



СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ЦИКЛОВ СИСТЕМЫ РЕССЛЕРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ХАОСУ

Л.Б. Ряшко, И.А. Башкирцева, П.В. Стихин

На примере нелинейной модели Ресслера исследуется чувствительность автоколебаний систем к случайным возмущениям. Анализ стохастической чувствительности осуществляется при помощи эмпирического подхода и с использованием метода квазипотенциала. Демонстрируются возможности описания пространственной ориентации и формы разброса пучка случайных траекторий в виде эллипсов рассеивания. Полученные результаты позволяют проследить динамику роста стохастической чувствительности циклов системы Ресслера в цепи бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

Введение

Случайные воздействия могут оказать существенное влияние на качественное поведение динамических систем. Изучение автоколебаний нелинейных систем в присутствии случайных возмущений было начато в [1] и продолжено в большом числе работ [2-7]. Обзор некоторых последних результатов можно найти в [8,9].

Анализ хаотических аттракторов с учетом случайных флуктуаций рассматривался в [10-12].

Под воздействием стохастических возмущений траектория, стартующая из некоторой точки цикла, формирует вокруг него так называемый пучок случайных траекторий. Исчерпывающее описание плотности распределения пучка случайных траекторий дается уравнением Фоккера - Планка - Колмогорова (ФПК). Следует отметить, что прямое использование этого уравнения даже в простейшем случае нелинейного стохастического осциллятора с одной степенью свободы является затруднительным. Если характер переходного процесса является несущественным, то обычно ограничиваются рассмотрением стационарного уравнения ФПК. Аналитическое исследование данного уравнения даже в случае цикла на плоскости представляет собой весьма сложную задачу.

В последнее время при исследовании стохастической динамики активно применяется новый подход, связанный с использованием некоторой функции, получившей название квазипотенциала. Данная функция появилась в связи с решением задачи Колмогорова о выходе случайной траектории из окрестности устойчивой точки покоя [13-16]. Квазипотенциал позволяет находить такие

важные вероятностные характеристики, как среднее время выхода случайной траектории из области устойчивой точки покоя и наиболее вероятную точку выхода. При помощи функции квазипотенциала удастся предсказывать тонкие эффекты воздействий внешних помех на рассматриваемую систему. Метод квазипотенциала в анализе чувствительности предельных циклов рассматривался в [8,15,17-20]. Следует отметить, что двумерный случай цикла на плоскости является достаточно хорошо изученным [8,18]. Трехмерный случай, представляющий особый интерес в связи с исследованием возможных переходов к хаосу, только начинает рассматриваться [19,20].

В настоящее время одной из классических моделей нелинейной хаотической динамики является система, предложенная О.Е.Ресслером [21] для описания химической периодической реакции Белоусова - Жаботинского [21,22]. У системы Ресслера, состоящей из трех нелинейных дифференциальных уравнений, наблюдаются предельные циклы с каскадом бифуркаций удвоения периода.

Данная работа посвящена исследованию чувствительности предельных циклов модели Ресслера к малым случайным возмущениям. В первом разделе дается описание детерминированной модели Ресслера (точки покоя, предельные циклы, бифуркационная диаграмма). В зоне бифуркаций удвоения периода представлены зависимости мультипликаторов и локальных экспонент - основных характеристик детерминированной устойчивости наблюдаемых здесь циклов - от параметра системы.

Второй раздел посвящен исследованию чувствительности циклов модели Ресслера к случайным возмущениям. Для оценки разброса пучка случайных траекторий относительно орбит предельных циклов использовались два подхода: эмпирический и теоретический.

Эмпирический анализ использует результаты прямого численного моделирования случайных траекторий и сводится к расчету ковариационных матриц для точек пересечения пучка с нормальными плоскостями.

В основе теоретического подхода лежит метод квазипотенциала. При описании квазипотенциала используется новая конструкция - функция чувствительности [18,19], которая позволяет сравнивать между собой чувствительность различных частей цикла к стохастическим помехам.

Приводятся эллипсы рассеивания - теоретические оценки разброса точек пересечений пучка случайных траекторий с нормальными плоскостями. Эллипсы рассеивания дают наглядное представление об изменении формы и пространственной ориентации пучка случайных траекторий вдоль орбиты цикла.

Показано, что увеличение кратности цикла сопровождается ростом его стохастической чувствительности и жесткости. Проводится сопоставление эмпирических и теоретических результатов.

Демонстрируется разница в поведении функции стохастической чувствительности и экспоненциального показателя системы.

1. Детерминированная модель Ресслера

Рассмотрим детерминированную систему Ресслера [21]

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + \alpha y, \\ \dot{z} = \alpha + z(x - \mu), \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha > 0$, $\mu > 0$ - параметры системы.

1.1 Предельные циклы. В данной работе рассматриваются предельные циклы системы Ресслера для фиксированного значения $\alpha=0.2$, при изменении параметра μ на интервале $(0.4;10)$. На рис. 1, *a-v* представлены графики детерминированных циклов системы Ресслера для различных значений μ . При

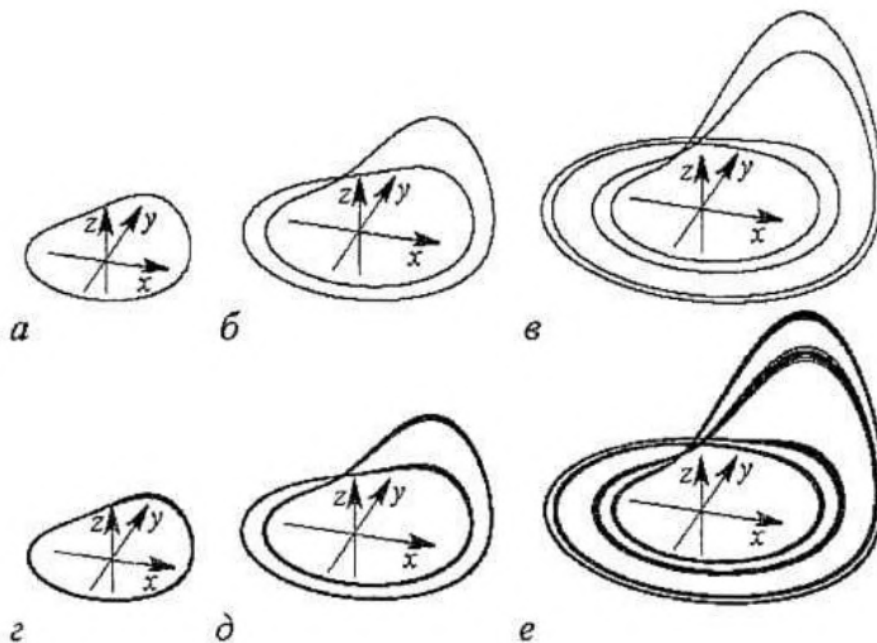


Рис. 1. Детерминированные циклы системы Ресслера для различных значений μ : *a* - 2, *б* - 3, *в* - 4 и пучки случайных траекторий модели Ресслера при возмущении $\epsilon=0.003$ и различных значениях μ : *г* - 2, *д* - 3, *е* - 4

компьютерном моделировании решений системы (1) использовался метод Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом по времени $h=10^{-3}$.

