

## ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ТРЕХ КАСКАДНО СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

*В.В. Матросов, Д.В. Касаткин*

Приводятся результаты исследования динамических режимов трех каскадно связанных систем фазовой автоподстройки. Изучено влияние параметров связей и начальной частотной расстройки на синхронные и квазисинхронные режимы. В пространстве параметров выделены области квазисинхронных колебаний генераторов ансамбля. Проведен сравнительный анализ динамики ансамблей, состоящих из двух и трех генераторов.

1. Данная работа является продолжением проводимых в [1-7] исследований, связанных с изучением коллективной динамики объединенных в ансамбль генераторов с фазовым управлением (систем фазовой автоподстройки - ФАП). Актуальность проводимых исследований определяется: во-первых, широким применением таких ансамблей для стабилизации и управления частотой и фазой колебаний в радиофизике, радиотехнике, радиоизмерительной технике и т.д. [8,9]; во-вторых, способностью генераторов ансамбля устойчиво демонстрировать колебания различной сложности, в том числе и хаотические, интерес к которым в последнее время возрос в связи с перспективой их практического использования [10-12; в третьих, связью с общими проблемами коллективной динамики систем типа взаимосвязанных ротаторов [13].

Рассматривается ансамбль трех каскадно связанных ФАП (КФАП) с фильтрами первого порядка в цепях управления при наличии дополнительных связей по цепям управления. В этом случае динамика взаимодействующих генераторов с фазовым управлением описывается следующими уравнениями [5]:

$$\begin{aligned} d\varphi_1/dt &= y_1, & \varepsilon_1 dy_1/dt &= \gamma_1 - y_1 - \sin \varphi_1 - \kappa_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ d\varphi_2/dt &= y_2, & \varepsilon_2 dy_2/dt &= \gamma_2 - y_2 - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \kappa_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2), \\ d\varphi_3/dt &= y_3, & \varepsilon_3 dy_3/dt &= \gamma_3 - y_3 - \sin(\varphi_3 - \varphi_2), \end{aligned} \quad (1)$$

определенными в шестимерном цилиндрическом фазовом пространстве  $U = \{\varphi_1(\text{mod}2\pi), y_1, \varphi_2(\text{mod}2\pi), y_2, \varphi_3(\text{mod}2\pi), y_3\}$ . Здесь  $\varphi_i$  и  $y_i$  есть текущие фазовые и частотные ошибки, а  $\gamma_i$  - начальные частотные расстройки генераторов

относительно опорного сигнала,  $\kappa_{1,2}$  - параметры дополнительных связей,  $\epsilon_i$  - постоянные времени фильтров в цепях управления ( $i=1,2,3$ ).

При всех  $\epsilon_i \ll 1$  система (1) является системой с малыми параметрами при производных  $dy_i/dt$ , поэтому движения в фазовом пространстве  $U$  разделяются на «быстрые» и «медленные» [14]. Поверхность «медленных движений»  $Z$  является устойчивой по отношению к быстрым движениям. Уравнения медленных движений на поверхности  $Z$  имеют вид

$$\begin{aligned} d\varphi_1/dt &= \gamma_1 - \sin\varphi_1 - \kappa_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ d\varphi_2/dt &= \gamma_2 - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \kappa_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2), \\ d\varphi_3/dt &= \gamma_3 - \sin(\varphi_3 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2), определенная на трехмерном фазовом торе  $U_1 = \{\varphi_1(\text{mod}2\pi), \varphi_2(\text{mod}2\pi), \varphi_3(\text{mod}2\pi)\}$ , описывает динамику КФАП с малоинерционными цепями управления.

Основная задача исследования моделей (1) и (2) состоит в изучении особых траекторий в соответствующих фазовых пространствах  $U$  и  $U_1$ , отвечающих за установление синхронных и квазисинхронных режимов работы генераторов, в выяснении, как меняется индивидуальная динамика систем ФАП при объединении в ансамбль, как она зависит от параметров цепей управления и связей, а также от числа объединяемых подсистем. Исследование проведено с помощью качественно-численных методов и моделирования с использованием комплекса программ ДНС [15].

