



## СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ВОЗБУДИМОЙ СИСТЕМЫ В ОБЛАСТИ ПОДПОРОГОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

*Д.Э. Постнов, А.В. Шишкин, Д.В. Сецинский*

Методами как численного, так и радиофизического эксперимента мы исследуем поведение релаксационного осциллятора под воздействием аддитивного шума в области параметров, соответствующей переходу от возбудимого режима к непрерывной генерации. Наличие в указанной области подпороговых колебаний порождает специфический отклик системы на шумовое воздействие. В частности, нами выявлены эффекты стабилизации частоты и частичного подавления индуцированных шумом надпороговых колебаний.

### Введение

В последние годы индуцированные шумом эффекты в нелинейных системах являются одним из важных направлений исследований. В частности, детально изучена упорядочивающая роль шума при таких эффектах, как стохастический резонанс [1], или когерентный резонанс [2]. Попутно стал очевиден факт, что действие шума на нелинейную систему может породить новый временной масштаб - индуцированные шумом колебания, частота которых, как правило, связана со средним временем преодоления некоторого порога. В частности, на балансе случайного (управляемого шумом) времени активации и детерминированного времени возврата в устойчивое состояние основан один из механизмов когерентного резонанса в возбудимой системе [3]. Наличие управляемого шумом временного масштаба играет принципиальную роль в явлении стохастической синхронизации [4]. В частности, при определенных условиях, синхронизация индуцированных шумом колебаний подчиняется соотношениям, давно известным для детерминированных автоколебаний [5], а вариация интенсивности шума качественно эквивалентна изменению параметра расстройки по частоте.

Однако круг ситуаций, где управляемые шумом временные масштабы играют принципиальную роль, исследован далеко не полностью. Предметом нашего исследования в данной работе являются особенности воздействия шума на специфический колебательный режим, характерный, в частности, для математических моделей нейронов и известный как *sansard*-колебания [6,7]. Слово «*sansard*» по-французски означает «утка» и отражает характерную форму предельного цикла при переходе от подпороговых к надпороговым колебаниям.

Термином *canard explosion* обозначают участок аномально быстрого (взрывообразного) роста амплитуды колебаний при вариации управляющего параметра в малой закритической окрестности бифуркации Андронова - Хопфа. Для целей нашего исследования мы реализуем режим *canard*-колебаний в модели нейрона FitzHugh - Nagumo, которая является одним из широко известных и популярных вариантов упрощения уравнений Ходжкина - Хаксли для участка аксона нейрона [8,9]. Ее простота, а также возможность моделировать как возбудимый, так и автоколебательный режимы, обусловили ее использование как модельной системы для многих задач. В частности, в [3] для этой модели в возбудимом режиме был продемонстрирован эффект когерентного резонанса. Недавно было также установлено, что этот эффект сохраняется и в режиме *canard*-колебаний [10]. Отмечалось, что в режиме максимальной когерентности индуцированных шумом колебаний временные интервалы при генерации спайков характеризуются многомодовым распределением, максимумы которого «привязаны» к периоду подпороговых колебаний. Однако, частотные соотношения, равно как и детали механизма действия флуктуаций на такой режим автоколебательной системы не были исследованы. Кроме того, в работе [10] исходная модель FitzHugh - Nagumo была существенно модифицирована.

В настоящей работе исследуются особенности действия шума на динамику модели FitzHugh - Nagumo как в ее классической форме, так и в варианте с кусочно-линейной характеристикой, который более удобен для реализации в эксперименте. Особое внимание уделено частотным соотношениям. Иными словами, рассматривается поведение этой модели с точки зрения стохастической синхронизации между подпороговыми колебаниями и индуцированными шумом spikes-импульсами большой амплитуды, соответствующими надпороговым колебаниям.

## 2. Численное моделирование стохастической динамики модели FitzHugh - Nagumo в режиме *canard*-колебаний

### 2.1. Уравнения модели и особенности ее динамики в отсутствие шума.

В нашей работе для численного моделирования мы используем модель FitzHugh - Nagumo в форме

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= x - x^3/3 - y, \\ \dot{y} &= x + a + D\xi(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $x$  и  $y$  - переменные, качественно соответствующие трансмембранному напряжению и переменной активации ионного тока, соответственно;  $\varepsilon$  - параметр соотношения временных масштабов, характеризующий относительную скорость изменения ионного тока;  $a$  - управляющий параметр, ответственный за порог возбуждения;  $D$  - интенсивность белого гауссова шума  $\xi(t)$  с нулевым средним значением,  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ .

В детерминированном режиме (при  $D=0$ ) значениям  $a > 1.0$  соответствует возбудимый режим, а значениям  $a < 1.0$  - автоколебательная динамика (предельный цикл), возникающая (при уменьшении  $a$ ) через суперкритическую бифуркацию Андронова - Хопфа. Однако развитие предельного цикла в системе (1) имеет особенность, известную как *canard explosion* [7]. А именно, при достижении бифуркационного значения  $a^* = 1.0$  рождается предельный цикл малого радиуса и в малой окрестности  $a^*$  его размеры растут пропорционально  $|a - a^*|^{1/2}$ . При дальнейшем уменьшении  $a$ , амплитуда предельного цикла скачкообразно растет до значений, определяемых геометрией

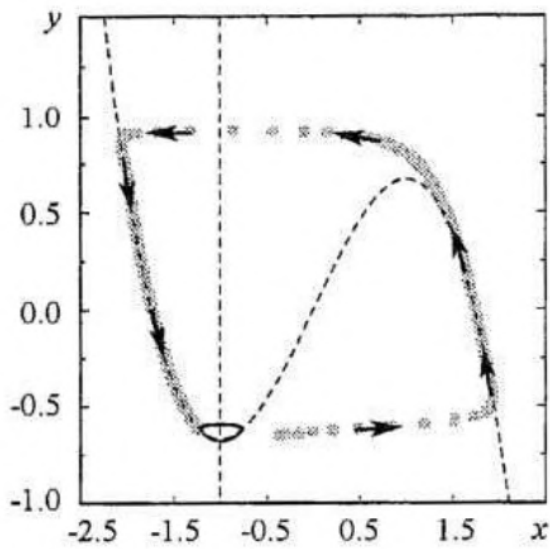


Рис. 1. Фазовый портрет модели (1) при  $a=0.996$  и  $\epsilon=0.024$ . Штриховой линией показаны  $x$ -нуль-клина (И-образная кривая  $y=x-x^3/3$ ) и  $y$ -нуль-клина (вертикальная линия  $x=-a$ )