При увеличении параметра в указанном диапазоне система Ресслера демонстрирует сценарий каскада бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу. Здесь можно выделить зоны структурной устойчивости с постоянной кратностью циклов - интервалы I_0, I_1, \dots . На интервале I_k наблюдается 2^k -цикл. Таким образом, при $\alpha=0.2$ имеем $I_0=(2\alpha; \mu_{0,1})=(0.400; 2.830)$, $I_1=(\mu_{0,1}; \mu_{1,2})=(2.830; 3.836)$, $I_2=(\mu_{1,2}; \mu_{2,3})=(3.836; 4.123)$, $I_3=(\mu_{2,3}; \mu_{3,4})=(4.123; 4.186)$ и т.д.

1.2 Бифуркационная диаграмма. Общая картина бифуркаций хорошо прослеживается при помощи бифуркационной диаграммы. На рис. 2 для каждого

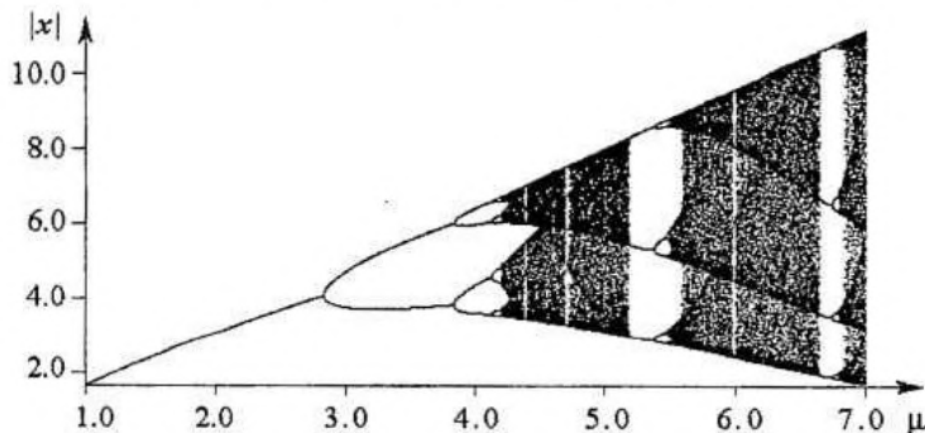


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма детерминированной модели Ресслера при $\alpha=0.2$.

$\mu \in [1; 7]$ представлены точки пересечения аттрактора системы (1) с полуплоскостью $x < 0, y = 0$.

На приведенном рисунке можно наблюдать «зоны порядка» - интервалы, аттракторами в которых являются предельные циклы. Наиболее широкие «зоны порядка» для системы Ресслера лежат в интервалах (0.4; 4.2), (5.2; 5.5), (6.7; 6.8). На бифуркационной диаграмме кроме «зон порядка» наблюдаются «зоны хаоса», в которых аттракторы выглядят как множества, состоящие из сплошных зачерненных интервалов.

В данной работе исследуется устойчивость циклов в «зоне порядка» $0.4 \leq \mu \leq 4.2$. Традиционными характеристиками устойчивости детерминированных циклов служат мультипликаторы и локальные экспоненты.

1.3. Мультипликаторы. Рассмотрим общую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = f(u), \quad (2)$$

где u - n -мерный вектор, $f(u)$ - вектор-функция.

Предполагается, что у системы (2) существует T -периодическое решение $u = \xi(t)$ (цикл Γ). Рассмотрим систему первого приближения для отклонений $y = u - \xi(t)$ решений u системы (2) от решения $\xi(t)$

$$dy/dt = F(t)y, \quad (3)$$

где $F(t) = \frac{\partial f(\xi(t))}{\partial u}$ - T -периодическая матрица размерности $n \times n$.

Предположим, что система (3), получив в начальный момент времени некоторый внешний импульс, повлекший за собой сход с орбиты Γ , движется далее идеально, без каких-либо внешних воздействий, асимптотически приближаясь к Γ . Тогда мультипликаторы ρ_j ($j=1, \dots, n$) - собственные числа матрицы монодромии системы (3) характеризуют смещения начальной точки за один оборот цикла Γ вдоль соответствующих собственных векторов матрицы монодромии [23]. Один из мультипликаторов всегда равен единице ($\rho_1=1$) в силу наличия периодического решения Γ .

Неравенство $|\rho_j| < 1$ ($j=2, \dots, n$) является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла [23].

Для системы (1) - нелинейной модели Ресслера - матрица $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ \xi_z(t) & 0 & \xi_x(t) - \mu \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\xi(t) = (\xi_x(t), \xi_y(t), \xi_z(t))^T$.

Степень устойчивости циклов модели Ресслера за оборот определяется мультипликаторами ρ_2 и ρ_3 . На рис. 3 представлены зависимости $|\rho_2(\mu)|$ и $|\rho_3(\mu)|$. Значения мультипликаторов были получены численно (с использованием метода Рунге - Кутты) как собственные числа матрицы монодромии при изменении параметра μ в диапазоне $0.4 \leq \mu \leq 4.2$.

Отметим, что на самом деле мультипликаторы ρ_2 и ρ_3 становятся комплексными лишь в малой окрестности нуля.

Мультипликатор ρ_3 (рис. 3, б) практически не реагирует на увеличение параметра μ и при $\mu > 2$ лежит в диапазоне $|\rho| < 2 \cdot 10^{-4}$.

Мультипликатор ρ_2 позволяет сравнивать между собой циклы, соответствующие различным значениям параметра μ . Как видим, график $|\rho_2|$ (рис. 3, а)

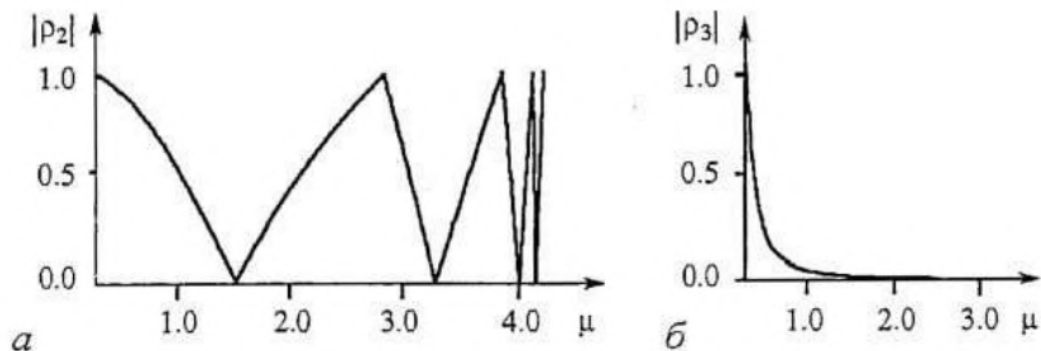


Рис. 3. Мультипликаторы циклов системы Ресслера

ведет себя «пилообразно», меняясь от 0 до 1. В точках бифуркации $|\rho_2|=1$. Цикл Γ при параметре $\mu_k^* = \operatorname{argmin}_{\mu \in I_k} |\rho_2(\mu)|$ будем называть 2^k -суперциклом. Такой 2^k -суперцикл является наиболее устойчивым циклом кратности 2^k на интервале I_k .