**2. Индивидуальная динамика объединяемых в ансамбль ФАП описывается двумя первыми уравнениями модели (1), если положить в них  $\kappa_1=0$ . Эта динамика характеризуется двумя стационарными состояниями: устойчивым состоянием равновесия  $O_1^*(\varphi_1^* = \arcsin \gamma_1, y_1^* = 0)$ , соответствующим синхронизации генератора опорным сигналом, и устойчивым вращательным предельным циклом, соответствующим режиму биений.**

При объединении в ансамбль динамика генераторов определяется аттракторами модели (1) (модели (2) при всех  $\epsilon_i \ll 1$ ), которые отличаются большим разнообразием [5]. В фазовом пространстве  $U(U_1)$  могут существовать: состояния равновесия, соответствующие глобальным синхронным режимам КФАП; колебательные предельные циклы и инвариантные торы, соответствующие генерации на выходе всех генераторов ансамбля колебаний с регулярной угловой модуляцией и средней частотой, стабилизированной по опорному сигналу (квазисинхронные режимы); вращательные предельные циклы и инвариантные торы, отвечающие генерации колебаний с регулярной угловой модуляцией и средней частотой, не стабилизированной по опорному сигналу (режимы биений); хаотические аттракторы - колебательные, определяющие глобальный режим хаотически модулированных колебаний (ХМК), и вращательные, соответствующие глобальному хаотическому режиму биений. Также в фазовых пространствах моделей (1) и (2) могут реализоваться колебательно-вращательные аттракторы, соответствующие квазисинхронным режимам отдельных генераторов КФАП. Далее в качестве одной из характеристик аттракторов математических моделей и соответствующих им динамических режимов КФАП будем использовать индекс вращения (индекс квазисинхронизма)  $[J_1, J_2, J_3]$ , где  $J_i$  принимает значение 1, если по фазовой координате  $\varphi_i$  происходит вращение, и 0 в противном случае. Отсутствие вращения по координате  $\varphi_i$  означает, что  $i$ -й

генератор работает в квазисинхронном режиме, когда остальные генераторы - в режиме биений.

3. Особенности динамического поведения КФАП при варьировании параметров рассмотрим на примере цепочки, состоящей из трех идентичных малоинерционных ФАП с одинаковыми связями. В этом случае поведение ансамбля описывается уравнениями (2) при  $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma$  и  $\kappa_1=\kappa_2=\kappa$ . Так как система (2) инвариантна относительно замены  $(\gamma, \kappa, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  на  $(-\gamma, -\kappa, -\varphi_1, -\varphi_2, -\varphi_3)$ , то достаточно рассмотреть  $\gamma \geq 0$ .

Модель (2) в рассматриваемом случае может иметь два устойчивых состояния равновесия:

$$O_1(\varphi_1^{(1)}=q_1, \varphi_2^{(1)}=q_1+q_2, \varphi_3^{(1)}=q_1+q_2+q_3) \text{ и}$$

$$O_2(\varphi_1^{(2)}=q_1, \varphi_2^{(2)}=\pi+q_1-q_2, \varphi_3^{(2)}=q_1-q_2-q_3),$$

где  $q_1=\arcsin[\gamma(1-\kappa+\kappa^2)]$ ,  $q_2=\arcsin[\gamma(1-\kappa)]$ ,  $q_3=\arcsin\gamma$ .

Каждому из устойчивых состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$  отвечает свой синхронный режим КФАП. Синхронный режим  $I_1$ , определяемый состоянием равновесия  $O_1$ , отличается от режима  $I_2$ , определяемого состоянием равновесия  $O_2$ , ошибками синхронизации второго и третьего генераторов.

