



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(6)

Научная статья  
УДК 532.54:51-72

DOI: 10.18500/0869-6632-003071  
EDN: PHVMFU

## Идентификация и прогноз динамики плоской вихревой структуры на основе математической модели системы точечных вихрей

*В. Н. Говорухин*

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия  
E-mail: [✉vngovoruhin@sfedu.ru](mailto:vngovoruhin@sfedu.ru)

Поступила в редакцию 13.07.2023, принята к публикации 27.09.2023,  
опубликована онлайн 13.11.2023, опубликована 30.11.2023

**Аннотация.** Целью работы является разработка и анализ алгоритмического метода решения обратной задачи плоской вихревой динамики жидкости — идентификации и прогноза развития структуры течения по данным о векторах скорости жидкости в наборе опорных точек. В силу типичной для обратных задач некорректности теоретический анализ сходимости и адекватности метода затруднителен, потому эти вопросы изучаются экспериментально. **Методы.** Предлагаемый метод идентификации и прогноза основан на использовании в качестве математической модели вихревой динамики системы точечных вихрей. Параметры системы вихрей определяются с помощью минимизации целевого функционала, оценивающего близость исходного и модельного векторных полей в опорных точках. Прогноз развития вихревой структуры осуществляется с помощью решения задачи Коши для модельной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с полученными на первом этапе параметрами и начальными данными. **Результаты.** В результате численных экспериментов с тестовыми примерами выяснено: алгоритм сходится из широкой области начальных приближений параметров вихревой конфигурации; метод эффективен даже при использовании небольшого числа опорных точек; алгоритм сходится в большинстве случаев, когда идентифицируемая структура состоит из достаточно удаленных вихрей; прогноз развития течения дает хорошие результаты в случае установившегося течения; при нарушении перечисленных условий доля удачных расчётов снижается, может иметь место ложная идентификация и ошибочный прогноз; при сходимости метода найденные координаты и циркуляции вихрей модельной системы близки к характеристикам вихрей тестовых конфигураций, структуры линий тока течений топологически эквивалентны. Прогноз развития вихревой структуры в тестовых примерах продемонстрировал хорошее совпадение на временах порядка нескольких оборотов вихрей, и правильное качественное описание на больших временах. **Заключение.** Развита и экспериментально изучена алгоритм решения обратной задачи идентификации и прямого прогноза развития структуры плоского вихревого течения, когда в начальный момент известны векторы скорости жидкости в конечном наборе опорных точек. Проведенное исследование продемонстрировало высокую эффективность алгоритма для исследования динамики плоских вихревых структур, состоящих из удаленных друг от друга вихрей.

**Ключевые слова:** вихревые структуры, алгоритм идентификации, системы точечных вихрей, минимизация.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-21-00371.

**Для цитирования:** Говорухин В. Н. Идентификация и прогноз динамики плоской вихревой структуры на основе математической модели системы точечных вихрей // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 6. С. 710–726. DOI: 10.18500/0869-6632-003071. EDN: PHVMFU

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Identification and dynamics prediction of a plane vortex structure based on a mathematical model of a point vortices system

V. N. Govorukhin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: ✉vngovoruhin@sfedu.ru

Received 13.07.2023, accepted 27.09.2023,

available online 13.11.2023, published 30.11.2023

**Abstract.** The aim of the article is developing and analyse an algorithmic method for solution finding of one inverse problem of 2d vortex fluid dynamics. It is identification and prediction of the flow structure evolution of the based on the data on fluid velocity vectors in a set of reference points. Theoretical analysis of convergence and adequacy of the method is difficult due to the ill-posedness typical of inverse problems, these issues studied experimentally. **Methods.** The proposed method uses a mathematical model of a point vortex dynamics system for identification and prediction flow structures. The parameters of the model system are found by minimising the functional that evaluates the closeness of the original and model vectors fields at the reference points. The prediction of the vortex structure dynamics is based on the solution of the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations with the parameters found in the first stage. **Results.** As a result of the calculations, we found it out: the algorithm converges to the desired minimum from a wide range of initial approximations; the algorithm converges in all cases when the identified structure consists of sufficiently distant vortices; the forecast of the development of the current gives good results with a steady flow; if the above conditions are violated, the part of successful calculations decreases, false identification and an erroneous forecast may occur; with the convergence of the method, the coordinates and circulation of the eddies of the model system are close to the characteristics of the eddies of the test configurations; the structures of the streamlines of the flows are topologically equivalent; convergence depends more on location than on the number of vectors used for identification. **Conclusion.** An algorithm for solving the problem of identifying and the evolution forecast of a 2d vortex flow structure is proposed when the fluid velocity vectors in a finite set of reference points are known. The method showed its high efficiency when using from 40 to 200 reference points. The results of the study make it possible to recommend the proposed algorithm for identifying flat vortex structures, which consist of vortices separated from each other.

**Keywords:** vortex structures, identification algorithm, systems of point vortices, minimization.

**Acknowledgements.** This work was supported by the grants the Russian Science Foundation, № 23-21-00371.

**For citation:** Govorukhin VN. Identification and dynamics prediction of a plane vortex structure based on a mathematical model of a point vortices system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(6):710–726. DOI: 10.18500/0869-6632-003071

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Алгоритмы и методы идентификации областей вихревых течений и прогноза их развития являются востребованными при решении многих проблем гидроаэродинамики. К ним можно отнести задачи прогноза синоптических потоков на основе спутниковых снимков морей, океанов и атмосферы [1, 2], обработки результатов физических и численных экспериментов [3–5], визуализации течений [6], кровотока [7], проектирования и оптимизации технических устройств [8–10]. Для решения перечисленных задач необходимы методы поиска и распознавания вихрей и их характеристик в фиксированный момент времени и прогноза изменения вихревой структуры во времени и пространстве. Такие возможности могут предоставить методы математического моделирования и анализа, включающие два этапа. На первом предполагается идентификация вихря по известной информации о течении, а для прогноза могут быть использованы нестационарные уравнения гидродинамики (см., например, [11–13]).

Для идентификации вихревой конфигурации требуется разработка и использование обратных подходов, когда известны характеристики течения в некоторых точках или областях,

а неизвестными являются количество, расположение, размеры, интенсивности вихрей. В последние десятилетия предложен ряд методов идентификации вихрей, большинство из которых можно разделить на два класса. Первый, и наиболее широко распространенный подход, состоит из математических критериев, основанных на локальных физических величинах, определяемых течением, таких, как поле скоростей, давления, завихренности и их производных. Примерами являются  $Q$ -метод,  $\lambda_2$ -метод,  $\Omega$ -метод, и другие. Описание и сравнительный анализ некоторых из перечисленных методов дан в статьях [14–17]. Вихрь при этом определяется как связанная область с высокой «плотностью» одной из характерных величин. Большинство таких методов являются математически строгими и физически непротиворечивыми, но требуют подробной информации о течении. Второй класс состоит из методов, использующих топологические свойства потока во всей области течения, или её подобластях. Такими характеристиками может быть замкнутость, или спиралевидность, линий тока частиц жидкости, наличие особых точек и сепаратрис в структуре потока [18, 19].

После удачного решения обратной задачи становится возможным прогноз развития структуры на основе решения нестационарных уравнений Эйлера, Навье–Стокса, других уравнений математической гидродинамики. Прямые методы решения таких задач хорошо развиты и широко применяются. Результатом вычислений в этом случае является динамика поля скоростей и других характеристик исследуемого течения, что дает возможность анализировать и прогнозировать структуру потока во времени [20–22].

Существенные трудности при идентификации вихревой структуры могут возникнуть при ограниченной информации о течении. В этом случае перечисленные методы, основанные на достаточно подробной информации о течении, отказывают и требуются иные подходы. Возможным решением в этом случае может быть использование математических моделей вихревой динамики. В статье [23] предложен алгоритм, основанный на использовании малого набора известных векторов скорости течения и математической модели системы точечных вихрей на плоскости. Особенно привлекательным на этом пути является то, что математическая модель может быть использована и для прогноза развития вихревой конфигурации во времени. В представленной статье предложено развитие алгоритма как для идентификации вихря, так и для прогноза двумерной вихревой динамики, проводится экспериментальное исследование применимости, адекватности и эффективности такого подхода. В качестве содержательного примера используются численные решения двумерных уравнений Эйлера идеальной жидкости с начальным условием в виде трёх вихревых пятен в прямоугольной области с непроницаемыми границами. Выбор этой конфигурации обусловлен тем, что система трёх точечных вихрей является простейшей, демонстрирующей нетривиальную динамику [24].