Для модели Ресслера 1-суперцикл наблюдается при $\mu_0^* = 1.549$, 2-суперцикл при $\mu_1^* = 3.277$, 4-суперцикл при $\mu_2^* = 3.985$, 8-суперцикл при $\mu_3^* = 4.156$ и 16-суперцикл при $\mu_4^* = 4.194$.

1.4. Локальные экспоненты. В качестве характеристик устойчивости цикла в точке $\xi(t)$ можно рассматривать локальные экспоненты $\lambda_j(t)$ ($j=1, \dots, n$) - собственные числа матрицы $F(t)$ системы первого приближения (3).

На рис. 4 приведены графики $\operatorname{Re}(\lambda_1(t))$ и $\operatorname{Re}(\lambda_2(t)) = \operatorname{Re}(\lambda_3(t))$ для системы

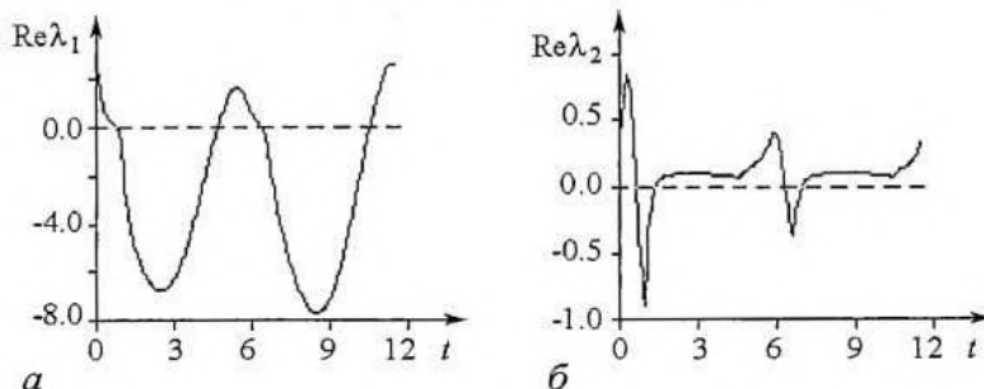


Рис. 4. Локальные экспоненты системы Ресслера для $\mu=3$

Ресслера (1) при $\mu=3$. Локальные экспоненты находились численно при решении

характеристического уравнения для матрицы $F(t)$. Приведенные графики позволяют сделать вывод о локальной устойчивости и неустойчивости отдельных участков цикла. Как видим, интервалы устойчивости ($\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$) чередуются с интервалами неустойчивости ($\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$).

В связи с локальными экспонентами $\lambda_j(t, \mu)$ естественно ввести величину $L(\mu) = \max_{0 \leq t \leq T(\mu), 1 \leq j \leq n} \operatorname{Re}(\lambda_j(t, \mu))$. Функция $L(\mu)$ представляет собой экспоненциальный показатель, характеризующий степень «разбегания» траекторий в зоне максимальной неустойчивости цикла. На рис. 5 для системы

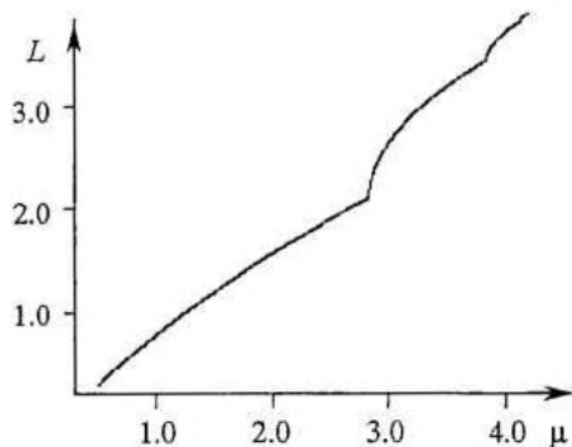


Рис. 5. График функции $L(\mu)$ для системы Ресслера

(1) представлен график $L(\mu)$. Из рисунка видно, что с приближением параметра μ к зоне хаоса рассматриваемое значение экспоненциального показателя $L(\mu)$ возрастает, что соответствует росту локальной неустойчивости циклов модели Ресслера.

2. Стохастическая модель Ресслера

Математическая модель стохастически возмущенной системы Ресслера имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y+z) + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = x + \alpha y + \varepsilon \dot{w}_2, \\ \dot{z} = \alpha + z(x-\mu) + \varepsilon \dot{w}_3, \end{cases} \quad (5)$$

где $w_i(t)$ - независимые стандартные винеровские процессы ($i=1,2,3$), а ε - малый параметр (интенсивность случайных возмущений).

Наличие случайных возмущений приводит к тому, что траектории, стартующие из точек детерминированной орбиты (см. рис. 1, *a-e*), покидают ее, формируя вокруг цикла пучок случайных траекторий (рис. 1, *z-e*). Оценить влияние случайных помех при различных значениях параметра можно при помощи стохастической бифуркационной диаграммы (рис. 6).

Можно считать, что стохастическая бифуркационная диаграмма получается из уже рассмотренной бифуркационной диаграммы (см. рис. 2) «размыванием» линий графика под воздействием случайных возмущений. При этом пропадают все тонкие детали бифуркационной структуры, а остаются лишь первые наиболее грубые. Ширина «размывания» на графике представляет собой оценку ширины пучка случайных траекторий при соответствующем значении μ в выбранном сечении.

На рис. 6 хорошо видно, что эта ширина, характеризующая чувствительность цикла к действующим возмущениям весьма неоднородна. Для более детальной оценки стохастической чувствительности предельных циклов рассмотрим два метода: эмпирический и теоретический.

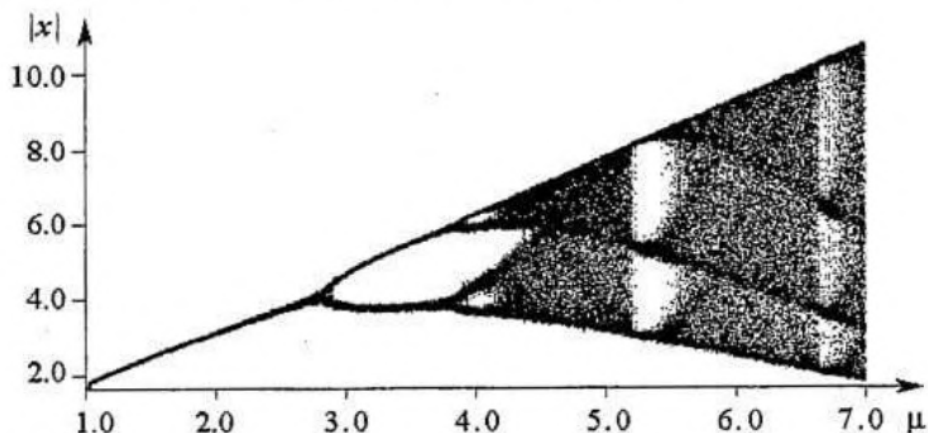


Рис. 6. Стохастическая бифуркационная диаграмма модели Ресслера при $\alpha=0.2$, $\varepsilon=0.003$

2.1. Эмпирический анализ стохастической чувствительности. Рассмотрим систему (2) с T -периодическим решением $u=\xi(t)$ (циклом Γ) и связанную с ней систему стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\dot{u} = f(u) + \varepsilon \sigma(u) \dot{w}, \quad (6)$$

где $w(t)$ - n -мерный стандартный винеровский процесс; $\sigma(u)$ - достаточно гладкая $n \times n$ - функция, характеризующая распределение случайных возмущений по координатам; ε - интенсивность случайных возмущений.