На плоскости параметров  $(\kappa, \gamma)$  (рис. 1) состояние равновесия  $O_1$  существует и является устойчивым при значениях параметров из области  $C_1=\{0 < \gamma < \min(\gamma^+, \gamma_{h1})\}$ , а состояние равновесия  $O_2$  - из области  $C_2=\{\min(0, \gamma_{h2}) < \gamma < \gamma^+\}$ . Здесь штрихпунктирная линия  $\gamma^+(\kappa)=\min\{1, (1-\kappa+\kappa^2)^{-1}\}$  ограничивает область существования состояний равновесия модели (2), а кривые  $\gamma=\gamma_{h1}(\kappa)$  (линия 1) и  $\gamma=\gamma_{h2}(\kappa)$  (линия 2) соответствуют потере устойчивости  $O_1$  и  $O_2$  через бифуркацию Андронова - Хопфа. Между кривыми  $\gamma_{h1}$  и  $\gamma_{h2}$  синхронные режимы отсутствуют.

Точка  $a$  на кривой  $\gamma_{h1}$  разделяет ее на опасный и безопасный участки. При выходе из области  $C_1$  через участок кривой  $\gamma_{h1}$ , расположенный ниже точки  $a$ , происходит мягкая потеря устойчивости состоянием равновесия  $O_1$ , которая сопровождается рождением устойчивого колебательного предельного цикла  $L_{O1}$

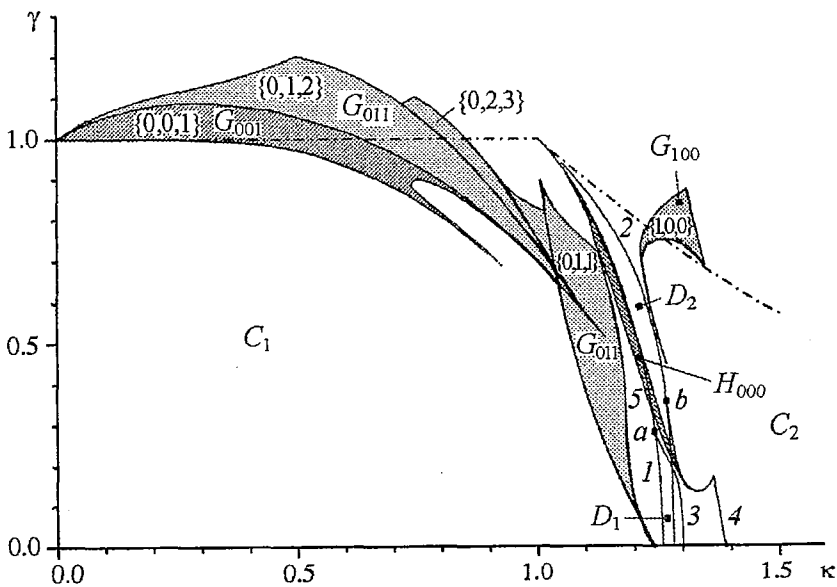


Рис. 1. Параметрический портрет системы (2) в случае  $\kappa_1=\kappa_2=\kappa$  и  $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$

малой амплитуды. При увеличении параметра  $\kappa(\gamma)$  происходит рост амплитуды предельного цикла, а когда параметры системы достигают кривой  $\gamma = \gamma_{c1}(\kappa)$  (линия 3), цикл  $L_{01}$  исчезает, сливаясь с седловым. Таким образом, в области  $D_1 = \{\gamma_{h1} < \kappa < \gamma_{c1}\}$  в КФАП реализуется глобальный квазисинхронный режим, который в области  $\tilde{D}_1 = \{\gamma_{h1} < \kappa < \min(\gamma_{c1}, \gamma_{h2})\}$  является единственным, а в области  $\tilde{D}_1 = D_1 \setminus \tilde{D}_1$  существует совместно с синхронным режимом  $I_2$ . При выходе из области  $C_1$  через часть кривой выше точки  $a$  смена устойчивости синхронного режима  $I_1$  происходит жестко и сопровождается выходом КФАП на асинхронные режимы.