## 1. Постановка задачи и метод идентификации и прогноза динамики вихрей

Вихрь является одним из фундаментальных гидродинамических объектов, который эмпирически можно описать как область течения, в которой частицы вращаются вокруг общего центра или оси. Общепринятого математического определения вихря на данный момент нет, а его формулировка остается предметом дискуссий. Задача идентификации вихря может иметь различные постановки и не является математически корректной. Возможной, и используемой в статье, постановкой может быть описание плоского вихревого течения с помощью координат и интенсивностей центров вихрей, а также структур линий тока частиц жидкости на основе информации о скорости жидких частиц в конечном (возможно, малом) наборе опорных точек. Для поиска характеристик вихревой структуры можно использовать математические модели, простейшей из которых является система точечных вихрей. В этом случае интенсивности распределенных вихрей и их центров можно описывать с помощью свойств точечных вихрей.

**1.1. Описание метода идентификации и прогноза.** Пусть в некоторый момент времени известны векторы скорости вихревого течения в наборе из  $N$  опорных точек

$$U = \left\{ \left[ x^{(j)}, y^{(j)}, \mathbf{u}^{(j)} = \left( u_1^{(j)}, u_2^{(j)} \right) \right], j = 1, \dots, N \right\}, \quad (1)$$

где  $(x^{(j)}, y^{(j)})$  — координаты опорных точек, а  $\mathbf{u}^{(j)}$  — соответствующий вектор скорости. Необходимо определить интенсивности и координаты центров вихрей, формирующих данное течение. Для описания вихревой конфигурации будем использовать хорошо изученную систему точечных вихрей. Выбор этой математической модели обусловлен следующими причинами: относительная простота, качественно верное описание многих реальных течений [25, 26], топологическая эквивалентность линий тока вблизи точечного и окрестности ядра многих распределенных вихрей. При этом существенным недостатком модели является вырожденность поля скорости в точечном вихре, что должно быть учтено при построении алгоритма идентификации.

Движения  $K$  точечных вихрей на плоскости описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\omega_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \omega_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,k=1, i \neq k}^K \omega_i \omega_k \ln(r_{ik}), \quad i = 1, \dots, K. \quad (2)$$

Здесь  $(x_i, y_i)$  — координаты вихря с номером  $i$  на плоскости,  $r_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2$ , а  $\omega_i$  — его интенсивность (циркуляция). Очевидно, что  $H$  — гамильтониан и первый интеграл системы (2), то есть система консервативна. Начальные значения определяют значения интегралов системы точечных вихрей, а значит, инвариантные подпространства, на которых происходит динамика. Это означает отсутствие аттракторов и другие свойства динамики, характерные для консервативных систем.

Функция тока поля скорости, порождаемого системой точечных вихрей, имеет вид

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^K \omega_i \ln \left[ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right], \quad (3)$$

где  $(x, y)$  — координаты на плоскости. Тогда динамика пассивной частицы описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_1(x, y) &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\sum_{i=1}^K \frac{\omega_i}{2\pi} \frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \\ \dot{y} = v_2(x, y) &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \sum_{i=1}^K \frac{\omega_i}{2\pi} \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) задаёт используемое при идентификации вихревой структуры модельное поле скорости  $\mathbf{v}(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$  в любой точке плоскости. Поле  $\mathbf{v}(P, x, y)$  определяется параметрами конфигурации точечных вихрей  $P = \{K, (x_i, y_i, \omega_i), i = 1, \dots, K\}$ , то есть числом вихрей  $K$ , их интенсивностями  $\omega_i$  и координатами  $(x_i, y_i)$  в области течения. Идея предлагаемого алгоритма идентификации основана на поиске перечисленных параметров системы (2), (4) с использованием известных векторов (1). При этом центры и интенсивность вихрей течения приближаются точечными вихрями, несмотря на указанный выше недостаток математической модели.

Необходимо сформулировать условие, которое будет означать, что система точечных вихрей (2) при некоторых значениях параметров  $\hat{P} = \{\hat{K}, (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{\omega}_i), i = 1, \dots, \hat{K}\}$  качественно

описывает исходную вихревую конфигурацию, в силу имеющегося набора  $U$ . Для этого рассмотрим набор векторов модельной системы (4) в тех же опорных точках  $(x^{(j)}, y^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, N$ , что и (1):

$$V(P) = \left\{ \left[ x^{(j)}, y^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)} = \left( v_1^{(j)} = v_1(P, x^{(j)}, y^{(j)}), v_2^{(j)} = v_2(P, x^{(j)}, y^{(j)}) \right) \right], j = 1, \dots, N \right\}. \quad (5)$$

Если  $U \equiv V(P)$ , то естественно предположить, что система точечных вихрей (2) полностью описывает вихревое течение при значениях параметров  $P$  из имеющегося набора  $U$ .

Два вектора  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  можно сравнить с помощью двух величин:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|}, \quad \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right). \quad (6)$$

Величина  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  в (6) характеризует длины векторов, а  $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  — углы между ними. Обе характеристики принимают значения в интервале  $[0, 1]$ , равны нулю при  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  и единице, если  $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ .

Для сравнения двух наборов векторов в  $U$  и  $V(P)$  в заданном множестве опорных точек используем выражение

$$\sigma(U, V(P)) = \sum_{j=1}^N \left[ c_j d(\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)}(P)) + C_j \phi(\mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)}(P)) \right]. \quad (7)$$

В выражении (7)  $c_j$  и  $C_j$  — весовые коэффициенты, которые при вычислениях в статье принимаются положительными константами, причём  $c_j = 1 - C_j$ . Если  $U \equiv V(P)$ , то очевидно, что  $\sigma(U, V(P)) = 0$ . В силу идеализации математической модели совпадение наборов векторов (1) и (5) маловероятно. Естественно предположить, что чем меньше величина  $\sigma(U, V(P))$ , тем ближе два набора векторов, и математическая модель качественно лучше описывает структуру вихревой конфигурации. Другими словами, предполагаем, что исходный и модельный наборы векторов  $U$  и  $V(\hat{P})$  наиболее близки в указанном смысле, если (7) достигает минимума в пространстве параметров системы при  $P = \hat{P}$ .

Таким образом, задача идентификации вихревой структуры в рассмотренной постановке сводится к поиску параметров системы точечных вихрей, минимизирующих (7)

$$\hat{P} = \min_P \sigma(U, V(P)). \quad (8)$$

Для численного поиска минимума (8) в работе используется комбинированный алгоритм на основе методов Ньютона и градиентного спуска.

Отметим, что сформулированная постановка задачи идентификации вихревой структуры обладает многими недостатками — не является математически корректной, не всегда разрешима, решение может быть не единственным, результат может сильно зависеть от выбора опорных точек, порождающего набор  $U$  течения и др. Например, очевидно, что при  $N = 1$  идентификация по одному вектору невозможна. Аналитический анализ предложенного подхода весьма затруднителен, однако, первоначальные результаты работы [23] продемонстрировали эффективность метода для идентификации некоторых модельных течений. Далее, в разделе 2 статьи проводится экспериментальное исследование метода на примере вихревой структуры из трёх распределенных в пространстве вихрей в плоском квадратном контейнере.

Если искомым набор параметров  $\hat{P}$  найден, то структуру линий тока течения можно описать с помощью (3) при  $\omega_i = \hat{\omega}_i$ ,  $x_i = \hat{x}_i$ ,  $y_i = \hat{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, \hat{K}$ . Прогноз развития вихревой структуры может быть проведён с помощью решения задачи Коши для системы (2), (4) с начальными данными для точечных вихрей, задаваемыми  $\hat{P}$ , и координатами  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  для расчета траекторий частиц.