$x$ -нульклина  $y=x-x^3/3$  и значением параметра  $\epsilon$ . Такой взрывообразный рост амплитуды предельного цикла при плавном уменьшении  $a$  и получил название *canard explosion*. Для рассматриваемой модели (1) он наблюдается в области значений параметров  $\epsilon \in [0.02, 0.03]$  и  $a \in [0.996, 1.00]$ . На рис. 1 приведен типичный фазовый портрет для (1), включающий предельный цикл подпороговых колебаний малого размера и траекторию возврата к нему (серые точки со стрелками) после «выброса» системы в возбужденное состояние. Пунктиром на рисунке даны  $x$ - и  $y$ -нульклина, взаиморасположение которых и обуславливает динамику системы.

## 2.2. Общий анализ поведения системы под воздействием флуктуаций.

При наличии в правой части второго уравнения шумовой добавки  $D\xi(t)$  система уравнений (1) решалась численно методом Рунге - Кутты 4 порядка, адаптированным для стохастических дифференциальных уравнений [11]. Выбор достаточно малой величины шага интегрирования  $h=0.0005$  обеспечивал практическую независимость результатов вычислений от  $h$ . Сам случайный процесс  $\xi(t)$  был получен с помощью специальных алгоритмов преобразования равномерно распределенной случайной величины в распределенную по нормальному закону [12]. Равномерная случайная величина генерировалась датчиком случайных чисел компьютера. Полученная в результате интегрирования достаточно длинная временная реализация использовалась для расчета частоты следования импульсов, распределения временных интервалов между ними, а также распределения относительного времени пребывания системы на фазовой плоскости, которое с использованием свойства эргодичности считалось эквивалентным распределению плотности вероятности.

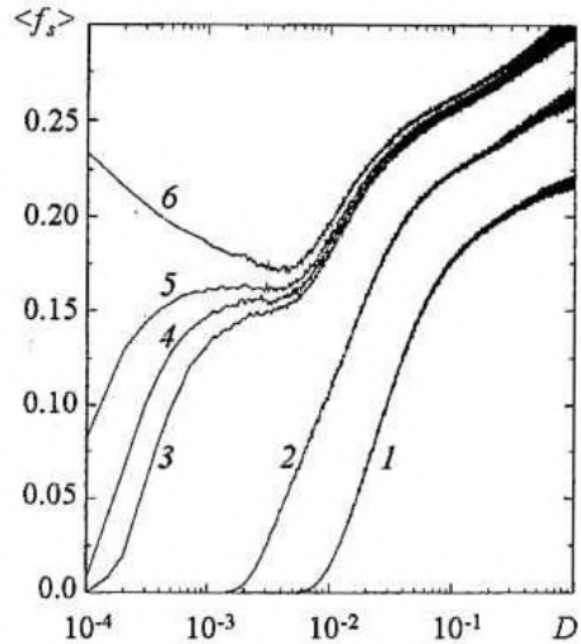
Варьируя интенсивность шума  $D$ , мы рассчитывали среднюю частоту следования спайков (импульсов большой амплитуды), момент генерации каждого из которых определялся по достижению возбужденного состояния  $x=+1.0$ . Средняя частота  $\langle f_s \rangle$  определялась как

$$\langle f_s \rangle = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} N/T_0, \quad (2)$$

где  $T_0$  - время наблюдения,  $N$  - число спайков в течение  $T_0$ . В численном эксперименте  $T_0$  выбиралось достаточным для достижения заранее заданного  $N$ , например,  $N=10^4$ . Параметр  $a=0.997$  был выбран близким к бифуркации Андронова - Хопфа в области автоколебаний. Параметр  $\epsilon$  варьировался от 0.024 до 0.1, чему соответствовал переход от режима непрерывной генерации спайков к режиму устойчивых подпороговых колебаний малой амплитуды. Результаты вычисления  $\langle f_s \rangle$  приведены на рис. 2. Для  $\epsilon$ , равного 0.1 и 0.05 (кривые 1 и 2), начальная часть графика для  $\langle f_s \rangle$  носит экспоненциальный характер, качественно соответствуя закону Арениуса [13]. Однако для больших  $D$  кривые сходятся к некоторому предельному значению, определяемому длительностью одиночного цикла «возбуждение - релаксация» детерминированной модели (1).

При меньших значениях  $\epsilon$  (кривые 3, 4, 5) характер зависимости су-

Рис. 2. Зависимость средней частоты генерации индуцированных шумом спайков  $\langle f_s \rangle$  от интенсивности шума  $D$  для  $a=0.997$  и при различных значениях  $\epsilon$ : 1 - 0.1, 2 - 0.05, 3 - 0.028, 4 - 0.027, 5 - 0.0264, 6 - 0.024



щественно меняется. Быстрый рост  $\langle f_s \rangle$  при малых  $D < 0.001$  сменяется почти постоянным значением  $\langle f_s \rangle$  в интервале  $D \in [0.001, 0.05]$ . При  $D$  больших  $\langle f_s \rangle$  вновь растет, демонстрируя поведение, сходное с кривыми 1 и 2.

Еще более неожиданно система (1) ведет себя при наименьшем  $\epsilon$  (кривая 6). В детерминированном варианте этому значению  $\epsilon$  соответствует режим непрерывной генерации спайков. Однако добавление шума (рост  $D$ ) приводит к быстрому уменьшению средней частоты генерации  $\langle f_s \rangle$  до значений, близких к положению «полочки» на кривых 3, 4 и 5. При дальнейшем увеличении интенсивности шума  $\langle f_s \rangle$  вновь растет, сближаясь с кривой 5.