Граница  $\gamma_{h2}$ , так же как и граница  $\gamma_{h1}$ , имеет опасный и безопасный участки. Опасный участок расположен ниже точки  $b$ . При пересечении этой части кривой с уменьшением  $\kappa(\gamma)$  смена устойчивости режима  $I_2$  происходит жестко. В результате этой бифуркации КФАП переключается на глобальный регулярный квазисинхронный режим, определяемый устойчивым колебательным циклом. При выходе из области  $C_2$  через участок кривой  $\gamma_{h2}$  выше точки  $b$  смена устойчивости режима  $I_2$  происходит мягко и сопровождается возникновением режима глобальной регулярной квазисинхронизации, определяемого циклом  $L_{02}$ . Дальнейшее уменьшение параметра  $\kappa(\gamma)$  приводит к бифуркациям удвоения периода цикла  $L_{02}$ , в результате которых в фазовом пространстве  $U_1$  возникает хаотический колебательный аттрактор  $S_{02}$ , определяющий глобальный ХМК-режим. Аттрактор  $S_{02}$  существует при значениях параметров из области  $H_{000}$ . В этой области параметров может реализоваться режим, при котором на выходе всех генераторов ансамбля имеют место ХМК. Подобласть  $\tilde{H}_{000} \subset H_{000}$ , расположенная между кривыми  $\gamma_{h1}$  и  $\gamma_{h2}$ , является областью глобальной устойчивости аттрактора  $S_{02}$ . При  $(\gamma, \kappa) \in \tilde{H}_{000}$  глобальный ХМК-режим в КФАП наступает гарантированно. При выходе из области  $H_{000}$  через левую границу (линия 5) аттрактор  $S_{02}$  разрушается. Режим, на который выходит КФАП в результате этой катастрофы, зависит от значений параметра  $\gamma$ . Это может быть синхронный режим  $I_1$  (левее кривой  $\gamma_{h1}$ ), режимы частичной квазисинхронизации, глобальный режим биений. К кривой  $\gamma_{h2}$  в точке  $b$  примыкает бифуркационная кривая  $\gamma = \gamma_{c2}(\kappa)$ , на которой один из мультипликаторов предельного цикла  $L_{02}$  принимает значение  $+1$  (линия 4).

При значениях параметров из области  $G_{001}$  в фазовом пространстве  $U_1$  существуют аттракторы с индексом вращения  $[0, 0, 1]$ , в КФАП устанавливается режим, при котором первый и второй генераторы функционируют в квазисинхронном режиме. Верхняя граница этой области определяется касательной бифуркацией, нижняя - либо петлей сепаратрис седлового (седло-узлового) состояния равновесия с отрицательной седловой величиной, либо касательной бифуркацией. Правая граница области  $G_{001}$  устроена сложно, она включает в себя бифуркационные кривые многообходных петель сепаратрис, касательных бифуркаций циклов кратности больше чем один, а также линию, отвечающую кризису хаотического аттрактора с индексом вращения  $[0, 0, 1]$ .

При значениях параметров из области  $G_{011}$  в квазисинхронном режиме может функционировать только первый генератор. Такому режиму в фазовом пространстве системы (2) отвечают аттракторы, ограниченные только по координате  $\varphi_1$ . Заметим, что в фазовом пространстве  $U_1$  этим условиям удовлетворяет целое множество аттракторов. Регулярные аттракторы (предельные циклы) этого множества различаются числом вращения\*. На рис. 2

\* Здесь под числом вращения понимается тройка чисел  $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ , которые характеризуют число оборотов вокруг тора  $U_1$ , совершаемых изображающей точкой, лежащей на предельном цикле, до замыкания траектории по координатам  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\varphi_3$ , соответственно.