**1.2. Алгоритм идентификации и прогноза вихревой конфигурации.** Здесь представлен используемый в данной работе вариант алгоритма, основанный на описанном выше методе. Первым этапом является идентификация вихревой структуры, которая состоит из следующих шагов.

1. Инициализация. Это включает: определение опорных точек и векторов набора (1), количества используемых для описания точечных вихрей  $K$ , начального приближения  $P^{(m)}$ ,  $m = 0$ , для параметров системы (2), (4), начального шага  $h$  и точности  $\varepsilon$  метода минимизации, размера шага  $\delta$  для численного дифференцирования по параметрам модельной системы с помощью конечных разностей, числа шагов метода градиентного спуска  $M$ , максимального числа шагов алгоритма  $M_{\max}$ , минимального размера шага  $h_{\min}$ .
2. Шаг метода поиска минимума.

$$P^{(m+1)} = \begin{cases} P^{(m)} - h \nabla \sigma (U, V(P^{(m)})), & m \leq M, \\ P^{(m)} - h [\nabla^2 \sigma (U, V(P^{(m)}))]^{(-1)} \nabla \sigma (U, V(P^{(m)})), & m > M, \end{cases}$$

где  $\nabla \sigma$  и  $\nabla^2 \sigma$  соответственно градиент и матрица Гессе выражения (7) по параметрам модельной конфигурации  $P$ . Для вычисления производных используются аппроксимации центральными конечными разностями.

3. Проверка условия

$$\left\| \nabla \sigma (U, V(P^{(m+1)})) \right\| < \varepsilon. \quad (9)$$

Если условие (9) выполнено, то найдено приближение вихревой конфигурации  $\hat{P} = P^{(m+1)}$ , и работа алгоритма прекращается. Если нет, то — переход к следующему шагу алгоритма.

4. Проверка условия  $\left\| \nabla \sigma (U, V(P^{(m+1)})) \right\| < \left\| \nabla \sigma (U, V(P^{(m)})) \right\|$ . При его выполнении  $h = h \cdot 1.01$ , и  $h = h \cdot 0.5$ ,  $P^{(m+1)} = P^{(m)}$ , если условие не соблюдается.
5.  $m = m + 1$ . Проверка условий  $m < M_{\max}$  и  $h > h_{\min}$ . При выполнении обоих условий — переход к пункту 2 алгоритма, и «аварийное» окончание работы в противном случае.

Прогноз динамики вихревой структуры (второй этап алгоритма) может быть реализован только при успешной идентификации вихревой структуры (первый этап) и найденном минимизирующем (7) наборе параметров модельной системы  $\hat{P}$ . Этот этап состоит в решении задачи Коши для системы уравнений (2), (4), при числе точечных вихрей  $\hat{K}$  с интенсивностями  $\hat{\omega}_i$ ,  $i = 1, \dots, \hat{K}$ . В качестве начальных условий при  $t = 0$  принимаются:  $x_i(0) = \hat{x}_i$ ,  $y_i(0) = \hat{y}_i$  и  $x(0) = x_s$ ,  $y(0) = y_s$ , где  $(x_s, y_s)$  — координаты предназначенной для прогноза пассивной частицы при  $t = 0$ . Для решения задачи Коши на интервале  $t \in [0, T]$  используется метод Рунге–Кутты,  $T$  — длительность прогноза.

## 2. Идентификация и прогноз динамики тестовых конфигураций

В качестве содержательного примера для идентификации и прогноза вихревой структуры используем решения задачи динамики невязкой несжимаемой жидкости в квадратном контейнере. В терминах функции тока  $\psi(t, x, y)$  и завихренности  $\omega(t, x, y)$  динамика плоского вихревого течения описывается системой уравнений Эйлера

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv \omega_t + \omega_x \psi_y - \omega_y \psi_x = 0, \quad (10)$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\omega. \quad (11)$$

Здесь  $\frac{D}{Dt}$  — материальная производная. Нижний индекс обозначает частную производную по соответствующей переменной.

Скорость жидкости  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  выражается через функцию тока

$$u_1 = \psi_y, \quad u_2 = -\psi_x, \quad (12)$$

Течение рассматривается в квадратной области  $D : \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$ . На границе  $D$  заданы следующие граничные условия:

$$\psi(t, 0, y) = \psi(t, a, y) = \psi(t, x, 0) = \psi(t, x, a) = 0. \quad (13)$$

Уравнения и граничные условия необходимо дополнить начальным условием

$$\omega(0, x, y) = \Omega(x, y), \quad (14)$$

где  $\Omega(x, y)$  — некоторая функция, определённая в  $D$ .

Известно, что задача (10)–(14) разрешима, её решения описывают многие реальные течения, когда влияние вязкости жидкости пренебрежимо мало. Для численного решения использовался бессеточно-спектральный метод. Подробное описание метода для расчета течений в замкнутых и проточных областях можно найти в [21, 27], а в открытых — в [28].

**2.1. Постановка вычислительных экспериментов.** Для экспериментального исследования эффективности предлагаемого метода идентификации рассмотрим квадратную область  $D$  со стороной  $a = 8$ . В качестве начального распределения завихренности (14) будем использовать конфигурацию из трёх одинаковых вихрей с центрами, расположенными в вершинах равностороннего треугольника с центроидом в середине  $D$  (точке  $(4, 4)$ ), отстоящими на 1 от центроида вершинами  $(x_c^{(i)}, y_c^{(i)})$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$\Omega(x, y) = \sum_{i=1}^3 W(x_c^{(i)}, y_c^{(i)}, x, y), \quad (15)$$

где  $W(x, y)$  — функция распределения завихренности в распределенном вихре.

Рассмотрим два качественно различных примера, отличающиеся начальным распределением завихренности в вихрях:

$$W(x_c^{(i)}, y_c^{(i)}, x, y) = \begin{cases} G \cdot e^{-10 \cdot (x_c^{(i)} - x)^2 - 10 \cdot (y_c^{(i)} - y)^2}, & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (16)$$

$$W(x_c^{(i)}, y_c^{(i)}, x, y) = \begin{cases} G \cdot (R^2 - r^2)^2, & r \leq R \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (17)$$

где  $r = \sqrt{(x_c^{(i)} - x)^2 + (y_c^{(i)} - y)^2}$ , а коэффициент  $G$  выбирается так, чтобы интенсивность (циркуляция) всего вихревого пятна равнялась единице. При обоих начальных состояниях (15), (16) и (15), (17) суммарная завихренность всей конфигурации равна 3.

Из физических, вычислительных экспериментов известен эмпирический закон взаимодействия вихревых пятен одной ориентации (направления вращения). При больших расстояниях между вихрями они вращаются вокруг общего центра завихренности. Если расстояние между двумя вихрями меньше некоторого критического, то они сливаются (см. [29] и ссылки в этой статье). Величина критического расстояния зависит от распределения и интенсивности завихренности в вихрях. Вычислительные эксперименты с двумя начальными конфигурациями показали, что в случае (15), (16) формируется квазистационарная вихревая структура (рис. 1). При начальном

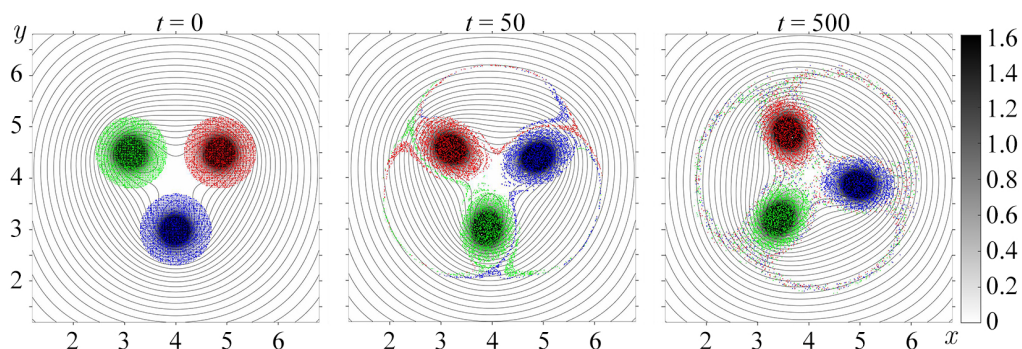


Рис. 1. Три вихря в различные моменты времени (формирование квазистационарной структуры) для начальной конфигурации (15), (16) (цвет онлайн)