**2.3. Механизм аномального изменения частоты индуцированных шумом колебаний.** Обнаруженные эффекты стабилизации частоты индуцированных шумом колебаний (кривые 3, 4, 5) и стохастического подавления генерации спайков (кривая 6) требуют объяснения с точки зрения активации шумом нелинейных свойств модели (1). Ниже мы попытаемся дать такое объяснение. Рассмотрим сначала режим подпороговых колебаний при  $\epsilon = 0.026$ . Само наличие таких колебаний, при условии наличия «траектории возбуждения» на фазовой плоскости (см. рис. 1), означает автомодуляцию высоты порога, который должен быть преодолен для генерации спайка. Поэтому, возбуждение системы с подавляющей вероятностью происходит в моменты, когда фаза подпороговых колебаний такова, что порог возбуждения для спайка наименьший. Отсюда следует характерная структура распределения временных интервалов между соседними спайками, хорошо видная на рис. 3. Отметим, что интервал времени между соседними спайками не может быть меньше, чем время движения по траектории возбуждения. По этой причине, в частности, на рис. 3 отсутствует максимум, соответствующий одному периоду подпороговых колебаний.

При малых значениях интенсивности шума  $D$  значения шумового сигнала  $D\xi(t)$  достаточно редко достигают порога. Траектория успевает несколько раз совершить оборот по малому предельному циклу canard-режима. Поэтому на рис. 3 хорошо различимы максимумы, соответствующие 5-7 периодам обращения на предельном цикле. При увеличении  $D$  относительно более вероятным становится возбуждение на 2, 3 и 4 обороте. Помимо этого, все распределение смещается в область меньших значений. Как показывают расчеты, при  $D = 0.0015$  около 45% всех интервалов сосредоточено в первом максимуме распределения, что соответствует достижению «полочки» на кривой 5 рис. 2. То есть, около половины всех спайков генерируются на временах порядка  $T_{\text{spike}} + T_{\text{canard}}$ , а еще 20-25% на временах  $T_{\text{spike}} + 2T_{\text{canard}}$  и  $T_{\text{spike}} + 3T_{\text{canard}}$ . Средняя частота, определяемая этими событиями,  $\langle f_s \rangle \approx 1/5 T_{\text{canard}}$ , что и соответствует полочке на кривых 3, 4, 5 рис. 2.

При дальнейшем росте интенсивности шума  $D$  возбуждение становится возможным в любой момент времени, так как модуляция порога за счет canard-колебаний становится мала по сравнению со средним значением действующего

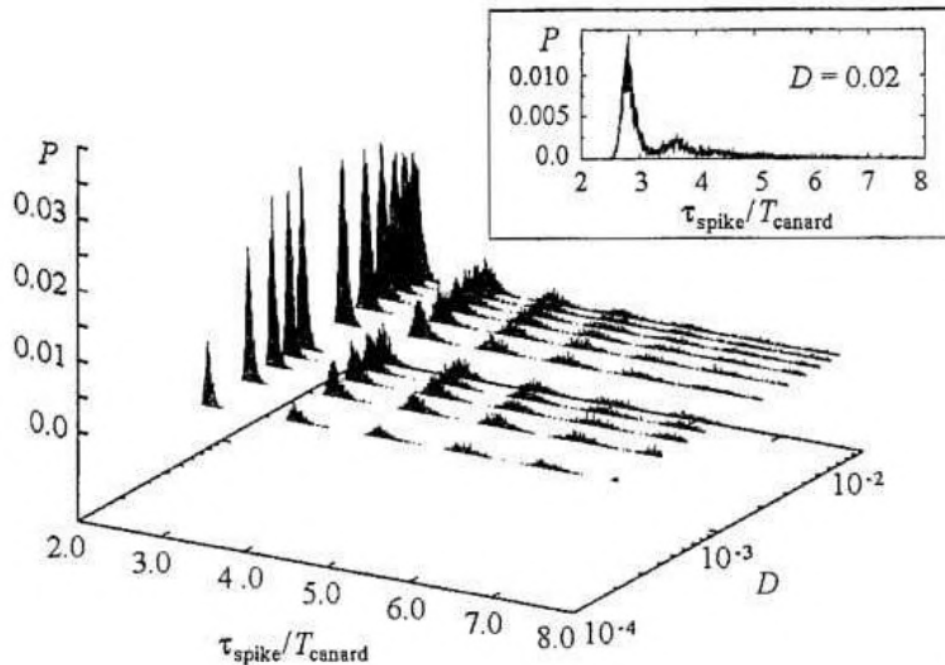


Рис. 3. Распределение межспайковых интервалов времени  $\tau_{spike}$  нормированное на период подпороговых колебаний для различных значений интенсивности шума  $D$

шума (см. вставку для  $D=0.02$  на рис. 3). Как результат, частота спайков  $\langle f_s \rangle$  вновь начинает расти, сходясь к значению порядка  $1/T_{spike}$ .

В случае  $\varepsilon=0.024$  режим детерминированной модели (1) (при  $D=0$ ) принципиально иной. Система непрерывно генерирует надпороговые колебания с периодом  $T_{spike} \approx 0.23$ . Добавление шума резко меняет поведение системы. При малых значениях  $D$  (рис. 4, а,  $D=0.0004$ ) шум лишь изредка вызывает сбои в непрерывной генерации спайков. Однако при бóльших значениях интенсивности шума  $D$  (рис. 4, б,  $D=0.004$ ), траектория относительно часто попадает в область уже не существующего canard-режима, где проводит время, соответствующее нескольким (на рис. 4, б - до восьми) подпороговым колебаниям. Как результат, средняя частота генерации спайков  $\langle f_s \rangle$  существенно уменьшается, что и отражает провал на кривой б рис. 2.

При еще бóльших  $D$  попавшая в область canard-режима система так же быстро выталкивается из нее действующим шумом. Время пребывания в canard-области уменьшается, и средняя частота спайков снова растет (рис. 4, в).

Таким образом, механизм стохастического подавления генерации спайков заключается в активации шумом области canard-режима, которая не посещается траекторией в детерминированном случае ( $D=0$ ).