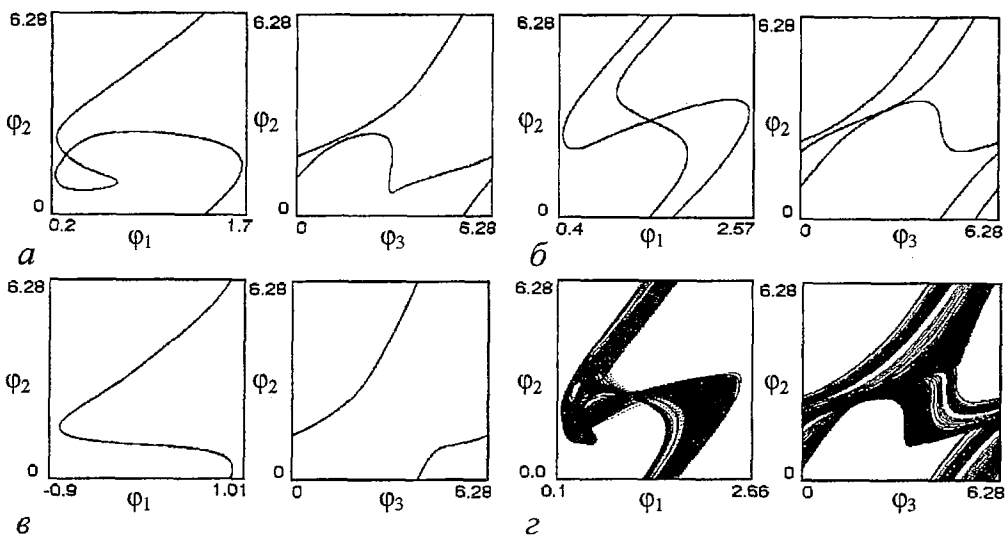


Рис. 2. Примеры аттракторов модели (2), соответствующих установлению квазисинхронных колебаний на выходе только первого генератора КФАП: регулярных, определяемых предельными циклами с числами вращения  $\{0,1,2\}$  при  $\gamma=0.9, \kappa=0.8$  (а),  $\{0,2,3\}$  при  $\gamma=1.09, \kappa=0.75$  (б),  $\{0,1,1\}$  при  $\gamma=0.11, \kappa=1.2$  (в), и хаотических при  $\gamma=0.99, \kappa=0.68$  (г)

приведены примеры различных колебательно-вращательных аттракторов модели (2), отвечающих за режим частичной квазисинхронизации первого генератора. На рис. 1 область  $G_{011}$  разбита на подобласти в соответствии с числами вращения «базовых» предельных циклов («базовые» предельные циклы - циклы, не претерпевшие бифуркацию удвоения периода). Числа в фигурных скобках характеризуют число вращения «базового» предельного цикла.

Для значений параметров из области  $G_{100}$  в фазовом пространстве системы (2) имеют место фазовые траектории, которые определяют квазисинхронные колебания на выходе второго и третьего генераторов. При выходе из этой области через верхнюю границу предельный цикл  $\{1,0,0\}$  исчезает при равенстве одного из мультипликаторов  $+1$ , при выходе через правую границу устойчивый предельный цикл исчезает в результате выхода пары комплексно-сопряженных мультипликаторов на единичную окружность, а выход через нижнюю границу сопровождается каскадом бифуркаций удвоения периода цикла, возникновением хаотического аттрактора и последующим его разрушением. Выход из области  $G_{100}$  всегда приводит к установлению асинхронных режимов КФАП и не зависит от того, через какую границу осуществляется выход.

При отрицательных связях  $\kappa < 0$  и  $\gamma \geq 0$  в плоскости  $(\kappa, \gamma)$  проходит единственная бифуркационная кривая  $\gamma^*$ , отделяющая область существования глобально устойчивого синхронного режима  $I_1$  от области асинхронных режимов.

4. Представленный на рис. 1 параметрический портрет  $\{\kappa, \gamma\}$  объясняет нетривиальное поведение генераторов, объединенных в ансамбль при варьировании параметров связей и начальной частотной расстройки. Из рисунка видно, что области параметров, где генераторы ансамбля способны демонстрировать квазисинхронные колебания, имеют весьма сложную форму и не обязательно являются односвязными. Это есть следствие того, что области квазисинхронных колебаний представляют собой объединение нескольких областей существования аттракторов различных типов. Например, область существования квазисинхронных колебаний на выходе первого генератора включает области  $D_1, D_2, G_{001}$  и  $G_{011}$ .