Fig. 1. Three vortices at different times (the formation of a quasi-stationary structure) for the initial configuration (15), (16) (color online)

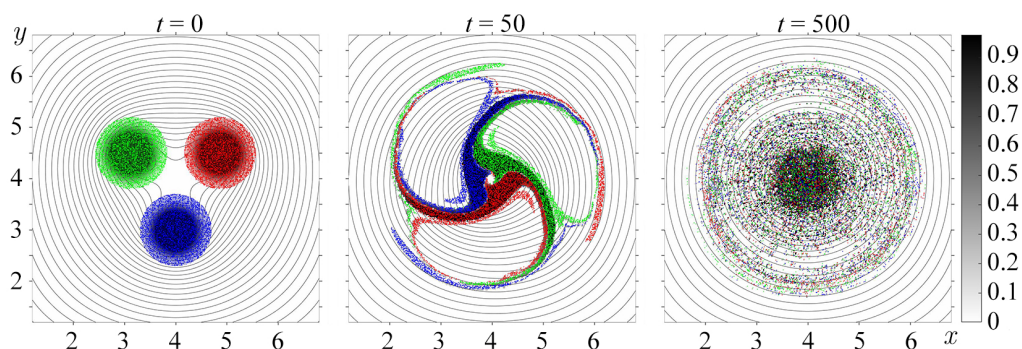


Рис. 2. Три вихря в различные моменты времени (слияние вихрей) для начальной конфигурации (15), (17) (цвет онлайн)

Fig. 2. Three vortices at different times (vortex merging) for the initial configuration (15), (17) (color online)

распределении (15), (17) все три вихря сливаются в один (рис. 2). На рисунках изображены: распределение завихренности (оттенками серого), маркерные частицы (для каждого начального вихря своим цветом) и линии тока течения. В качестве характеристик вихрей используем координаты центров завихренности вихрей и их циркуляцию [12]. Применим к полученным вихревым структурам предложенный метод идентификации и прогноза.

**2.2. Успешная идентификация и прогноз.** При начальной вихревой конфигурации (15), (16) на всем рассматриваемом интервале времени  $t \in [0, 1000]$  сохраняются три вихревых пятна, которые вращаются вокруг общего центра и обмениваются филаментами при  $t > 50$  (см. рис. 1). В этом случае для любого  $t$  в результате первого этапа алгоритма при сходимости метода идентифицируется структура из трех точечных вихрей, координаты которых и интенсивности близки к характеристикам вихревых пятен распределенной в пространстве конфигурации. Второй этап алгоритма демонстрирует хороший прогноз на интервале времени, соответствующем нескольким оборотам вихрей.

Приведём пример удачной идентификации и прогноза (рис. 3 и рис. 4). В качестве векторов набора  $U$  в (1) задавались 40 случайно распределенных векторов поля (12), полученного в результате решения задачи (10)–(14) бессеточно-спектральным методом при  $t = 200$ . Векторы набора  $U$  для расчета изображены пунктирной линией на рис. 3, а. Координаты центров завихренности вихревых пятен тестовой конфигурации при  $t = 200$ : (3.694, 3.104), (3.373, 4.710), (4.926, 4.193),



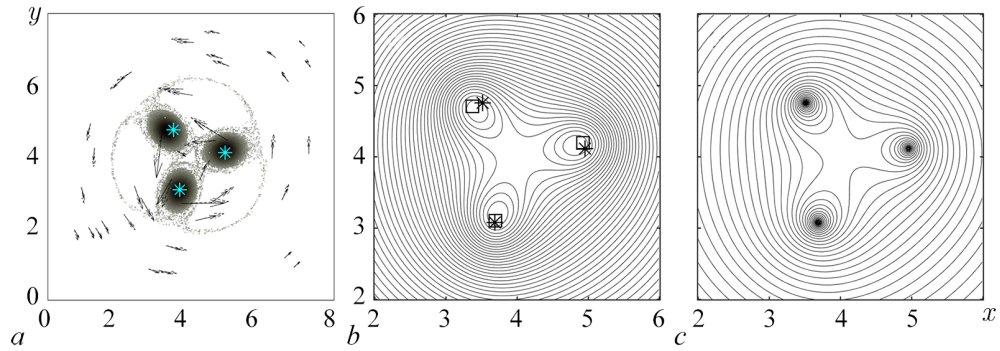


Рис. 3. Результат первого этапа алгоритма (идентификации) для конфигурации рис. 1 при  $t = 200$ .  $a$  – Распределение завихренности тестовой конфигурации (оттенки серого), векторы исходного  $U$  (пунктир) и полученного модельного  $V$  (сплошные линии) наборов векторов;  $b$  – линии тока исходного течения, центры завихренности пятен (квадраты) и модельные вихри (звездочки);  $c$  – линии тока модельной системы (цвет онлайн)

Fig. 3. The result of the first stage of the algorithm (identification) for the configuration fig. 1 at  $t = 200$ .  $a$  – Test configuration vorticity distribution (shades of grey), vectors of initial  $U$  (dotted line) and found model  $V$  (solid lines) sets of vectors;  $b$  – streamlines of the initial flow, vorticity centres of spots (squares) and model vortices (asterisks);  $c$  – streamlines of the model system (color online)

а их циркуляции приближенно равны единице. В качестве начального приближения для алгоритма указывалась система  $K = 3$  точечных вихрей. В результате работы алгоритма найден

$$\hat{P} = \{ \hat{K} = 3, (\hat{x}_1 = 3.687, \hat{y}_1 = 3.079, \hat{\omega}_1 = 0.956), (\hat{x}_2 = 3.514, \hat{y}_2 = 4.756, \hat{\omega}_2 = 0.830), (\hat{x}_3 = 4.953, \hat{y}_3 = 4.117, \hat{\omega}_3 = 0.949) \}.$$

Видно, что исходные и полученные модельные характеристики близки. Линии тока идентифицируемого и модельного полей качественно идентичны (рис. 3,  $b, c$ ), а модельный набор векторов  $V$  незначительно отличается от  $U$  (рис. 3,  $a$ ).

Результаты второго этапа алгоритма (прогноза) на интервале  $t \in [0, 400]$  с момента идентификации представлены на рис. 4. Видно, что структура траекторий центров завихренности исходной тестовой системы (рис. 4,  $a$ ) и найденных в результате алгоритма идентификации вихрей модельной системы (рис. 4,  $b$ ) качественно идентичны. Более того, имеет место и хорошее

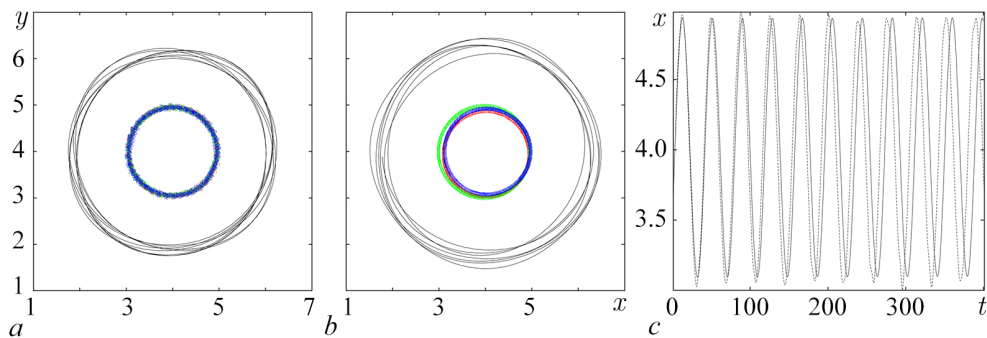


Рис. 4. Результат прогноза развития вихревой конфигурации рис. 1 для  $t > 200$ .  $a$  – Траектории центров завихренности распределённых вихрей (символы) и одной пассивной частицы (сплошная линия);  $b$  – траектории точечных вихрей модельной системы (символы) и пассивной частицы (сплошная линия);  $c$  – зависимость от времени координаты  $x$  центра завихренности одного из распределённых вихрей (пунктир) и соответствующего точечного вихря модельной системы (сплошная линия) (цвет онлайн)

Fig. 4. The result of the forecast of the development of the vortex configuration fig. 1 for  $t > 200$ .  $a$  – Trajectories of vorticity centres of vortex patches (symbols) and one passive particle;  $b$  – trajectories of point vortices of the model system (symbols) and passive particle (solid line);  $c$  – time dependence of the coordinate  $x$  of the center of vorticity (dotted line) and the corresponding point vortex of the model system (solid line) (color online)

количественное совпадение траекторий центра завихренности и точечного вихря (рис. 4, *c*). То есть для данного примера можно констатировать достоверный прогноз развития вихревой структуры с помощью предложенного алгоритма.