Расчет двумерной плотности вероятности  $P(x,y)$  для различных значений интенсивности шума  $D$  (рис. 5) позволяет сопоставить оба описанных выше эффекта: стабилизацию частоты индуцированных шумом спайков и стохастическое подавление надпороговых колебаний. На рисунке случаи (а) и (г) соответствуют малым  $D$ . Как видно,  $P(x,y)$  имеет принципиально различную структуру для canard-режима (а) и для режима непрерывной генерации (г), являясь, по сути, размытым образом предельного цикла. Однако тот факт, что структура векторного поля системы (1) мало меняется при вариации параметра  $\varepsilon$  в интервале  $[0.024, 0.026]$ , приводит к тому, что уже для среднего шума  $D=0.004$  распределения  $P(x,y)$  имеют сходную структуру (б, д), а для  $D=0.15$  распределения  $P(x,y)$  практически совпадают (в, е). Таким образом, механизм обоих эффектов сходен и состоит в активации шумом областей фазового пространства системы, не посещаемых в детерминированном случае. Поскольку canard explosion не

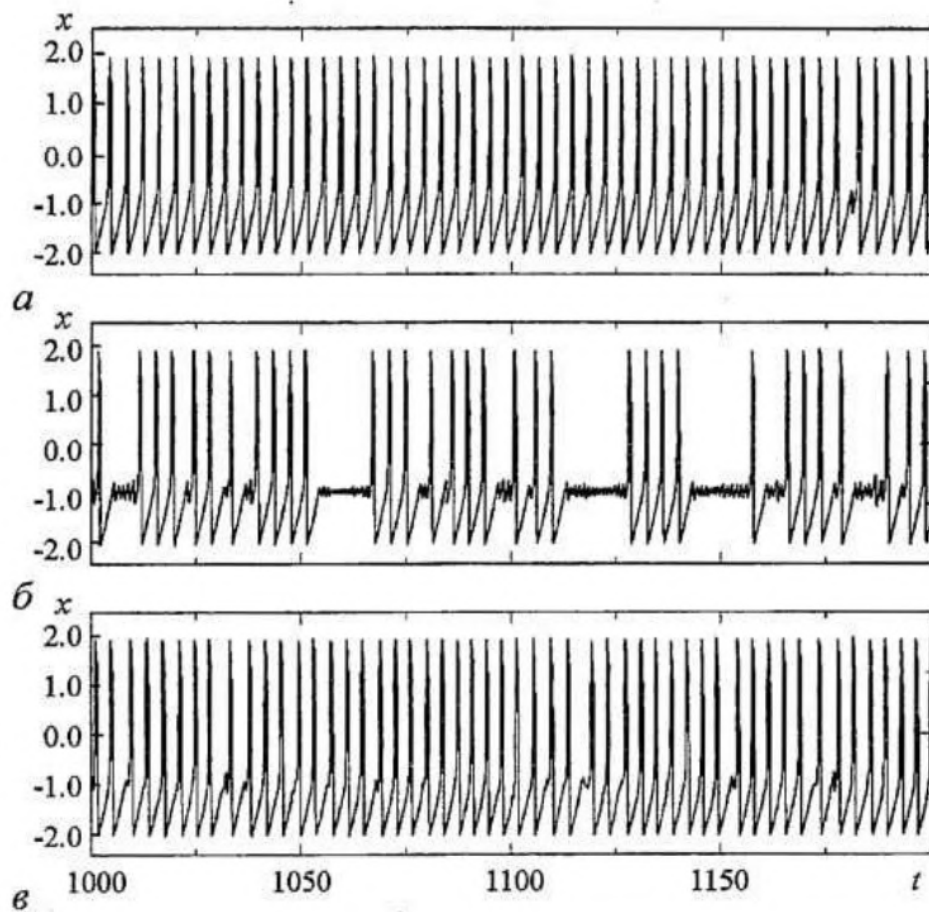


Рис. 4. Характерный вид временных реализаций для переменной  $x$  при  $a=0.997$  и  $\epsilon=0.024$ . Интенсивность шума  $D$  составляла:  $a$  - 0.0004,  $б$  - 0.004,  $в$  - 0.04

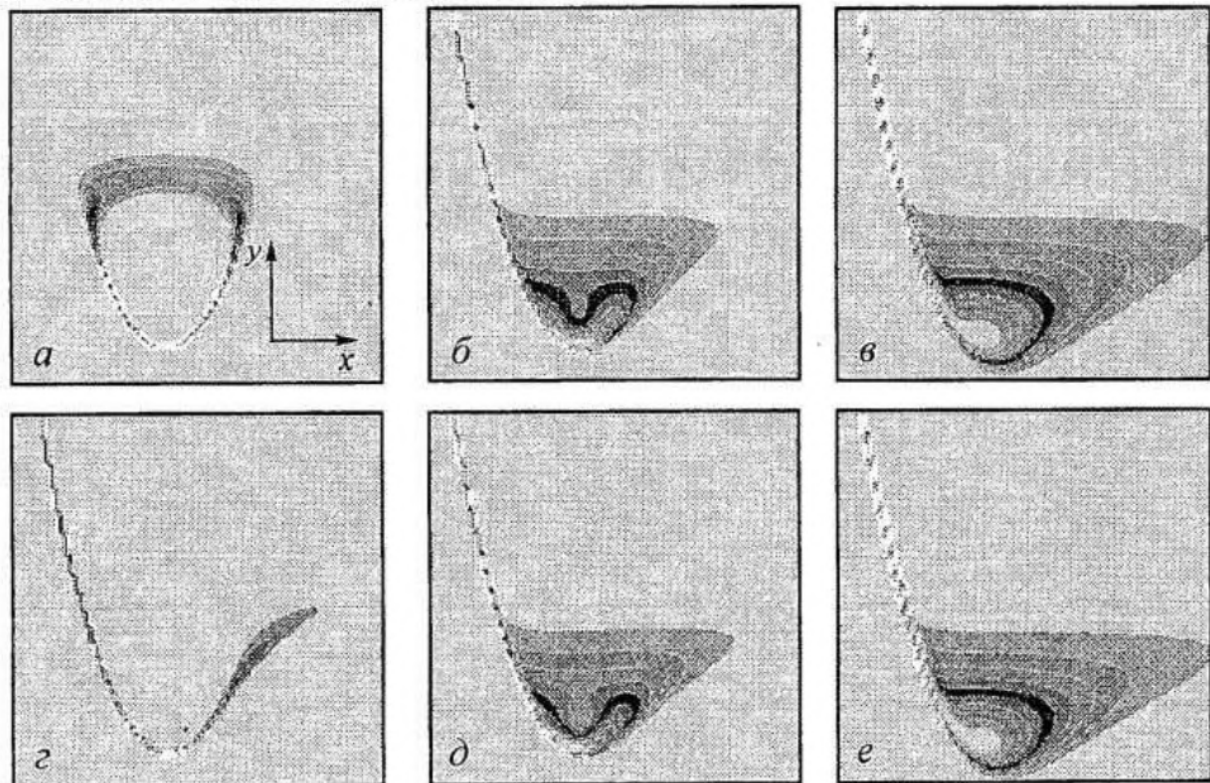


Рис. 5. Изолинии двумерного распределения плотности вероятности  $P(x,y)$  в окрестности состояния равновесия при  $a=0.997$ :  $a, б, в$  - режим canard-колебаний при  $\epsilon=0.026$ ;  $г, д, е$  - режим непрерывной генерации спайков при  $\epsilon=0.024$ . Интенсивность шума  $D$  изменяется слева направо как 0.0004 для  $a, г$ , 0.004 для  $б, д$ , и 0.15 для  $в, е$