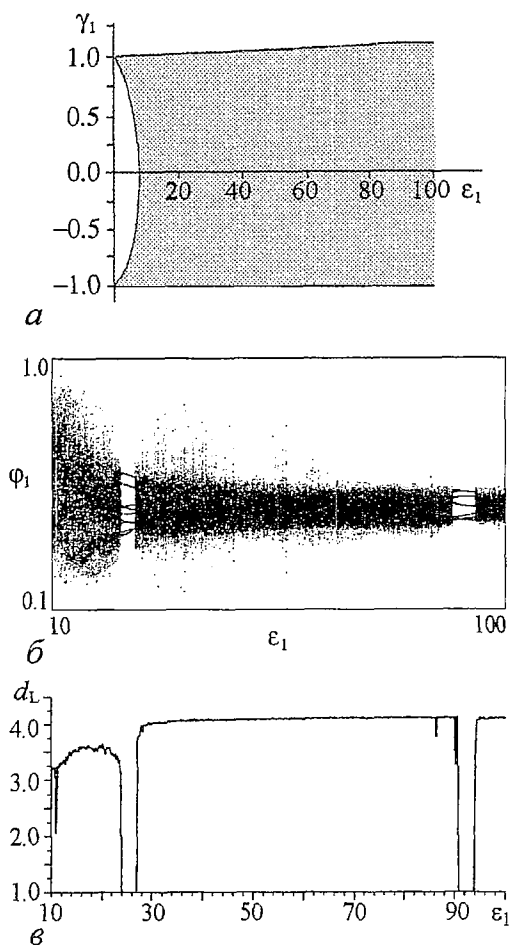


Рис. 3. Область существования ХМК на выходе первого генератора КФАП при  $\gamma_2=0.5$ ,  $\epsilon_2=7.5$ ,  $\gamma_3=0.7$ ,  $\epsilon_3=3$ ,  $\kappa_1=0.15$ ,  $\kappa_2=1.6$  (а); однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре (б) и зависимость ляпуновской размерности (в) аттрактора, порождающего это отображение, для  $\gamma_1=0.5$

модели (1) соответствуют хаотические аттракторы с индексом квазисинхронизма  $[0,0,1]$  и  $[0,1,1]$ . Однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре  $\{\epsilon_1, \phi_1\}$  (рис 3, б) и график зависимости ляпуновской размерности (рис. 3, в), вычисленной по формуле Каплана - Йорке, свидетельствуют, что параметр  $\epsilon_1$ , хотя и приводит к хаотизации колебаний, мало влияет на свойства генерируемых колебаний, оставляя их достаточно однородными в широком диапазоне изменения параметра  $\epsilon_1$ . Управлять же свойствами генерируемых колебаний, в том числе и хаотических, можно с помощью параметров связей, используя тот факт, что генерации квазисинхронных колебаний на выходе отдельных генераторов отвечает большое разнообразие аттракторов. В качестве примера ХМК с различными свойствами на рис. 4 представлены проекции хаотических аттракторов модели (1) с индексами вращения  $[0,0,0]$ ,  $[0,0,1]$ ,  $[0,1,1]$ , а также соответствующие им спектры мощности, автокорреляционные функции и значения ляпуновских размерностей  $d_L$ , вычисленных по формуле Каплана - Йорке. Здесь свойства колебаний на выходе первого генератора изменялись путем варьирования лишь одного параметра связи  $\kappa_2$ .

Заметим, что область  $G_{011}$  также является составной. Она содержит области существования предельных циклов с различными числами вращения и более сложных аттракторов, формирующихся на базе этих циклов. Поскольку хаотические аттракторы с индексом вращения  $[0,1,1]$  могут формироваться на базе предельных циклов с неодинаковыми числами вращения, то область  $H_{011}$  генерации ХМК на выходе первого генератора даже при значениях параметров из  $G_{011}$  является многосвязной. Примечательным является то, что области существования аттракторов различных типов могут перекрываться, порождая явления неустойчивости квазисинхронных колебаний при варьировании параметров системы КФАП.