**2.3. Примеры успешной идентификации и некорректного прогноза.** Применение алгоритма для вихревой структуры с начальным распределением (15), (17) даёт не такие хорошие результаты. На рассматриваемом интервале времени  $t \in [0, 1000]$  топологическая структура течения не сохраняется (см. рис. 2). На первом этапе три вихря сближаются, затем происходит их слияние с образованием тонких структур, а финальным состоянием является один вихрь. Качество идентификации зависит от её момента.

В начальный момент  $t = 0$ , и до начала взаимодействия вихрей тестового течения, первый этап алгоритма даёт корректный результат. На рис. 5 приведен пример успешной работы первого этапа алгоритма с использованием  $N = 40$  векторов в наборе  $U$ . Координаты центров завихренности вихрей тестовой конфигурации при  $t = 0$ : (3.134, 4.5), (4, 3), (4.866, 4.5), а их интенсивности равны единице. Результат работы алгоритма:

$$\hat{P} = \{ \hat{K} = 3, (\hat{x}_1 = 3.140, \hat{y}_1 = 4.430, \hat{\omega}_1 = 0.993), (\hat{x}_2 = 3.927, \hat{y}_2 = 3.056, \hat{\omega}_2 = 0.824), (\hat{x}_3 = 4.874_3, \hat{y}_3 = 4.424, \hat{\omega}_3 = 0.970) \}.$$

То есть координаты и интенсивности точечных вихрей достаточно близки. Также видно, что структуры линий тока тестового (рис. 5, *b*) и модельного течений (рис. 5, *c*) качественно одинаковы, точечные вихри модельной системы близки к центрам завихренности распределенных вихрей, как и векторы наборов  $U$  и  $V$  (рис. 5, *a*). Этап прогноза в данном случае корректен только на коротких временах. Так, для представленного примера это только один оборот структуры (рис. 6).

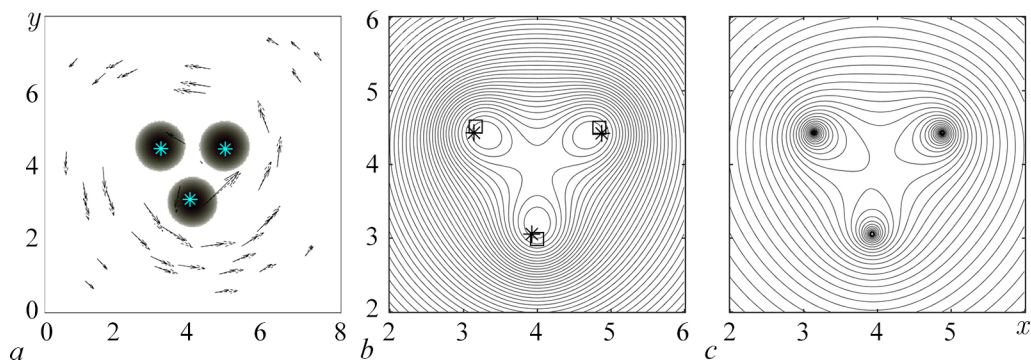


Рис. 5. Результат идентификации конфигурации рис. 2 при  $t = 0$ . Пояснения аналогичны с рис. 3 (цвет онлайн)

Fig. 5. Result of configuration identification fig. 2 at  $t = 0$ . Explanations for the figure see in fig. 3 (color online)

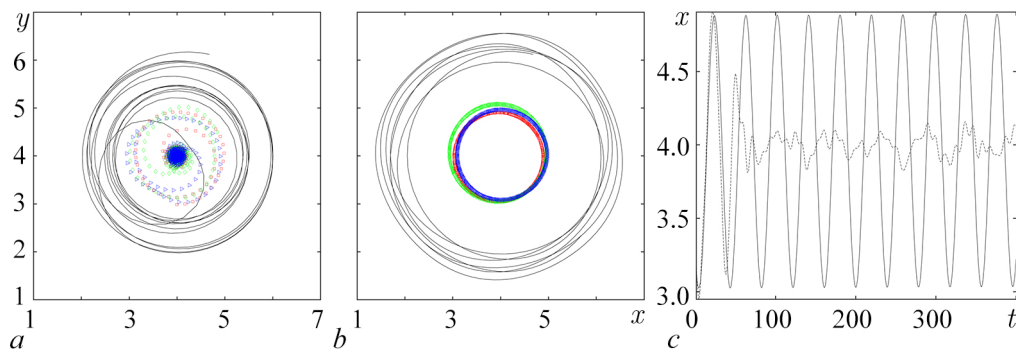


Рис. 6. Результат прогноза динамики вихревой конфигурации рис. 2 для  $t > 0$ . Пояснения на рис. 4 (цвет онлайн)

Fig. 6. The result of predicting the dynamics of the vortex configuration fig. 2 for  $t > 0$ . Explanations in fig. 4 (color online)

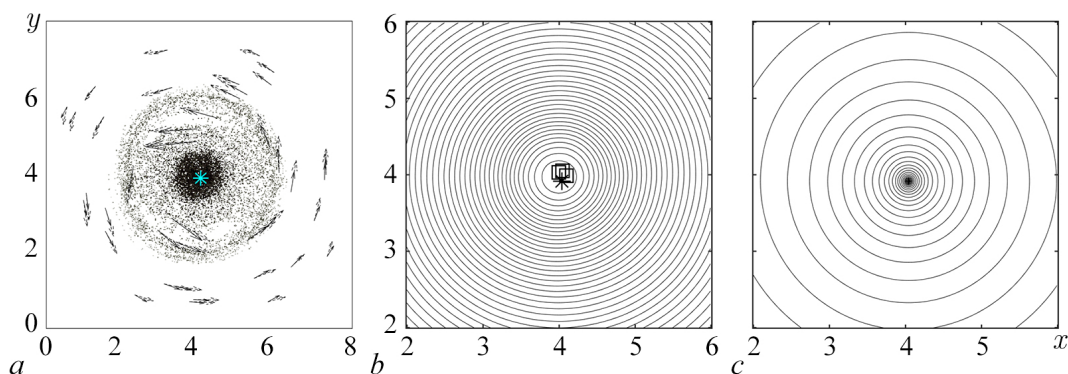


Рис. 7. Результат идентификации конфигурации рис. 2 при  $t = 500$ . Пояснения аналогичны с рис. 3 (цвет онлайн)  
 Fig. 7. Result of configuration identification fig. 2 at  $t = 500$ . Explanations see in fig. 3 (color online)

Это объясняется тем, что модельная система точечных вихрей не описывает процессов слияния вихрей, что происходит, начиная с  $t \approx 50$ .

До момента слияния вихревых пятен тестовой структуры алгоритм или не сходится, или даёт ошибочный результат, смотри следующий подраздел. После формирования одного вихря структура тестового течения не меняется, модельная система позволяет идентифицировать структуру течения. При этом при использовании трёх точечных вихрей  $K = 3$  алгоритм сходится к качественно неверной структуре. При использовании одного модельного вихря этот эффект пропадает (рис. 7), но прогноз теряет смысл в силу тривиальности динамики модельной системы. Результатом работы алгоритма при  $t = 500$  является:  $\hat{P} = \{\hat{K} = 1, (\hat{x}_1 = 4.038, \hat{y}_1 = 3.916, \hat{\omega}_1 = 2.880)\}$ .

