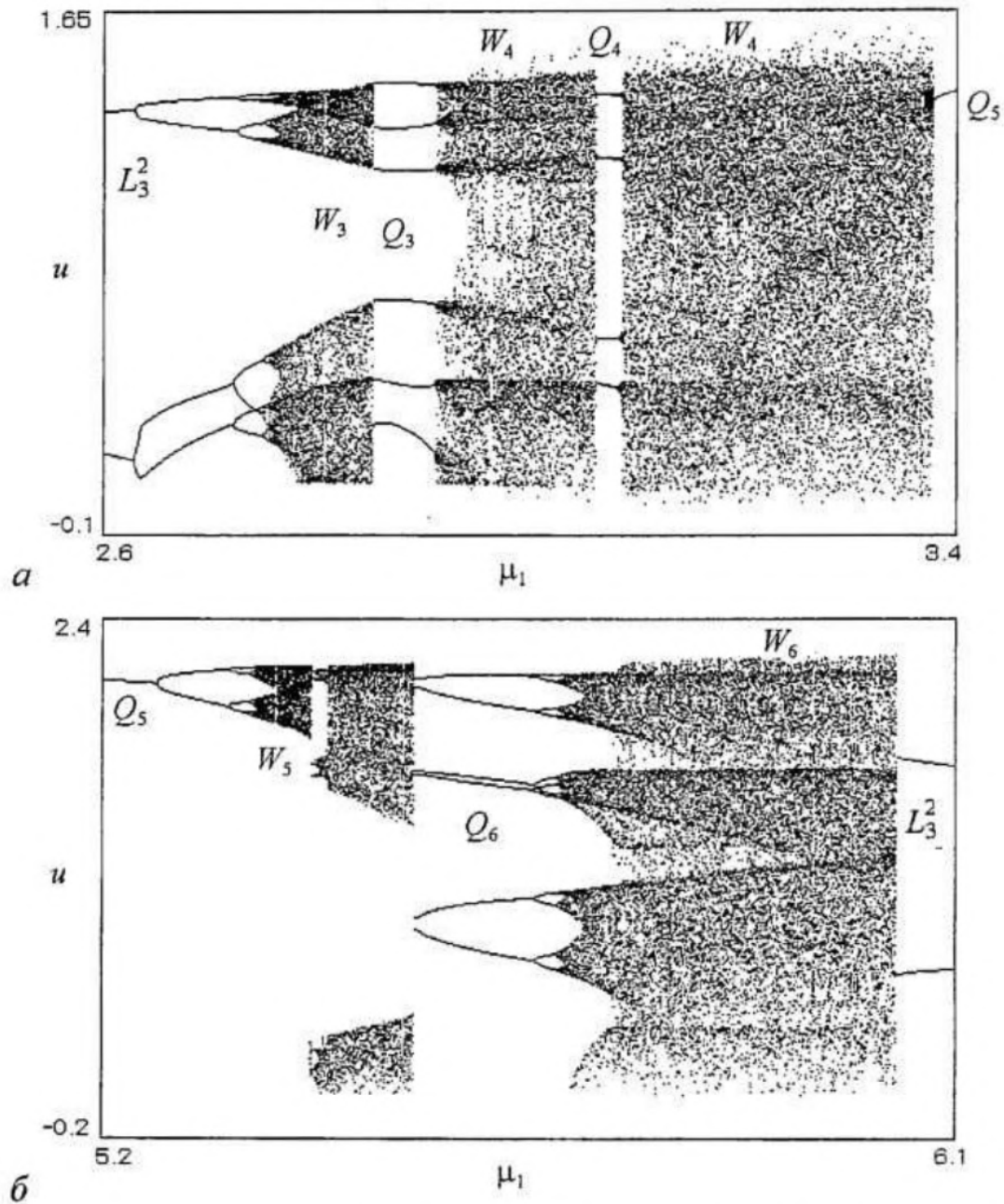


Рис. 9. Эволюция асинхронного режима предельного цикла L_3^2 при $\gamma=0.4$ и увеличении μ_1 . При увеличении μ_1 в структуре аттрактора W_3 появляются редкие витки фазовых траекторий, соответствующих колебательным движениям относительно состояния равновесия A_1 (рис. 8, в), частота появления и число которых затем увеличиваются, что приводит к формированию хаотического аттрактора колебательно-вращательного типа W_4 (рис. 8, з). Режим колебаний на аттракторе W_4 представляет собой чередование движений на аттракторе W_3 и колебательных движений относительно состояния равновесия A_1 .