Под действием случайных возмущений траектория системы (6) покидает детерминированную орбиту и формирует вокруг Γ некоторый пучок. По ширине пучка случайных траекторий вокруг цикла можно судить как о степени устойчивости отдельных участков орбиты, так и о чувствительности всего цикла Γ в целом к случайным возмущениям.

Эмпирический анализ стохастической чувствительности опирается на прямое численное моделирование случайных траекторий системы (6). Для трехмерного случая ($n=3$) рассмотрим статистический способ оценки чувствительности цикла Γ системы (6) к случайным возмущениям. Эмпирические функции чувствительности для системы (6) строятся следующим образом.

1. На детерминированном решении $\xi(t)$, задающем цикл Γ , выбираются контрольные точки $\xi_i = \xi(t_i)$ с фиксированным шагом по времени $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ($i=1, \dots, m$). В каждой точке ξ_i строится плоскость Π_i , ортогональная циклу Γ .

2. Для стохастической системы (6) на интервале $[0, kT]$ численно моделируется решение, стартующее из точки ξ_1 . Здесь k - количество витков пучка траекторий, статистически достаточное для оценки стохастической чувствительности.

3. В процессе прохождения траектории вдоль Γ на j -м витке последовательно фиксируются A_{ij} - точки пересечения траектории с плоскостями Π_i ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, k$).

4. Для каждой секущей плоскости Π_i по массиву A_{ij} ($j=1, \dots, n$) находится эмпирическая ковариационная матрица \bar{C}_i и матрица чувствительности $\bar{S}_i = \bar{C}_i / \varepsilon^2$ как отношение «выхода» \bar{C}_i ко «входу» ε^2 .

5. Для матрицы \bar{S}_i вычисляются собственные числа $\bar{D}_1(t_i) \geq \bar{D}_2(t_i) \geq \bar{D}_3(t_i)$. Собственное число $\bar{D}_3(t_i)$ равно нулю в силу вырожденности матрицы \bar{C}_i (так как все точки A_{ij} при фиксированном i лежат в плоскости Π_i).

Собственные числа $\bar{D}_1(t_i)$ и $\bar{D}_2(t_i)$ являются эмпирическими скалярными характеристиками чувствительности цикла системы (6) в точке ξ_i к случайным помехам. Значения рассматриваемых собственных чисел дискретно задают эмпирические функции чувствительности $\bar{D}_1(t)$ и $\bar{D}_2(t)$. Функции чувствительности характеризуют ширину пучка случайных траекторий в точке орбиты $\xi(t)$ вдоль соответствующих собственных векторов (ортогональных друг другу).

На рис. 7 приведены графики 10 функций $\bar{D}_1(t)$ и $\bar{D}_2(t)$, полученных для 10 выборочных экспериментов при $\mu=2.830075$ (значение параметра близкое к бифуркационному $\mu_{0,1}$) и для $\mu_1^*=3.277$ (значение параметра 2-суперцикла). Прямое численное моделирование случайных траекторий проводилось методом Рунге - Кутты четвертого порядка с добавлением на каждом шаге $h=10^{-3}$ соответствующего случайного возмущения интенсивности $\varepsilon=10^{-5}$ с количеством оборотов $k=150$.

Из рис. 7 следует, что значения функции $\bar{D}_1(t)$ превосходят значения функции $\bar{D}_2(t)$ на несколько порядков. Это говорит о том, что при воздействии стохастических возмущений разброс пучка случайных траекторий в плоскости ортогональной циклу является весьма неравномерным. Случайные траектории отклоняются преимущественно вдоль собственного вектора, соответствующего

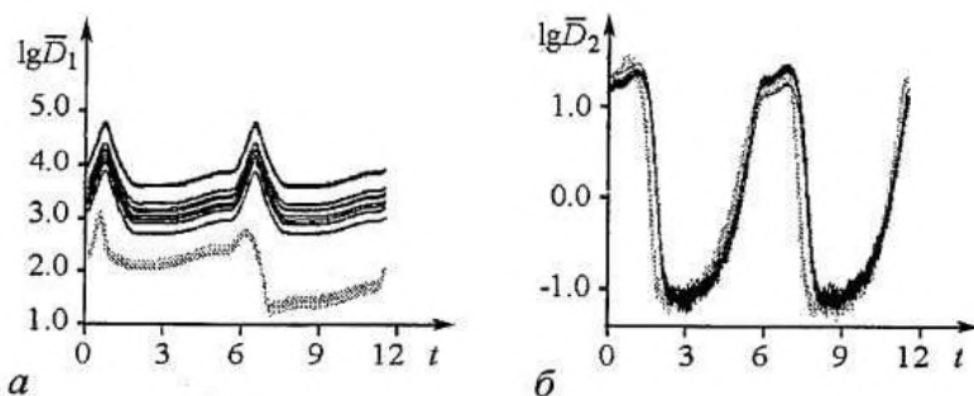


Рис. 7. Графики эмпирических функций чувствительности 2-циклов модели Ресслера для $\mu=2.830075$ (черный цвет) и $\mu=3.277$ (серый цвет) при $\epsilon=10^{-5}$

собственному значению $\bar{D}_1(t)$. Само значение $\bar{D}_1(t)$ определяет величину этого разброса. Поэтому именно функцию $\bar{D}_1(t)$ можно считать «индикатором» стохастической чувствительности цикла к случайным возмущениям.

Эксперименты, проведенные при значениях интенсивности случайных возмущений в диапазоне от $\epsilon=10^{-7}$ до $\epsilon=10^{-3}$, дали аналогичные результаты. Таким образом, эмпирические функции чувствительности в указанном диапазоне слабо зависят от ϵ .

Другой важной особенностью стохастических циклов модели Ресслера является существенный перепад значений функций чувствительности при движении вдоль цикла. На рис. 7 у $\bar{D}_1(t)$ и $\bar{D}_2(t)$ отчетливо видны два характерных всплеска, отражающие неравномерность ширины пучка случайных траекторий вокруг 2-цикла (см. рис. 1, б).

Отмеченные особенности в поведении эмпирических функций чувствительности наблюдаются как при значении $\mu=2.830075$, близком к бифуркационному, так и при $\mu=3.277$, отвечающему 2-суперциклу. Для \bar{D}_2 имеем практически полное совпадение. Для \bar{D}_1 имеем очевидное подобие. При приближении параметра μ к бифуркационному значению отмеченные выше акценты в поведении пучка вокруг цикла разве лишь усиливаются.