**2.4. Пример ошибочной работы алгоритма.** Применение алгоритма для переходных (не установившихся во времени) течений со сложной структурой может приводить к ложной идентификации и неверному прогнозу её развития. Приведём пример такого расчёта (рис. 8). Видно, что координаты найденных точечных вихрей отличаются от координат центров завихренности распределенных. Несовпадение этих характеристик, вообще говоря, допустимо, но имеет место и качественное различие структур линий тока тестовой и модельной систем (рис. 8, *b* и рис. 8, *c*). Несмотря на это, наборы опорных и модельных векторов оказались близки (рис. 8, *a*). То есть в этом случае минимизация (9) привела к качественно неверным выводам о структуре течения. Видимо, это следствие возможной неединственности решений задачи минимизации.

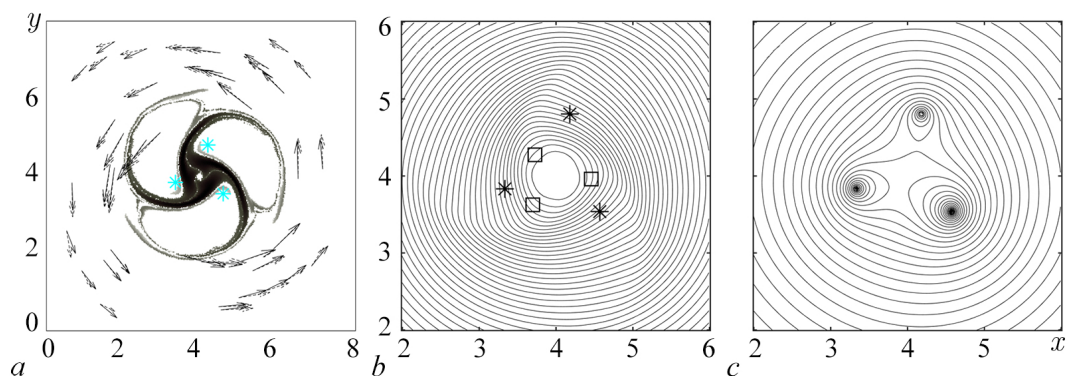


Рис. 8. Результат идентификации конфигурации рис. 2 при  $t = 50$ . Пояснения аналогичны с рис. 3 (цвет онлайн)  
 Fig. 8. Result of configuration identification fig. 2 at  $t = 50$ . Explanations see in fig. 3 (color online)

### 3. Экспериментальный анализ алгоритма

В силу некорректности обратной задачи идентификации теоретический анализ условий сходимости алгоритма и адекватности предлагаемого прогноза затруднителен. Для изучения зависимости работы алгоритма от исходной информации  $U$ , см. (1), и начального приближения  $P^{(0)}$ , раздел 1.2, было проведено две серии вычислительных экспериментов. В качестве тестовой использовалась распределенная в пространстве вихревая структура, вычисленная с начальным распределением завихренности (15), (16) при  $t = 100$  (см. рис. 1). Координаты центров завихренности распределенных вихрей: (3.396, 4.734), (3.644, 3.117), (4.972, 4.1522).

В первой серии экспериментов при фиксированном начальном приближении

$$P^{(0)} = \left\{ K = 3, (x_1^{(0)} = 3, y_1^{(0)} = 5, \omega_1^{(0)} = 0.75), (x_2^{(0)} = 5, y_2^{(0)} = 4, \omega_2^{(0)} = 0.75), \right. \\ \left. (x_3^{(0)} = 4, y_3^{(0)} = 3, \omega_3^{(0)} = 0.75) \right\} \quad (18)$$

изменялось число опорных точек  $N$  в наборе  $U$ . Для каждого  $N$  проводилось 100 расчетов, расположение опорных точек задавалось случайно в  $D$ . Результаты приведены в табл. 1. В первой колонке указано количество опорных точек, во второй — процент удачной идентификации, а в остальных — усреднённые координаты и интенсивности модельных вихрей. Под удачной идентификацией понимается близость точечных вихрей к характеристикам распределенных и топологическая эквивалентность линий тока. При  $N < 10$  набор  $U$  содержит недостаточно информации о структуре течения, что является причиной низкой вероятности успешной идентификации структуры. С ростом  $N$  процент успешных расчетов растет, уже при  $N = 10$  их около половины. Максимальная доля успешной идентификации достигается при  $N = 100$ , но и на всем интервале  $N \in [20, 200]$  вероятность успешной идентификации больше 80%. То есть для эффективной работы алгоритма достаточно иметь информацию в небольшом наборе опорных точек.

Во второй серии вычислительных экспериментов случайно изменялся не только набор  $U$ , но и начальное приближение алгоритма  $P^{(0)}$ . Начальные приближения для координат точечных вихрей выбирались случайно в единичном круге с центром в точках набора (18), а приближения для интенсивностей — из интервала  $[0.5, 2]$ . Результаты даны в табл. 2. Видно, что случайное

Таблица 1 / Table 1

$N$	%	$\tilde{x}_1$	$\tilde{y}_1$	$\tilde{\omega}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{y}_2$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{y}_3$	$\tilde{\omega}_3$
5	27	3.462	4.774	1.332	3.745	3.153	1.296	4.814	4.272	1.232
10	51	3.283	4.631	0.930	3.764	3.066	0.948	4.936	4.300	0.983
15	70	3.272	4.671	0.949	3.805	3.091	0.987	4.947	4.314	0.899
25	85	3.283	4.636	0.930	3.812	3.087	0.963	4.909	4.301	0.936
50	92	3.308	4.647	0.954	3.798	3.087	0.945	4.898	4.296	0.926
100	95	3.307	4.636	0.924	3.805	3.100	0.953	4.899	4.295	0.926
200	92	3.308	4.635	0.948	3.806	3.091	0.933	4.898	4.287	0.927

Таблица 2 / Table 2

$N$	%	$x_1$	$y_1$	$\omega_1$	$x_2$	$y_2$	$\omega_2$	$x_3$	$y_3$	$\omega_3$
5	24	3.490	4.628	1.169	3.965	3.350	1.198	4.754	4.180	1.046
10	43	3.341	4.670	0.989	3.756	3.118	1.065	4.886	4.270	1.042
15	70	3.274	4.655	0.950	3.756	3.134	1.027	4.924	4.309	0.924
25	75	3.275	4.647	0.927	3.817	3.078	0.946	4.893	4.278	0.982
50	87	3.298	4.652	0.919	3.787	3.098	0.949	4.896	4.285	0.938
100	93	3.316	4.618	0.943	3.792	3.076	0.919	4.900	4.282	0.947
200	92	3.318	4.637	0.936	3.801	3.090	0.939	4.906	4.290	0.921

возмущение начального приближения немного снизило вероятность успешной идентификации почти для всех  $N$ , но это снижение незначительное, что демонстрирует эффективность алгоритма в широком диапазоне начальных приближений. Отметим, что усредненные координаты точечных вихрей и их интенсивности близки соответствующим характеристикам распределенных вихрей тестовой конфигурации, смотри обе таблицы.

### Заключение и обсуждение

В статье предложен алгоритмический метод решения обратной задачи идентификации и прогноза развития плоского вихревого течения, когда известны векторы скорости жидкости в конечном наборе опорных точек. Метод основан на использовании математической модели системы точечных вихрей и минимизации целевого функционала, оценивающего близость наборов векторов скорости исходного и модельного течений. В силу присущей обратным задачам некорректности и сильной зависимости результатов от исходной информации, теоретический анализ методов их решения весьма затруднителен. Это относится и к рассматриваемой задаче, поэтому применимость и эффективность алгоритма в статье исследована экспериментально с использованием достаточно содержательного примера — динамики и взаимодействия трёх распределенных вихрей.