Область существования аттрактора W_4 прерывается «окном» четырехоборотного (8π -периодического по φ) предельного цикла Q_4 (рис. 8, д). При $\mu_1 > 3.377$ хаотические колебания на аттракторе W_4 прекращаются, жестко сменяясь асинхронным периодическим режимом вращательного предельного цикла Q_5 (рис. 8, е). При увеличении μ_1 на базе цикла Q_5 образуется вращательный хаотический аттрактор W_5 (рис. 8, ж). Режим аттрактора W_5 жестко сменяется режимом шестиоборотного колебательно-вращательного предельного цикла Q_6 (рис. 8, з), который затем преобразуется через бифуркации удвоения периода в режим колебательно-вращательного хаотического аттрактора W_6 (рис. 8, и). При

переходе через значение $\mu_1=6.036$ происходит возвращение системы к асинхронному режиму предельного цикла L_3^2 , который далее при увеличении μ_1 мягко преобразуется в режим цикла L_3 (см. рис. 6, б).

Результаты исследования эволюции режима вращательного предельного цикла L_4 (см. рис. 6, в) при изменении параметров μ_1 и γ показывают, что при удалении с уменьшением γ или с увеличением μ_1 от линии r_4 на базе цикла L_4 в фазовом пространстве в области $u < 0$ образуется режим вращательного хаотического аттрактора, существующий в узкой области в окрестности линии r_4 , который затем разрушается и система переходит к асинхронному режиму колебательно-вращательного типа.

Из полученных результатов следует, что для области значений параметров μ_1 и γ , расположенной на плоскости (μ_1, γ) справа от линии l_6 (см. рис. 5), в фазовом пространстве реализуются разнообразные периодические и хаотические аттракторы системы (3) колебательного, вращательного и колебательно-вращательного типов, определяющие характер автомодуляции частоты управляемого генератора в несинхронных режимах системы ЧФАП. Это указывает на неоднородную структуру этой области, содержащей подобласти регулярных и хаотических автомодуляционных режимов.

4. В данной работе в рамках динамических моделей (1) и (3) с одной и двумя с половиной степенями свободы проведено исследование различных режимов колебаний в автогенераторной системе с комбинированным частотно-фазовым управлением при инверсии нелинейной характеристики частотного дискриминатора. Проведенный на основе моделей (1) и (3) цикл вычислительных экспериментов позволил выяснить возможность реализации в такой системе режима синхронизации при том, что в однокольцевой системе с инверсной петлей частотного управления режим автоподстройки невозможен. Область существования режима синхронизации уменьшается при возрастании параметра b , характеризующего степень влияния петли частотного управления.

Динамика системы ЧФАП оказывается достаточно сложной и разнообразной даже в простейшем случае фильтров первого порядка в цепях управления. Установлено, что в зависимости от значений параметров модели (1) могут существовать семнадцать качественно различных типов фазового портрета движений, соответствующих выделенным областям на параметрическом портрете (см. рис. 3) и отличающихся числом и расположением предельных циклов на цилиндрической фазовой поверхности. Следовательно, с применением инверсной петли частотного управления в системе ЧФАП удастся реализовать, наряду с режимом синхронизации, квазисинхронный и асинхронные режимы. На рис. 3 выделены области, позволяющие установить, при каких значениях параметров b и γ в системе реализуется моногармонический режим и периодические автомодуляционные режимы управляемого генератора. Выяснены сценарии динамики системы при изменении параметра b .