является бифуркацией, структура векторного поля исследуемой системы в обоих случаях практически совпадает.

### 3. Результаты радиofизического эксперимента

**3.1. Исследуемое устройство и уравнения модели.** Полученные при численном моделировании результаты были подтверждены результатами радиofизического эксперимента, проведенного с использованием схемы релаксационного генератора, воспроизводящего на качественном уровне модель FitzHugh - Nagumo с учетом кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элемента [14]. Принципиальная схема исследуемого устройства показана на рис. 6. Схема имеет выход, с которого снимается сигнал системы  $x(t)$ , и два входа, на которые подается постоянное напряжение порога  $V_g$ , соответствующее параметру  $a$  численной модели, а также шум с генератора  $D\xi(t)$ . Конвертер на операционном усилителе DA2 представляет собой двухполосник с участком отрицательного сопротивления и выполняет роль кубической нелинейности в правой части первого уравнения модели (1). Совместно с каскадом на DA1 конвертер образует релаксационный генератор - аналог системы FitzHugh - Nagumo. Схеме соответствует следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 dx/dt &= f(x)/R_3 - (x - V_g)/R_5 - y(1 - R_4/R_5), \\ C_2 R_4 R_5 dy/dt &= x - V_g - yR_4, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $f(x)$  - кусочно-линейная функция, задаваемая с помощью операционного усилителя DA2. С учетом обозначения  $\alpha = R_2/(R_1 + R_2)$  она имеет вид

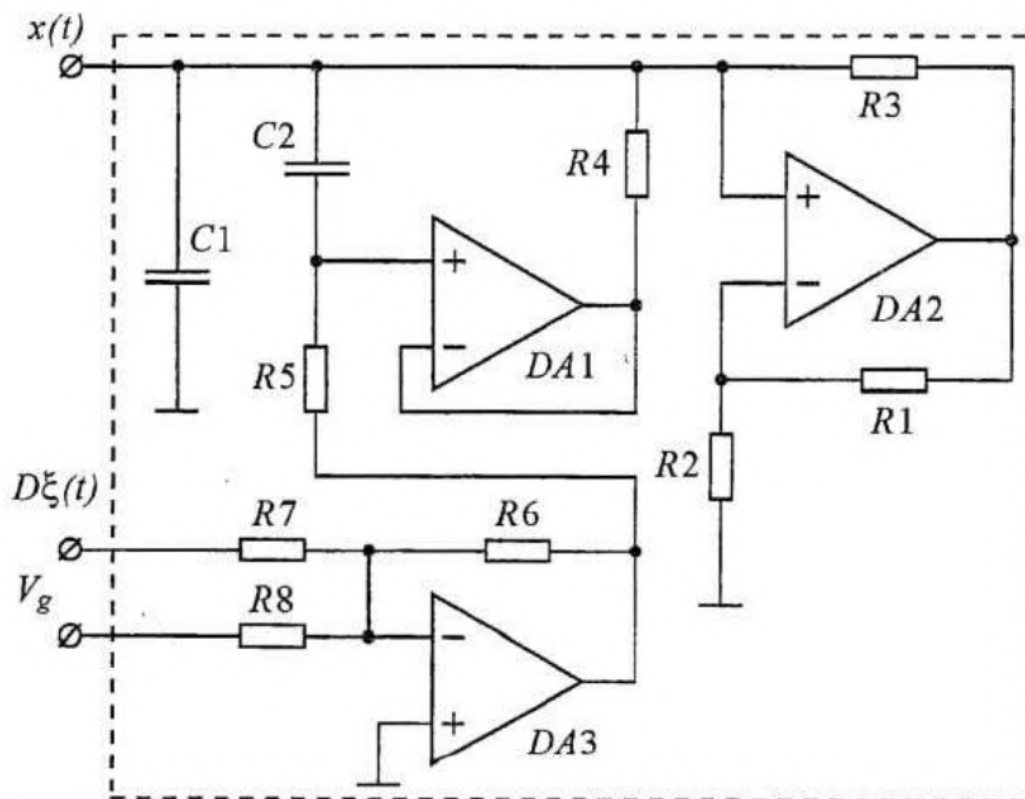


Рис. 6. Схема исследуемой электронной модели. Номиналы используемых элементов:  $R_1 = R_2 = 100 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 2.2 \text{ кОм}$ ,  $R_4 = 1.1 \text{ кОм}$ ,  $R_5 = 10 \text{ кОм}$ ,  $R_6 = R_7 = R_8 = 47 \text{ кОм}$ ,  $C_1 = 0.017 \text{ мкФ}$ ,  $C_2 = 0.01 \text{ мкФ}$ , DA1-DA3 - типа  $\mu 741$ . Напряжение питания для ОУ DA1, DA3 -  $U_{a1,3} = \pm 15 \text{ В}$ , для ОУ DA2 -  $U_{a2} = \pm 12 \text{ В}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + U_{a2}, & x > \alpha U_{a2}, \\ xR_1/R_2, & -\alpha U_{a2} \leq x \leq \alpha U_{a2}, \\ -x - U_{a2}, & x < -\alpha U_{a2}. \end{cases} \quad (4)$$