Проведены численные эксперименты по идентификации тестовых течений. Используемые для идентификации наборы векторов формировались в случайно распределенных наборах опорных точек и определялись вычисленными в результате решения нестационарной задачи для уравнений Эйлера значениями. Количество опорных точек варьировалось от 5 до 200. Алгоритм продемонстрировал эффективную сходимость в том случае, когда вихревая структура состояла из достаточно удаленных друг от друга распределенных вихрей. Вычисленные координаты вихрей модельной системы и их интенсивности оказались близки к характеристикам тестовых пространственно распределенных вихрей во всех случаях, когда алгоритм успешно сходился. Кроме того, структуры известных линий тока тестовых и построенных для модельных течений топологически эквивалентны. Проведенный для этого случая прогноз динамики с помощью решения задачи Коши для модельной системы показал хорошее совпадение на временах порядка нескольких оборотов структуры и правильное качественное описание на больших временах. Результаты существенно ухудшались при усложнении вихревой конфигурации и при взаимодействии тестовых распределенных вихрей. Численный анализ алгоритма показал, что сходимость метода сильно зависит от расположения опорных точек, в которых заданы векторы исходного набора. Для успешной сходимости в рассмотренных примерах достаточно небольшого (порядка десятков) количества используемых для идентификации векторов. Кроме того, алгоритм сходится к искомому минимуму из широкой области начальных приближений.

Многие проблемы и неточности, возникающие при применении алгоритма, связаны с недостатками используемой простейшей модельной системы вихревой динамики. Основным её недостатком является вырожденность модельного векторного поля непосредственно в точечном вихре и, как следствие, большое значение скорости в их окрестности. Это противоречит реальным двумерным вихрям, в центре ядра которых скорость жидкости равна нулю и мала в его окрестности. Этот дефект математической модели может приводить к неправильной работе алгоритма при наличии опорных точек вблизи ядер вихрей. Кроме того, системы точечных вихрей не описывают такие процессы, как взаимодействия и слияние распределенных вихрей, наличие фоновых течений и др. Несмотря на это, достоинствами простейшей модели является её относительная математическая простота и адекватное описание линий тока многих вихревых течений, что позволило успешно идентифицировать тестовые вихревые структуры, состоящие из невзаимодействующих вихрей, и проводить прогноз их динамики.

Избавиться от недостатков модельной системы можно двумя способами — не учитывать опорные векторы из окрестности ядер вихрей, а также из окрестности точечных вихрей модельной системы. Другим, и более перспективным, является использование математических моделей вихревой динамики, адекватно описывающих поле скорости во всей области течения и динамические вихревые процессы. Это дальнейшее направление наших исследований в ближайшее время. Полученные в статье результаты с использованием простейшей модели продемонстрировали эффективность и реализуемость предложенного подхода решения рассмотренной обратной задачи.

## Список литературы

1. *Александина М. Г., Еременко А. С., Загумённов А. А., Качур В. А.* Вихри в океане и атмосфере: расчет по спутниковым изображениям // *Метеорология и гидрология*. 2016. № 9. С. 41–54.
2. *Белоненко Т. В., Шоленинова П. В.* Об идентификации синоптических вихрей по спутниковым данным на примере акватории северо-западной части Тихого океана // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. 2016. Т. 13, № 5. С. 79–90. DOI: 10.21046/2070-7401-2016-13-5-79-90.
3. *Graftieaux L., Michard M., Grosjean N.* Combining PIV, POD and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows // *Meas. Sci. Technol.* 2001. Vol. 12, no. 9. P. 1422–1429. DOI: 10.1088/0957-0233/12/9/307.
4. *Kida S., Miura H.* Identification and analysis of vortical structures // *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. 1998. Vol. 17, no. 4. P. 471–488. DOI: 10.1016/S0997-7546(98)80005-8.
5. *Menon K., Mittal R.* Quantitative analysis of the kinematics and induced aerodynamic loading of individual vortices in vortex-dominated flows: A computation and data-driven approach // *Journal of Computational Physics*. 2021. Vol. 443. P. 110515. DOI: 10.1016/j.jcp.2021.110515.
6. *Волков К. Н., Емельянов В. Н., Тетерина И. В., Яковчук М. С.* Визуализация вихревых течений в вычислительной газовой динамике // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2017. Т. 57, № 8. С. 1374–1391. DOI: 10.7868/S0044466917080154.
7. *Yang K., Wu S., Ghista D. N., Yang D., Wong K. K. L.* Automated vortex identification based on Lagrangian averaged vorticity deviation in analysis of blood flow in the atrium from phase contrast MRI // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2022. Vol. 216. P. 106678. DOI: 10.1016/j.cmpb.2022.106678.
8. *Soto-Valle R., Cioni S., Bartholomay S., Manolesos M., Nayeri C. N., Bianchini A., Paschereit C. O.* Vortex identification methods applied to wind turbine tip vortices // *Wind Energy Science*. 2022. Vol. 7, no. 2. P. 585–602. DOI: 10.5194/wes-7-585-2022.
9. *Zhang Z., Dong S., Jin R., Dong K., Hou L., Wang B.* Vortex characteristics of a gas cyclone determined with different vortex identification methods // *Powder Technology*. 2022. Vol. 404. P. 117370. DOI: 10.1016/j.powtec.2022.117370.
10. *Xue Y., Kumar C., Lee S.-K., Giacobello M., Manovski P.* Identification and analysis of the meandering of a fin-tip vortex using Proper Orthogonal Decomposition (POD) // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2020. Vol. 82. P. 108556. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2020.108556.
11. *Xiong S., He X., Tong Y., Deng Y., Zhu B.* Neural vortex method: From finite Lagrangian particles to infinite dimensional Eulerian dynamics // *Computers & Fluids*. 2023. Vol. 258. P. 105811. DOI: 10.1016/j.compfluid.2023.105811.
12. *Говорухин В. Н.* Численный анализ динамики распределенных вихревых конфигураций // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2016. Т. 56, № 8. С. 1491–1505. DOI: 10.7868/S004446691608007X.
13. *Филимонова А. М.* Динамика и адвекция в вихревом парке // *Известия вузов. ПНД*. 2019. Т. 27, № 4. С. 71–84. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-4-71-84.

14. Jeong J., Hussain F. On the identification of a vortex // *Journal of Fluid Mechanics*. 1995. Vol. 285. P. 69–94. DOI: 10.1017/S0022112095000462.
15. Kolář V. Vortex identification: New requirements and limitations // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2007. Vol. 28, no. 4. P. 638–652. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2007.03.004.
16. Giagkiozis I., Fedun V., Scullion E., Jess D. B., Verth G. Vortex flows in the solar atmosphere: Automated identification and statistical analysis // *The Astrophysical Journal*. 2018. Vol. 869, no. 2. P. 169. DOI: 10.3847/1538-4357/aaf797.
17. Bai X., Cheng H., Ji B., Long X., Qian Z., Peng X. Comparative Study of different vortex identification methods in a tip-leakage cavitating flow // *Ocean Engineering*. 2020. Vol. 207. P. 107373. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.107373.
18. Canivete Cuissa J. R., Steiner O. Innovative and automated method for vortex identification // *A&A*. 2022. Vol. 668. P. A118. DOI: 10.1051/0004-6361/202243740.
19. Sadarjoen I. A., Post F. H. Detection, quantification, and tracking of vortices using streamline geometry // *Computers & Graphics*. 2000. Vol. 24, no. 3. P. 333–341. DOI: 10.1016/S0097-8493(00)00029-7.
20. Говорухин В. Н., Филимонова А. М. Анализ структуры плоских вихревых течений и их изменений во времени // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2021. Т. 14, № 4. С. 367–376. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.30.
21. Govorukhin V. N. An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2023. Vol. 95, no. 4. P. 579–602. DOI: 10.1002/flid.5163.
22. Ahmed S. E., Pawar S., San O., Rasheed A., Tabib M. A nudged hybrid analysis and modeling approach for realtime wake-vortex transport and decay prediction // *Computers & Fluids*. 2021. Vol. 221. P. 104895. DOI: 10.1016/j.compfluid.2021.104895.
23. Говорухин В. Н. Алгоритм идентификации вихревых пятен на основе моделей точечных вихрей // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. 2020. № 3(207). С. 11–18. DOI: 10.18522/1026-2237-2020-3-11-18.
24. Говорухин В. Н. Перенос пассивных частиц в поле скорости движущегося по плоскости вихревого триполя // *Известия вузов. ПНД*, 2023. Т. 31, № 3. С. 286–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003039.
25. Velasco Fuentes O. U., van Heijst G. J. F., van Lipzig N. P. M. Unsteady behaviour of a topography-modulated tripole // *Journal of Fluid Mechanics*. 1996. Vol. 307. P. 11–41. DOI: 10.1017/S002211209600002X.
26. Geldhauser C., Romito M. The point vortex model for the Euler equation // *AIMS Mathematics*. 2019. Vol. 4, no. 3. P. 534–575. DOI: 10.3934/math.2019.3.534.
27. Говорухин В. Н. Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2011. Т. 51, № 6. С. 1133–1147. DOI: 10.1134/S096554251106008X.
28. Говорухин В. Н., Филимонова А. М. Расчет плоских геофизических течений невязкой несжимаемой жидкости бессеточно-спектральным методом // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2019. Т. 11, № 3. С. 413–426. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-413-426.
29. Leweke T., Le Dizès S., Williamson C. H. K. Dynamics and instabilities of vortex pairs // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 48. P. 507–541. DOI: 10.1146/annurev-fluid-122414-034558.