Кроме того, как видно на рис. 7, выборка из 10 графиков $\bar{D}_1(t)$ для околобифуркационного значения имеет гораздо больший разброс, что является еще одним свидетельством повышенной стохастической чувствительности.

Рассмотрим теперь эмпирические функции чувствительности в более широком диапазоне параметра μ - зоне бифуркаций удвоения периода. Здесь удобно перейти к функциям $\bar{M}_j(\mu) = \max_{0 \leq t \leq T(\mu)} \bar{D}_j(t, \mu)$, $j=1,2$, характеризующим чувствительность цикла (при параметре μ) в целом.

На рис. 8, где представлены графики функций $\bar{M}_j(\mu)$, полученные при интенсивности помех $\epsilon=10^{-5}$, видна общая тенденция увеличения чувствительности стохастических циклов при переходе параметра μ в зону циклов большой кратности.

При этом $\bar{M}_1(\mu)$ имеет в точках бифуркации отчетливо выраженные острые пики, отвечающие всплескам стохастической чувствительности. В графиках $\bar{M}_1(\mu)$ и $\bar{M}_2(\mu)$ присутствует весьма ощутимая шумовая составляющая, не позволяющая отследить возможные тонкие детали в поведении, например, функции $\bar{M}_2(\mu)$. Ослабление этой шумовой составляющей в рамках эмпирического подхода, основанного на прямом численном моделировании случайных траекторий,

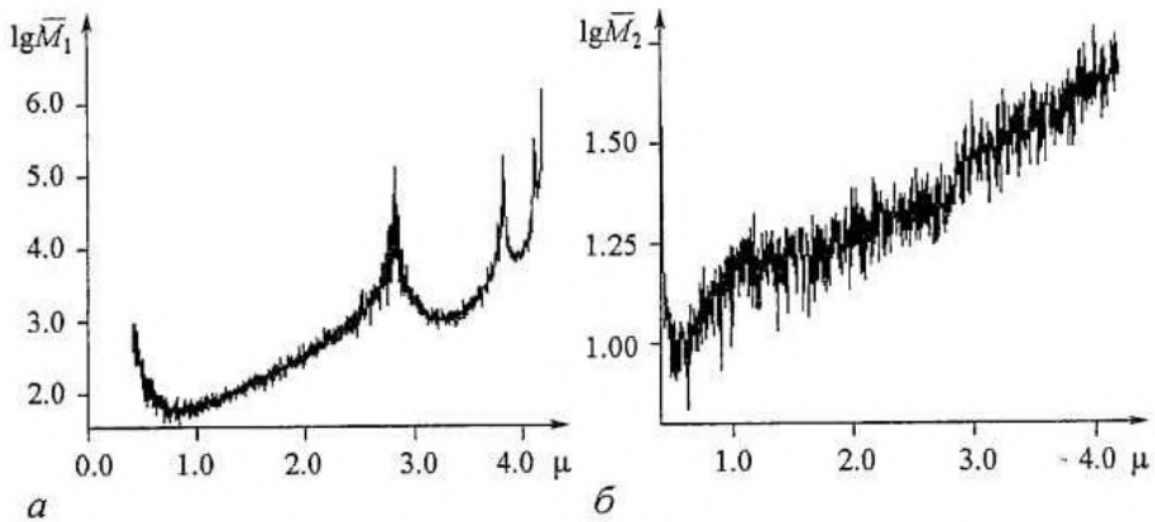


Рис. 8. Эмпирические функции чувствительности: а - $\bar{M}_1(\mu)$; б - $\bar{M}_2(\mu)$ при $\epsilon=10^{-5}$

возможно лишь за счет увеличения объема используемой выборки, что требует больших вычислительных ресурсов.

Эмпирический подход позволяет, как правило, получить лишь грубые приближения. Более тонкий анализ, использующий теоретические функции чувствительности и конструкцию квазипотенциала, рассматривается в следующем пункте.

2.2. Метод квазипотенциала в анализе стохастической чувствительности. Впервые квазипотенциал появился в работах А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина [13] в связи с решением задачи Колмогорова о выходе случайной траектории из окрестности устойчивой точки покоя. Предполагается, что фазовая кривая (цикл Γ) T -периодического решения $u=\xi(t)$ системы (2) является экспоненциально устойчивой. Плотность распределения $\rho(t, u, \epsilon)$ решения u стохастической системы (6) удовлетворяет уравнению ФПК

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = L\rho, \quad L\rho = \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 (a_{ij}\rho)}{\partial u_i \partial u_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f_i \rho)}{\partial u_i}, \quad a_{ij} = [\sigma \sigma^T]_{ij} \quad (7)$$

Если основной интерес представляет установившийся в (6) режим стохастических автоколебаний (а не характер переходного процесса), то можно ограничиться исследованием стационарной плотности распределения $\rho(u, \epsilon)$, которая задается стационарным уравнением ФПК: $L\rho=0$.

Квазипотенциал $v(u)$ определяет следующую асимптотику [13-15] стационарной плотности распределения

$$v(u) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \rho(u, \epsilon), \quad \rho(u, \epsilon) \approx K e^{-v(u)/\epsilon^2}. \quad (8)$$

Квазипотенциал связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению Гамильтона - Якоби

$$(f(u), \frac{\partial v}{\partial u}) + \frac{1}{2} (\frac{\partial v}{\partial u} \sigma(u) \sigma^T(u) \frac{\partial v}{\partial u}) = 0 \quad (9)$$

с условиями: $v|_{\Gamma}=0, v|_{D_{\Gamma}} > 0$.

Квазипотенциал $v(u)$ в окрестности D является функцией Ляпунова для системы (2) и позволяет показать асимптотическую устойчивость цикла Γ . Уравнение Гамильтона - Якоби (9) выглядит проще, чем исходное уравнение ФПК (7), однако и его точное решение является по-прежнему весьма сложной задачей.

Здесь возможен конструктивный подход [17,26], связанный с введением еще одной асимптотики - малой окрестности исследуемого цикла.

Аппроксимацией квазипотенциала $v(u)=\varphi(u)+O(\|\Delta(u)\|^3)$ (здесь $\Delta(u)=u-\gamma(u)$ - отклонение точки u от цикла Γ , γ - ближайшая к u точка цикла Γ) служит орбитальная квадратичная форма

$$\varphi(u) = 1/2 (\Delta(u), \Phi^+(\gamma(u))\Delta(u)), \quad (10)$$

задаваемая определенной на Γ симметрической $n \times n$ -матрицей $\Phi(\gamma)$.