Переменная  $x$  в уравнениях (3) соответствует напряжению  $x(t)$  на выходе системы, а переменная  $y$  - току  $i$ , текущему через резистор  $R_4$ . Изменению параметра  $\epsilon$ , ответственного за релаксационные свойства системы, в данном случае отвечает вариация емкости конденсатора  $C_1$ . Постоянное напряжение  $V_g$  выполняет роль управляющего параметра, аналогичного параметру  $a$  в уравнениях (1). На базе ОУ DA3 выполнен суммирующий элемент, с помощью которого постоянное напряжение смещения  $V_g$  суммируется с шумовым напряжением  $D\xi(t)$ , подаваемым с внешнего источника, в качестве которого использовался стандартный генератор шума Г2-59. Таким образом, способ введения шума в электронную модель аналогичен способу введения шума в уравнения системы (1) при численном эксперименте. Используемый генератор шума обеспечивает близкое к гауссовому распределение напряжения сигнала и равномерный спектр мощности в интервале частот от 0 до 100 кГц. Интенсивность шума в радиофизическом эксперименте оценивалась как средний квадрат напряжения  $D=\langle \xi^2(t) \rangle$  на выходе генератора шума. Выходной сигнал экспериментальной установки оцифровывался и поступал в компьютер для обработки.

Путем подбора емкости конденсатора  $C_1$  можно реализовать такое состояние системы, при котором по мере уменьшения порогового напряжения  $V_g$  рождению предельного цикла большого радиуса будет предшествовать рождение малого предельного цикла подпороговых колебаний, что соответствует появлению области *canard*-колебаний в системе FitzHugh - Nagumo. Следует отметить, что проведение радиофизического эксперимента в этой области параметров осложняется противоречивыми требованиями к экспериментальной установке. А именно, степень проявления изучаемых эффектов тем выше, чем более выражен релаксационный характер колебаний (чем меньше значение  $\epsilon$  в модели (1)). Однако в этом случае существенно сужается область значений параметра  $a$  ( $V_g$  - в радиофизическом эксперименте), соответствующая *canard*-колебаниям, что осложняет проведение радиофизического эксперимента. Нам удалось найти приемлемый компромисс между степенью релаксационности системы и желаемой выраженностью изучаемого эффекта.

Следствием такого компромиссного выбора параметров является некоторое различие в динамике исследуемой схемы и модели (1) под воздействием шума. Если в случае численного эксперимента при выбросе шумом траектории с цикла малого радиуса происходит немедленный выход на траекторию, геометрия которой определяется уравнением  $x$ -нульклины, то в случае электронной модели вследствие меньшей релаксационности системы траектория способна вернуться назад, так и не достигнув максимального значения. По этой причине во временной реализации электронной модели под воздействием шума можно найти спайки с произвольной амплитудой.

**3.2. Результаты измерений.** В нашем эксперименте мы фиксировали значение емкости конденсатора  $C_1=0.017$  мкФ таким образом, чтобы режим *canard*-колебаний был хорошо выражен. При этом критическое значение управляющего параметра  $V_g$ , для которого наблюдается рождение предельного цикла малого радиуса, составляет  $V_g=-3.0$  В. В зависимости от конкретного значения напряжения  $V_g$  воздействие шума на динамику системы может быть различным.



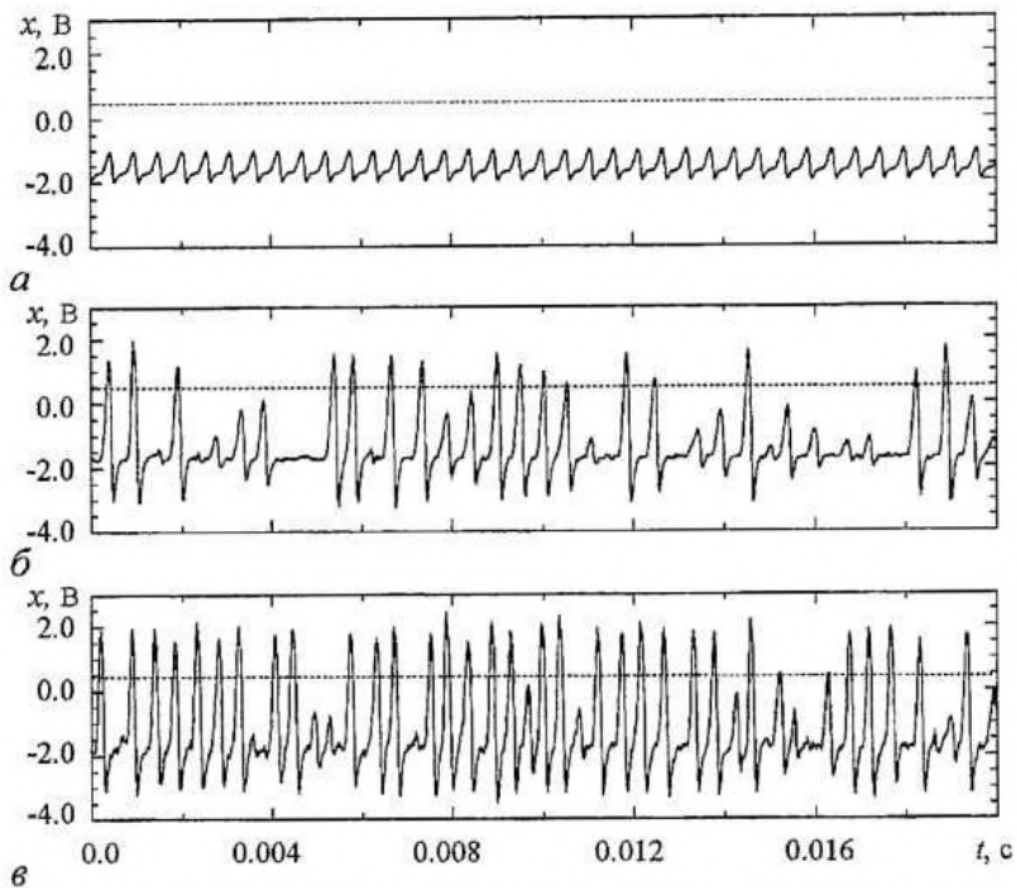


Рис. 7. Временные реализации выходного напряжения схемы, изображенной на рис. 6, для различных значений интенсивности воздействующего шума  $D$  при  $V_g = -2.9$  В (режим сапанд-колебаний):  $a$  -  $0.0 \text{ В}^2$ ,  $б$  -  $1.0 \text{ В}^2$ ,  $в$  -  $3.0 \text{ В}^2$ . Пунктирной линией показан условный уровень напряжения на выходе, по пересечению которого определялась частота следования спайков