## References

1. Aleksanina MG, Eremenko AS, Zagumenov AA, Kachur VA. Eddies in the ocean and atmosphere: Identification by satellite imagery. *Russian Meteorology and Hydrology*. 2016;41(9):620–628. DOI: 10.3103/S1068373916090041.

2. Belonenko TV, Sholeninova PV. On identification of mesoscale eddies from satellite altimetry based on the area in the NW Pacific. *Current Problems in Remote Sensing of the Earth from Space*. 2016;13(5):79–90 (in Russian). DOI: 10.21046/2070-7401-2016-13-5-79-90.
3. Graftieaux L, Michard M, Grosjean N. Combining PIV, POD and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows. *Meas. Sci. Technol.* 2001;12(9):1422–1429. DOI: 10.1088/0957-0233/12/9/307.
4. Kida S, Miura H. Identification and analysis of vortical structures. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. 1998;17(4):471–488. DOI: 10.1016/S0997-7546(98)80005-8.
5. Menon K, Mittal R. Quantitative analysis of the kinematics and induced aerodynamic loading of individual vortices in vortex-dominated flows: A computation and data-driven approach. *Journal of Computational Physics*. 2021;443:110515. DOI: 10.1016/j.jcp.2021.110515.
6. Volkov KN, Emel'yanov VN, Teterina IV, Yakovchuk MS. Visualization of vortical flows in computational fluid dynamics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(8):1360–1375. DOI: 10.1134/S0965542517080139.
7. Yang K, Wu S, Ghista DN, Yang D, Wong KKL. Automated vortex identification based on Lagrangian averaged vorticity deviation in analysis of blood flow in the atrium from phase contrast MRI. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2022;216:106678. DOI: 10.1016/j.cmpb.2022.106678.
8. Soto-Valle R, Cioni S, Bartholomay S, Manolesos M, Nayeri CN, Bianchini A, Paschereit CO. Vortex identification methods applied to wind turbine tip vortices. *Wind Energy Science*. 2022;7(2):585–602. DOI: 10.5194/wes-7-585-2022.
9. Zhang Z, Dong S, Jin R, Dong K, Hou L, Wang B. Vortex characteristics of a gas cyclone determined with different vortex identification methods. *Powder Technology*. 2022;404:117370. DOI: 10.1016/j.powtec.2022.117370.
10. Xue Y, Kumar C, Lee SK, Giacobello M, Manovski P. Identification and analysis of the meandering of a fin-tip vortex using Proper Orthogonal Decomposition (POD). *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2020;82:108556. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2020.108556.
11. Xiong S, He X, Tong Y, Deng Y, Zhu B. Neural vortex method: From finite Lagrangian particles to infinite dimensional Eulerian dynamics. *Computers & Fluids*. 2023;258:105811. DOI: 10.1016/j.compfluid.2023.105811.
12. Govorukhin VN. Numerical analysis of the dynamics of distributed vortex configurations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2016;56(8):1474–1487. DOI: 10.1134/S0965542516080078.
13. Filimonova AM. Dynamics and advection in a vortex parquet. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2019;27(4):71–84. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-4-71-84.
14. Jeong J, Hussain F. On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*. 1995;285:69–94. DOI: 10.1017/S0022112095000462.
15. Kolář V. Vortex identification: New requirements and limitations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2007;28(4):638–652. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2007.03.004.
16. Giagkiozis I, Fedun V, Scullion E, Jess DB, Verth G. Vortex flows in the solar atmosphere: Automated identification and statistical analysis. *The Astrophysical Journal*. 2018;869(2):169. DOI: 10.3847/1538-4357/aaf797.
17. Bai X, Cheng H, Ji B, Long X, Qian Z, Peng X. Comparative Study of different vortex identification methods in a tip-leakage cavitating flow. *Ocean Engineering*. 2020;207:107373. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.107373.
18. Canivete Cuissa JR, Steiner O. Innovative and automated method for vortex identification. *A&A*. 2022;668:A118. DOI: 10.1051/0004-6361/202243740.



19. Sadarjoen IA, Post FH. Detection, quantification, and tracking of vortices using streamline geometry. *Computers & Graphics*. 2000;24(3):333–341. DOI: 10.1016/S0097-8493(00)00029-7.
20. Govorukhin VN, Filimonova AM. Analysis of the structure of vortex planar flows and their changes with time. *Computational Continuum Mechanics*. 2021;14(4):367–376. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.30.
21. Govorukhin VN. An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2023;95(4):579–602. DOI: 10.1002/flid.5163.
22. Ahmed SE, Pawar S, San O, Rasheed A, Tabib M. A nudged hybrid analysis and modeling approach for realtime wake-vortex transport and decay prediction. *Computers & Fluids*. 2021;221:104895. DOI: 10.1016/j.compfluid.2021.104895.
23. Govorukhin VN. An algorithm of vortex patches identification based on models of point vortices. *Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 2020;(3(207)):11–18 (in Russian). DOI: 10.18522/1026-2237-2020-3-11-18.
24. Govorukhin VN. Transfer of passive particles in the velocity field of vortex tripole moving on a plane. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(3):286–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003039.
25. Velasco Fuentes OU, van Heijst GJF, van Lipzig NPM. Unsteady behaviour of a topography-modulated tripole. *Journal of Fluid Mechanics*. 1996;307:11–41. DOI: 10.1017/S002211209600002X.
26. Geldhauser C, Romito M. The point vortex model for the Euler equation. *AIMS Mathematics*. 2019;4(3):534–575. DOI: 10.3934/math.2019.3.534.
27. Govorukhin VN. A vortex method for computing two-dimensional inviscid incompressible flows. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2011;51(6):1061–1073. DOI: 10.1134/S096554251106008X.
28. Govorukhin VN, Filimonova AM. Numerical calculation of planar geophysical flows of an inviscid incompressible fluid by a meshfree-spectral method. *Computer Research and Modeling*. 2019;11(3):413–426 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-413-426.
29. Leweke T, Le Dizès S, Williamson CHK. Dynamics and instabilities of vortex pairs. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2016;48:507–541. DOI: 10.1146/annurev-fluid-122414-034558.



*Говорухин Василий Николаевич* — родился в Ростове-на-Дону (1962). Окончил механико-математический факультет Ростовского госуниверситета (1984). Защитил докторскую (2021) диссертацию в области численного исследования вихревых и конвективных течений жидкости. Опубликовал более 70 научных статей по вычислительной математике, гидродинамике, математической биологии и нелинейной динамике. Работает профессором кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а  
 Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ  
 E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru  
 ORCID: 0000-0001-8459-7841  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 13438