Применение фильтров второго порядка ведет к усложнению динамики системы ЧФАП - наряду с режимом синхронизации и периодическими несинхронными режимами становятся возможными сложнопериодические и хаотические квазисинхронные и асинхронные режимы. Для модели (3) такой системы определены области параметров с различными режимами управляемого генератора. Из полученных результатов следует, что если выбрать значения параметров, соответствующие хаотическим аттракторам модели (3), то систему ЧФАП можно рассматривать как генератор хаотических колебаний. При этом может быть обеспечен достаточно богатый набор хаотических режимов,

соответствующих колебательным, вращательным и колебательно-вращательным хаотическим аттракторам в фазовом пространстве.

Работа выполнена при поддержке Научной программы «Университеты России» (проект УР.03.01.027) и РФФИ (проект № 02-02-17573).

Библиографический список

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
2. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.
3. Тузов Г.И. Выделение и обработка информации в доплеровских системах. М.: Сов. радио, 1967.
4. Матросов В.В. Регулярные и хаотические колебания фазовой системы // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 4. С. 4.
5. Шалфеев В.Д., Матросов В.В., Корзинова М.В. Динамический хаос в ансамблях связанных фазовых систем // Зарубежная радиоэлектроника. 1998. № 11. С. 44.
6. Пономаренко В.П., Заулин И.А. Динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 828.
7. Пономаренко В.П. Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 5. С. 44.
8. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Самоорганизация временных структур в мультиравновесной автогенераторной системе с частотным управлением // ЖТФ. 1997. Т. 67, № 3. С. 1.
9. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с комбинированным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 9. С. 1125.
10. Пономаренко В.П. Формирование сложных колебаний в автогенераторной системе с нелинейной цепью частотного управления // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 5. С. 565.
11. Капранов М.В. О полосе захвата при частотно-фазовой автоподстройке // Научн. докл. высш. школы. Сер. «Радиотехника и электроника». 1958. Т. 2, № 9. С.162.
12. Белюстина Л.Н., Шалфеев В.Д. К теории нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Известия вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 3. С.383.
13. Пономаренко В.П., Шалфеев В.Д. Нелинейная система частотно-фазовой автоподстройки частоты с широкой полосой захвата // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 11. С. 1694.
14. Шалфеев В.Д. Исследование системы частотно-фазовой автоподстройки частоты при одинаковых фильтрах в фазовой и частотной цепях // Известия вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12, № 7. С.1037.
15. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984.
16. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белюстиной. М: Радио и связь, 1982.

*НИИ прикладной математики и
кибернетики РАН, Нижний Новгород*

*Поступила в редакцию 17.07.03
после доработки 13.11.03*

DYNAMICS OF A PHASE-FREQUENCY-FEEDBACK OSCILLATOR WITH AN INVERTED FREQUENCY DISCRIMINATOR CHARACTERISTIC

V.P. Ponomarenko, E.A. Tikhonov

We consider dynamical states and bifurcations of a phase-frequency-feedback oscillator models with an inverted frequency discriminator characteristic. On the basis of qualitative-numerical analysis, we found the parameter regions corresponding to monoharmonic, periodic and chaotic automodulation regimes of controlled oscillator. Scenarios of development of automodulation regimes under variation of the models parameters are established. The results are presented in the form of one- and two-parameter bifurcation diagrams and phase portraits of attractors.



Пономаренко Валерий Павлович родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский государственный университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года - заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Соавтор коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.

E-mail: rovvp@uic.nnov.ru



Тихонов Евгений Александрович - родился в Горьком (1980). Окончил факультет Вычислительной математики и кибернетики ННГУ им. Н.И. Лобачевского (2002). На данный момент является аспирантом факультета Вычислительной математики и кибернетики ННГУ по специальности «математическое моделирование, численные методы и вычислительные системы». Область интересов - нелинейная динамика, математическое моделирование и вычислительные системы. Автор 3 опубликованных работ.