$V_g = -2.9$  В. В этом случае, в отсутствие внешнего шума, система генерирует подпороговые сапанд-колебания, соответствующие предельному циклу малого радиуса, однако генерация спайков отсутствует (рис. 7,  $a$ ). Исследуемая система сохраняет возбудимые свойства и воздействие шума может приводить к спонтанному преодолению порога возбуждения и выбросу на траекторию, соответствующую генерации спайка. Частота возникновения таких спайков-выбросов будет увеличиваться по мере увеличения интенсивности воздействующего шума (рис. 7  $б$ ,  $в$ ). Зависимость средней частоты генерируемых спайков  $\langle f_s \rangle$  от интенсивности шума  $D$  приведена на рис. 8,  $a$ . Как видно, при  $D=0.0$  спайки полностью отсутствуют, а с увеличением  $D$  частота их возникновения растет подобно частоте спайков в численном эксперименте (ср. с рис. 2, кривые 1 и 2).

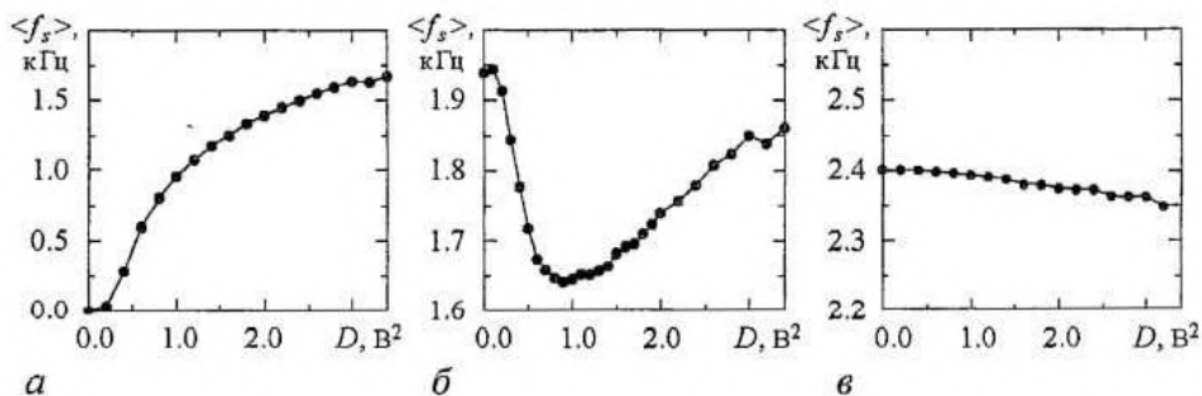


Рис. 8. Зависимость средней частоты спайков  $\langle f_s \rangle$  от интенсивности воздействующего шума  $D$  для различных значений порогового напряжения  $V_g$ :  $-2.9$  В ( $a$ ),  $-2.6$  В ( $б$ ),  $-2.2$  В ( $в$ )

$V_g = -2.6$  В. В этом случае траектория системы находится на предельном цикле большого радиуса, в отсутствие шума наблюдается непрерывная генерация спайков. Введение шума может вызвать задержку траектории в еще существующей области *canard*-колебаний и, как следствие, снижение частоты следования спайков. Однако дальнейшее увеличение интенсивности шума вновь с подавляющей вероятностью начинает выбрасывать траекторию на большой предельный цикл и частота спайков вновь увеличивается (рис. 8, б). Такое поведение  $\langle f_s \rangle$  соответствует кривой б на рис. 2, полученной в численном эксперименте. Временные реализации сигнала системы для трех различных значений интенсивности шума показаны на рис. 9.

$V_g = -2.2$  В. Так же, как и в предыдущем случае, имеет место непрерывная генерация спайков, но область, где реализовывались подпороговые колебания, уже не существует. Как следствие, введение шума мало влияет на частоту генерации спайков. Увеличение его интенсивности способствует лишь несущественному снижению средней частоты их появления благодаря флуктуациям их амплитуды (рис. 8, в).