В итоге при условии, что шумы и отклонения от цикла малы, асимптотика стационарной плотности распределения может быть записана в форме нормального распределения

$$\rho(u, \varepsilon) \approx \rho_*(u, \varepsilon) = K e^{-(\Delta(u), \Phi^+(\gamma(u))\Delta(u))/(2\varepsilon^2)}. \quad (11)$$

Матрица $\Phi(\gamma)$ из соотношения (11) характеризует разброс точек пересечения пучка случайных траекторий системы гиперплоскостью, ортогональной Γ и проходящей через точку γ . Другими словами, функция $\Phi(\gamma)$ характеризует реакцию системы (6) вблизи цикла на случайные воздействия и позволяет описать неравномерность ширины пучка случайных траекторий по всем направлениям вдоль собственных векторов, указать наиболее и наименее чувствительные к случайным возмущениям участки цикла [18]. Заметим, что матрица $\Phi(\gamma)$ является вырожденной, так как распределение сосредоточено в нормальной гиперплоскости. Следовательно, одно из собственных чисел матрицы $\Phi(\gamma)$ равно нулю, остальные собственные числа задают разброс случайных траекторий вокруг Γ в направлении соответствующих им собственных векторов.

Значение функции $\Phi(\gamma)$ удобно искать в параметрической форме [18]. Решение $\xi(t)$, связывающее точки Γ с точками интервала $[0;T]$, задает следующую параметризацию: $\Phi(\xi(t))=W(t)$. Матрица $W(t)$ для экспоненциально устойчивого цикла Γ является единственным решением уравнения Ляпунова

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t) \quad (12)$$

с условиями

$$W(0) = W(T) \quad (13)$$

$$W(t)r(t) \equiv 0, \quad (14)$$

где $F(t) = \frac{\partial f(\xi(t))}{\partial u}$, $S(t) = \sigma(\xi(t))\sigma^T(\xi(t))$; $r(t) = f'(\xi(t))$; $P(t) = P_{r(t)}$; $P_{r(t)} = I - rr^T/r^T r$ - матрица

проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$.

Собственные числа $D_j(t)$ ($j=1, \dots, n$) матрицы $W(t)$ будем называть теоретическими функциями чувствительности. Будем считать, что $D_1(t) \geq D_2(t) \geq \dots \geq D_n(t)$, при этом $D_n(t) \equiv 0$.

Рассмотрим теоретические функции чувствительности $D_1(t)$ и $D_2(t)$ для стохастической системы Ресслера (5). На рис. 9 приведены графики функций чувствительности $D_1(t)$ и $D_2(t)$ для параметров $\mu=2.830075$ (значение параметра, близкое к бифуркационному) и $\mu=3.277$ (2-суперцикл) - тех же самых, что и для эмпирических функций чувствительности, изображенных на рис. 7.

Сопоставляя рис. 7 и рис. 9, можно отметить следующее. Кривые $D_2(t)$ и $\bar{D}_2(t)$ практически совпадают. Такое же совпадение есть и у кривых $D_1(t)$ и $\bar{D}_1(t)$ для значения параметра, соответствующего 2-суперциклу. При околобифуркационном значении параметра μ наблюдается несоответствие кривых $D_1(t)$ и $\bar{D}_1(t)$ по уровню расположения. По форме кривых соответствие можно считать полным.

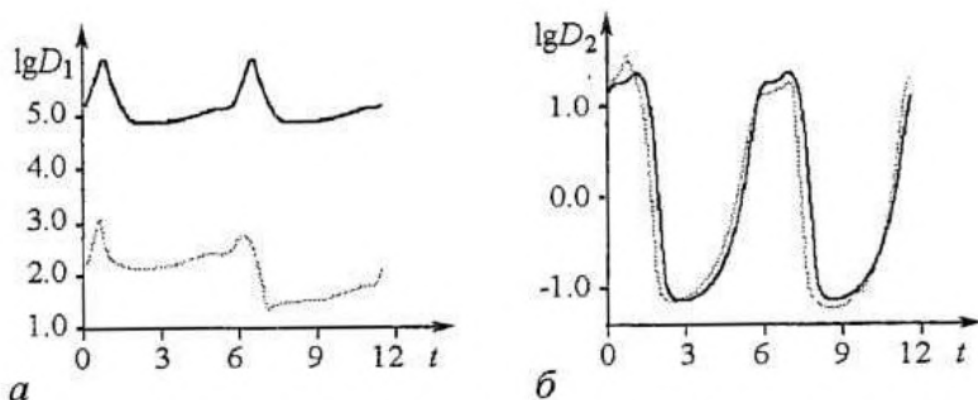


Рис. 9. Графики теоретических функций чувствительности 2-циклов модели Ресслера для $\mu=2.830075$ (черный цвет) и $\mu=3.277$ (серый цвет)

Кроме того, сопоставляя рис. 4, а и рис. 9, а, можно отметить, что пики функций локальных экспонент и функции чувствительности наблюдаются при разных значениях t , то есть приходится на разные точки орбиты цикла. Это означает, что есть несовпадение между точками цикла наиболее чувствительными к случайным шумам и наименее устойчивыми точками орбиты.

На рис. 10 представлены теоретические функции чувствительности $D_1(t)$ для значений параметра μ суперциклов. Из приведенного рисунка видно, что с увеличением параметра μ происходит возрастание среднего уровня функции чувствительности.

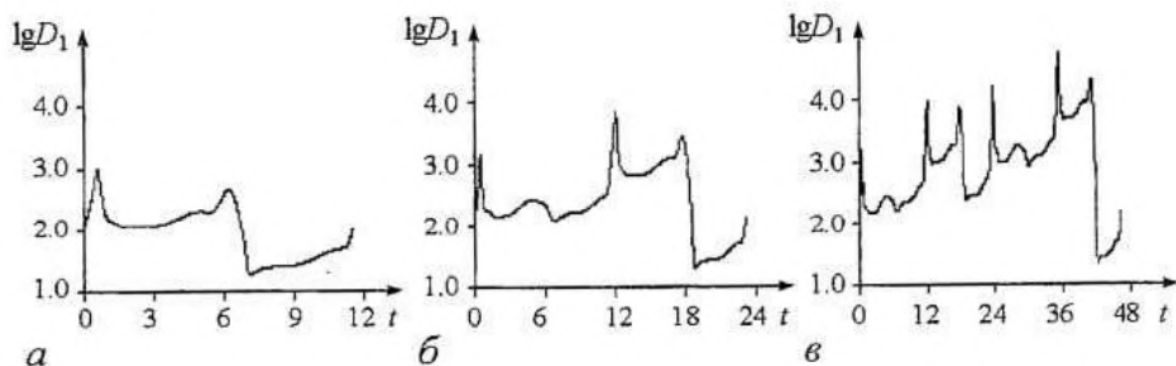


Рис. 10. Графики теоретических функций чувствительности суперциклов модели Ресслера при различных значениях μ : а - 3.277 (2-суперцикл); б - 3.985 (4-суперцикл); в - 4.156 (8-суперцикл)

Значения $D_1(t)$ и $D_2(t)$ - собственные числа матрицы $W(t)$ решения системы (12) - (14) и соответствующие им собственные векторы позволяют построить в каждой точке цикла эллипс рассеивания. Эллипсы рассеивания, изображенные на рис. 11 для 1-цикла ($\mu=2$) и 2-цикла ($\mu=3$), позволяют наглядно проиллюстрировать особенности стохастической чувствительности этих циклов не только по величине, но и по направлению, и получить отчетливое представление об изменении формы и пространственной ориентации пучка случайных траекторий вдоль орбиты цикла.

По аналогии с эмпирическим методом (см. п. 2.1) определим для стохастической системы Ресслера (5) функции $M_j(\mu) = \max_{0 \leq t \leq T(\mu)} D_j(t, \mu)$, $j=1,2$. На рис. 12 для системы (5) представлены графики зависимостей $M_1(\mu)$ и $M_2(\mu)$ в сопоставлении с графиками эмпирических $\bar{M}_1(\mu)$ и $\bar{M}_2(\mu)$. Можно отметить некоторые особенности качественного поведения функции $M_1(\mu)$. Интервалы возрастания $M_1(\mu)$ чередуются с интервалами убывания, в то время как экспоненциальный показатель $L(\mu)$ представляет собой монотонную функцию (см.

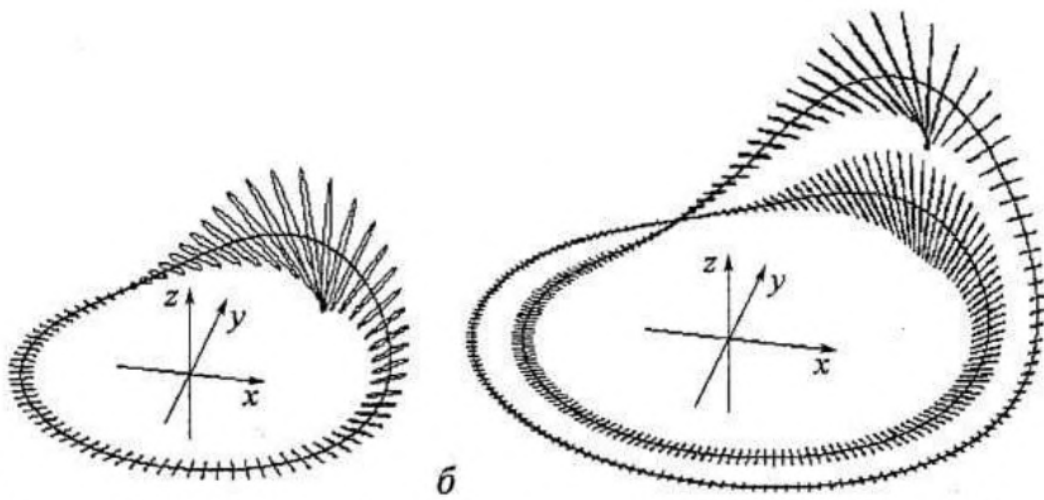


Рис. 11. Эллипсы распределения пучка случайных траекторий на орбите цикла при $\mu=2$ (а) и $\mu=3$ (б)

рис. 5). Это говорит о том, что существуют такие интервалы параметра μ , в которых одновременно с увеличением неустойчивости цикла Γ , происходит уменьшение чувствительности Γ к внешним случайным воздействиям. С увеличением параметра μ значения локальных минимумов $M_1(\mu)$ увеличиваются, то есть по мере приближения параметра μ к зоне хаоса стохастическая чувствительность циклов системы Ресслера неограниченно возрастает. Значения μ , в которых наблюдаются острые пики, соответствуют точкам бифуркации. На графике функции $M_2(\mu)$ (в отличие от графика эмпирической $\bar{M}_2(\mu)$) можно заметить реакцию на точки бифуркации - кривая $M_2(\mu)$ имеет характерные изломы. Следует отметить хорошее соответствие друг другу графиков эмпирических $\bar{M}_1(\mu)$, $\bar{M}_2(\mu)$ и теоретических функций $M_1(\mu)$, $M_2(\mu)$.

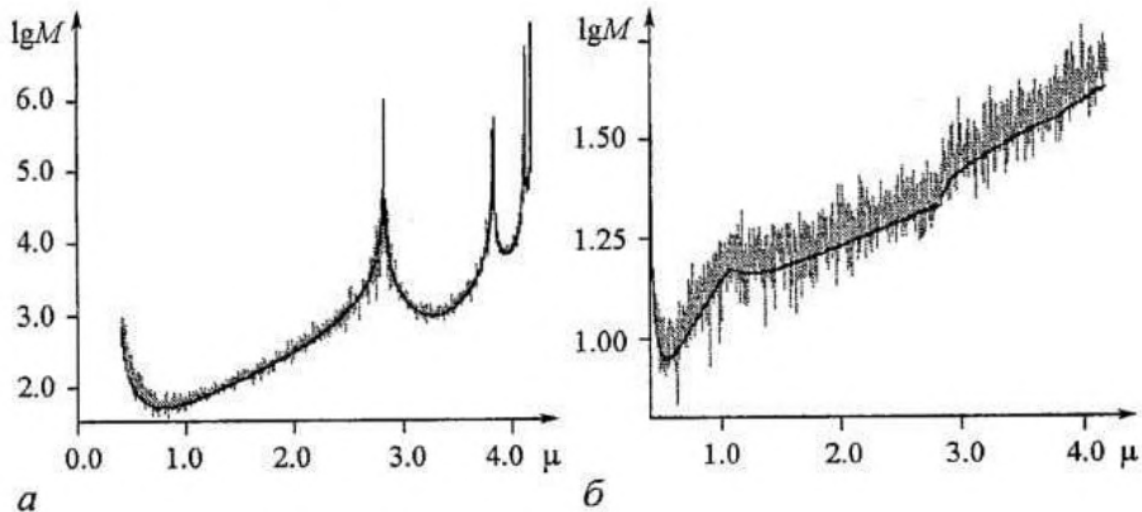


Рис. 12. Графики теоретических (черный цвет) и эмпирических (серый цвет) зависимостей функций чувствительности: а - $M_1(\mu)$ и $\bar{M}_1(\mu)$; б - $M_2(\mu)$ и $\bar{M}_2(\mu)$ при $\epsilon=10^{-5}$

2.3. Геометрический рост чувствительности циклов в цепи бифуркаций. Для стохастической системы Ресслера (5) рассмотрим величины $m_k = \min_{\mu \in I_k} M_1(\mu) = M_1(\bar{\mu}_k)$, $\bar{\mu}_k = \operatorname{argmin}_{\mu \in I_k} M_3(\mu)$. Цикл Γ_k при параметре $\mu = \bar{\mu}_k$ будем называть стохастическим 2^k -суперциклом. Цикл Γ_k является наименее восприимчивым к случайным возмущениям среди всех 2^k -циклов. Чувствительность Γ_k к случайным возмущениям равна $m_k = M_3(\bar{\mu}_k)$. Рассмотрим величины $d_k = m_{k+1}/m_k$. Величина d_k представляет собой отношение степеней чувствительности соседних в

цепи бифуркаций стохастических 2^{k+1} -суперцикла и 2^k -суперцикла. Для системы Ресслера получены значения $d_0=18.047$, $d_1=7.004$, $d_2=7.558$, $d_3=6.985$. Как видим, в последовательных значениях d_k устанавливается некоторая закономерность: $d_1 \approx d_2 \approx d_3$. Это означает, что чувствительность стохастических суперциклов при удвоении периода увеличивается примерно в 7 раз. Отмеченная закономерность (рост чувствительности) близка к результатам, полученным в [24,25] для дискретных моделей.