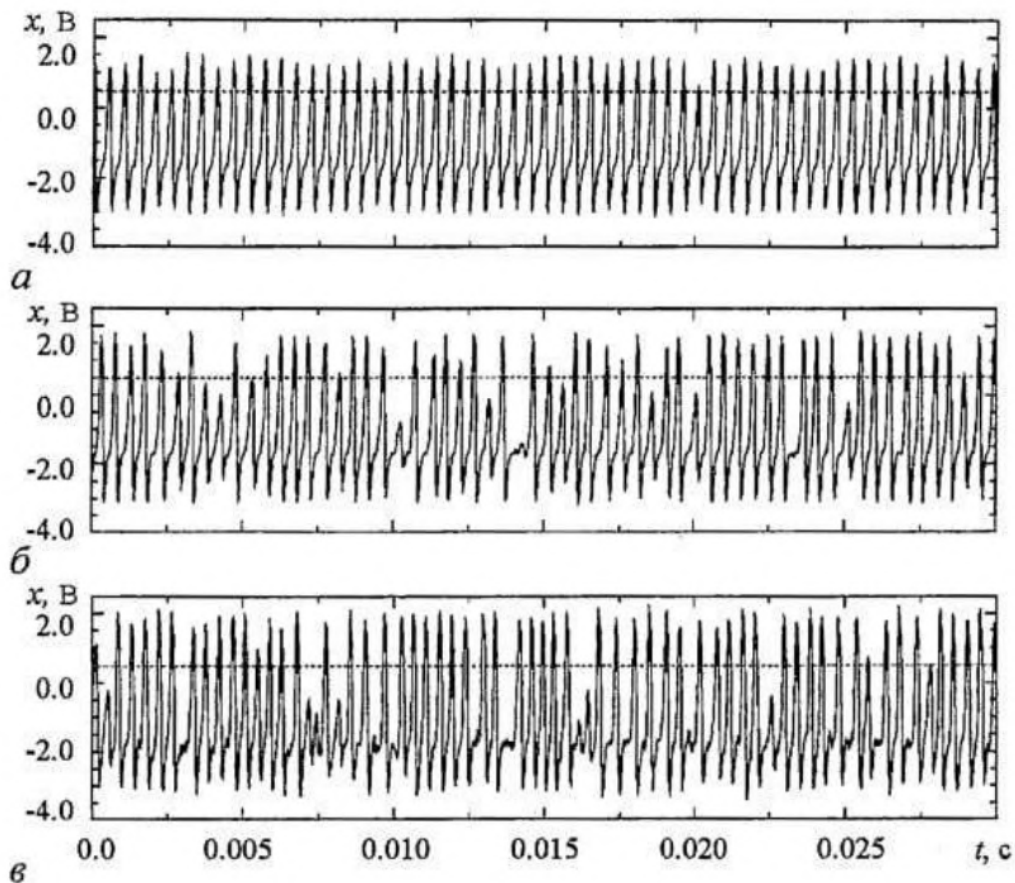


Рис. 9. Временные реализации выходного напряжения схемы, изображенной на рис. 6 для различных значений интенсивности воздействующего шума  $D$  при  $V_g = -2.6$  В (режим надпороговых колебаний): а -  $0.1 \text{ В}^2$ , б -  $1.0 \text{ В}^2$ , в -  $3.4 \text{ В}^2$ . Пунктирной линией показан условный

## Выводы

Подводя итоги, можно сказать, что исследование стохастической динамики модели FitzHugh - Nagumo в ее классической форме (1) в области параметров, где наблюдаются *canard*-колебания, позволило выявить интересные нелинейные эффекты, наблюдаемые при численном моделировании и воспроизводимые

средствами радиофизического эксперимента. Первый из них, стабилизация частоты индуцированных шумом колебаний, может быть отнесен к кругу эффектов стохастической синхронизации в том смысле, что временной масштаб, вызванный действием приложенного к системе шума, обнаруживает некую тенденцию к подстройке с временным масштабом колебаний, уже существующим в детерминированной системе. Второй эффект заключается в частичном подавлении шумом процесса непрерывной генерации спайков. Как результат, наблюдается уменьшение их частоты при увеличении интенсивности шума.

Оба наблюдаемых эффекта являются следствием наличия *canard*-колебаний в детерминированной системе, но имеют место при заметном уровне шума в системе. Таким образом, наши результаты заставляют пересмотреть сложившуюся точку зрения (см., например, [15]), согласно которой режим *canard*-колебаний является математической экзотикой и не может наблюдаться в реальных нейронных системах из-за неустраняемого шума.

Как ожидается, описанные выше эффекты должны самым принципиальным образом влиять на функционирование ансамбля систем, близких по параметрам к *canard*-режиму. Мы планируем исследовать эту проблему.

*Работа была частично поддержана грантами РФФИ 04-02-16769 и INTAS 01-2061, а также грантом Министерства образования РФ А03-2.9-362.*

### Библиографический список

1. *Anishchenko V.S., Neiman A.B., Moss F., and Schimansky-Geier L.* Stochastic resonance: noise-enhanced order // УФН. 1999. Т. 169, № 1. P. 7.
2. *Gang H., Ditzinger T., Ning C.Z., and Haken H.* Stochastic resonance without external periodic force // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 807; *Rappel W.-J. and Strogatz S.H.* Stochastic resonance in an autonomous system with a nonuniform limit cycle // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50. P. 3249.
3. *Pikovsky A. and Kurth J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable systems // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775.
4. *Shulgin B.V., Neiman A.B. and Anishchenko V.S.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157.
5. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 1771.
6. *Wang X.-J.* Genesis of bursting oscillations in the Hindmarsh-Rose model and homoclinicity to a chaotic saddle // Physica D. 1993. Vol. 62. P. 263.
7. *Mochlis J.* Canards in a surface oxidation reaction // Nonlinear Science 2002. Vol. 12. P. 319.
8. *Scott A.C.* // Rev. Mod. Phys. 1975. Vol. 47. P. 487.
9. *James Keener, James Sneyd.* Mathematical Physiology // Springer, 1998. P. 594.
10. *Makarov V.A., Nekorkin V.I. and Velarde M.G.* Spiking behavior in a noise-driven system combining oscillatory and excitatory properties // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 3431.
11. *Никитин Н.Н., Разевич В.Д.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // ЖВМ. Т. 18, № 1. С.106.
12. *Press William H., Teukolsky Saul A., Vetterling William T., Flannery Brian P.* Numerical recipes in C: the art of scientific computing // Copyright 1988-1992 by Cambridge University Press. Programs Copyright 1988-1992 by Numerical Recipes Software.

13. *Kramers H.A.* Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reaction // *Physica*. 1940. Vol. 7. P. 284.

14. *Yo Horikawa*. Coherence resonance with multiple peaks in a coupled FitzHugh-Nagumo model // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64. P. 031905.

15. *Izhikevich E.M.* Neural excitability, spiking and bursting // *International Journal of Bifurcations and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 6. P. 1171.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 27.02.03  
после доработки 16.06.03*

## STOCHASTIC DYNAMICS OF EXCITABLE SYSTEM NEAR THE CANARD EXPLOSION

*D.E. Postnov, A.V. Shishkin, D.V. Setsinsky*

The subject of our study is FitzHugh-Nagumo model driven by additive noise in the region of transition from excitable regime to continuous spiking. We show how canard explosion influences characteristics of stochastic oscillations. In particular, there are two effects with varying noise intensity: frequency stabilization of noise-induced spikes and partial suppression of spike generation.



*Постнов Дмитрий Энгелевич* профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Доктор физико-математических наук (2001). Область научных интересов - сложная динамика математических моделей биологических систем, индуцированные шумом эффекты в нелинейных динамических системах. Автор 56 научных статей и книги «Chaotic Synchronization. Application to Living Systems» (World Scientific, 2002).

E-mail: postnov@chaos.ssu.runnet.ru



*Шишкин Александр* окончил физический факультет СГУ в 2002 году. Инженер кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 2003 года - аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов - нелинейная динамика в приложении к биофизике, стохастические процессы в нелинейных системах с шумом. Автор одной статьи.



*Сецинский Дмитрий Вячеславович* родился в 1978 году. Окончил физический факультет СГУ (2000). С 2001 года аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика стохастических систем. Имеет 6 публикаций