2.4. Стохастическая жесткость. Важной характеристикой стохастической чувствительности системы Ресслера (5) является величина $\eta(\mu) = \max_{0 \leq t \leq T} D_1(t, \mu) / \min_{0 \leq t \leq T} D_1(t, \mu)$, характеризующая перепад дисперсии случайного пучка траекторий при движении вдоль цикла. Функция $\eta(\mu)$ носит название стохастической жесткости.

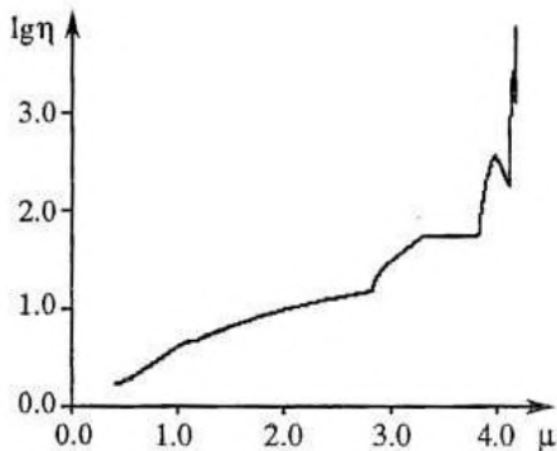


Рис. 13. График стохастической жесткости

Отметим некоторые особенности поведения функции $\eta(\mu)$. Как видно из рис. 13, график функции $\eta(\mu)$ реагирует не только на точки бифуркации системы, но и на значения $\bar{\mu}_k$ (значения μ точек стохастических 2^k -суперциклов). Кроме того, график $\eta(\mu)$ имеет горизонтальный участок, то есть существует интервал изменения параметра μ , в котором отношение максимумов и минимумов функции $D_1(t, \mu)$ остается постоянным. Этот интервал начинается в $\bar{\mu}_1$ и заканчивается бифуркационным значением $\mu_{1,2}$ (переход от зоны 2-циклов к зоне 4-циклов).

3. Заключение

В данной статье были рассмотрены детерминированные и стохастические циклы системы Ресслера в зоне бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

Для исследования устойчивости детерминированных циклов к малым возмущениям начальных данных использовались такие функции, как мультипликаторы и локальные экспоненты. Показано снижение устойчивости циклов при переходе к хаосу.

Для системы Ресслера со случайными возмущениями представлена стохастическая бифуркационная диаграмма, дающая общую картину чувствительности аттракторов системы к случайным воздействиям. Более точно реакция предельных циклов этой системы к случайным возмущениям определяется при помощи функции чувствительности. Данная функция позволяет сравнивать между собой отдельные участки орбиты цикла по степени восприимчивости к случайным воздействиям. Для построения функции чувствительности использовался эмпирический подход, а также метод, основанный на привлечении квазипотенциала.

Получена ясная картина увеличения чувствительности системы Ресслера к случайным возмущениям в цепи бифуркаций удвоения периода. Зафиксированы отличия в поведении экспоненциального показателя и функции стохастической

чувствительности. Установлен рост стохастической жесткости, а также закономерность в росте чувствительности стохастических суперциклов. Можно отметить также хорошее совпадение эмпирических и теоретических функций чувствительности. Эллипсы рассеивания, построенные по функции чувствительности, дают ясное представление об изменении формы и пространственной ориентации пучка случайных траекторий вдоль орбиты цикла.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (№ 04-01-96098урал).

Библиографический список

1. *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем. // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.
2. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. Радио, 1961.
3. *Рытов С.М.* Введение в стохастическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
4. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
5. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
6. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
7. *Soong T.T., Grigoriu M.* Random vibration of mechanical and structural systems // RTR Prentice-Hall. Englewood Cliffs. New Jersey, 1993.
8. *Smelyanskiy V.N., Dykman M.I., Maier R.S.* Topological features of large fluctuations to the interior of a limit cycles. // Physical Review E. 1997. Vol. 55, № 3. P.2369.
9. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // Physics Reports. 2000. Vol. 323. P. 1.
10. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С. 192.
11. *Kifer Yu.* Attractors via random perturbations // Commun. math. phys. 1989. Vol. 121. P.445.
12. *Копейкин А.С., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Особенности процесса установления вероятностной меры на хаотических аттракторах в системах Лоренца и Ресслера с учетом флуктуаций // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С.65.
13. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
14. *Day M.V.* Regularity of boundary quasi-potentials for planar systems // Applied Mathematics and Optimization. 1994. Vol. 30. P.79.
15. *Naeh T., Klosek M.M., Matkowsky B.J., Schuss Z.* A direct approach to the exit problem // SIAM Journal Appl.Math. 1990. Vol. 50, № 2. P. 595.
16. *Нейман А.Б.* Применение кумулянтного анализа для исследования бифуркаций динамических систем, возмущаемых внешним шумом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С.8.
17. *Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б.* Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // Прикл. математика и механика 1995. Т. 59, вып. 1. С.51.
18. *Баширцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 5. С.19.

19. Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б. Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным воздействиям // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 6. С.104.

20. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // *Dynamic systems and applications*. 2002. Vol. 11. P.293.

21. *Roessler O.E., Wegman K.* Chaos in Zhabotinski reaction // *Nature*. 1978. Vol. 271. P. 89.

22. Кузнецов С.П. Динамический хаос. (Сер. Современная теория колебаний и волн). М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001. 296с.

23. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

24. Кузнецов А.П., Капустина Ю.В. Свойства скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С.78.

25. *Crutchfield J., Nauenberg M., Rudnick J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46. P.933.

26. Ряшко Л.Б. Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 4. С. 582.

Уральский государственный
университет

Поступила в редакцию 25.05.2003
после доработки 11.11.2003

STOCHASTICAL SENSITIVITY OF CYCLES OF ROESSLER SYSTEM IN TRANSITION TO CHAOS

L.B. Ryashko, I.A. Bashkirtseva, P.V. Stichin

The response problem of limit cycles for stochastically forced Roessler system is considered. For stochastic sensitivity analysis two approaches are used: empirical (based on direct numerical simulation) and theoretical (based on quasipotential function). The possibilities are demonstrated to describe stochastic bundles spatial orientation and scatter form using scatter ellipses. The increase of Roessler system sensitivity to external disturbances in the period-doubling bifurcation zone under transition to chaos is shown.



Ряшко Лев Борисович родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой вычислительной математики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996,1998). Область научных интересов - устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru



Башкирцева Ирина Адольфовна родилась в 1965 году, окончила Уральский госуниверситет (1987), кандидат физико-математических наук (1997), старший преподаватель кафедры вычислительной математики Уральского госуниверситета. Область научных интересов - асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных динамических систем.



Стихин Павел Викторович родился в 1979 году, окончил Уральский госуниверситет (2002), аспирант кафедры математической физики. Область научных интересов - анализ чувствительности к возмущениям и моделирование стохастических нелинейных систем.

E-mail: paul-st@mail.ru