Анализ областей ХМК на плоскости  $(\kappa, \gamma)$ , а также на плоскостях  $(\kappa_1, \kappa_2)$  при  $\gamma=0.3, 0.5, 0.7$  [4,5], свидетельствует, что в системе КФАП с малоинерционными цепями управления области генерации ХМК малы. Однако, как показывают исследования хаотических колебаний модели (1), эти области могут быть существенно расширены за счет введения инерционностей в локальные цепи управления ФАП. Это наглядно подтверждает рис. 3, а, на котором представлена область существования ХМК на выходе первого генератора КФАП. Этим колебаниям в фазовом пространстве

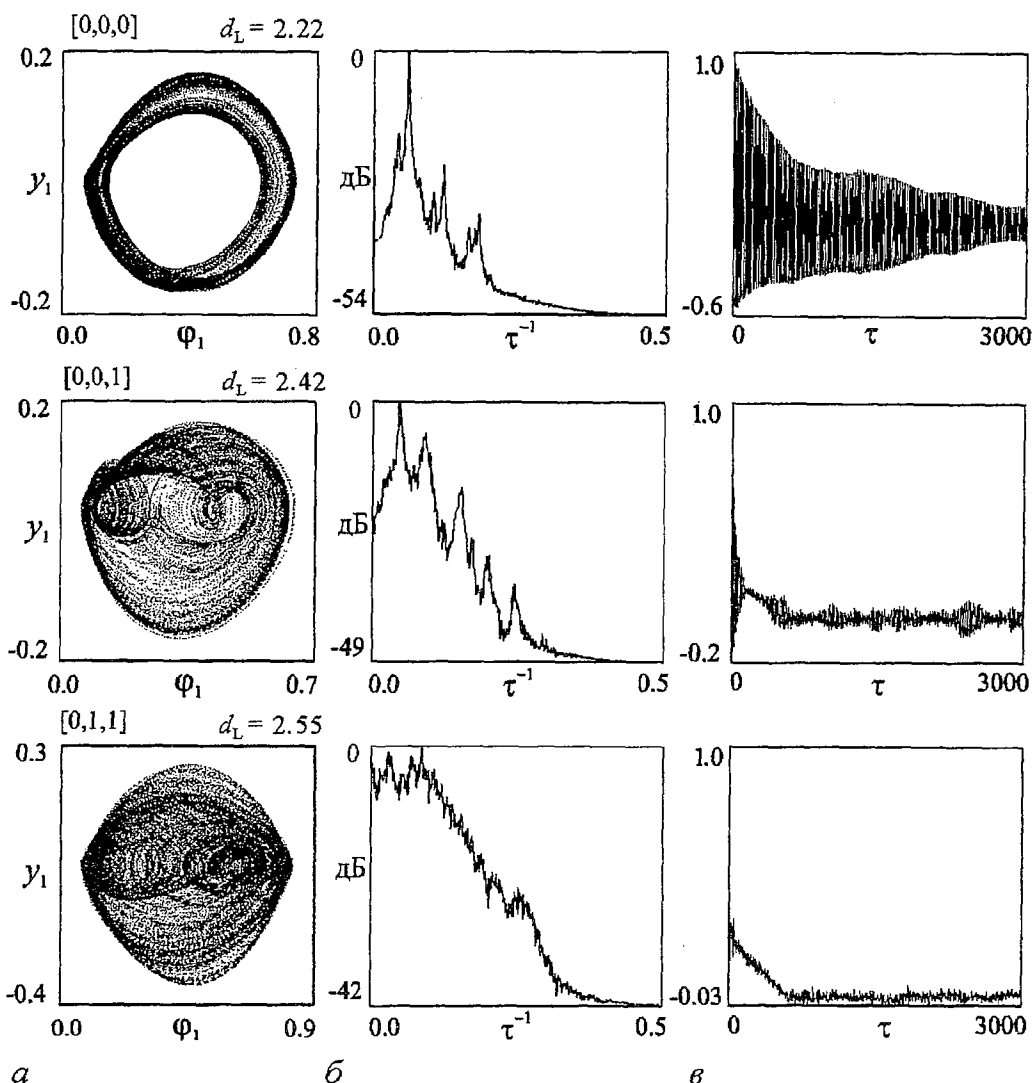


Рис. 4. Проекция хаотических аттракторов ( $a$ ), спектры мощности ( $b$ ) и автокорреляционные функции ( $c$ ) хаотических аттракторов типа  $[0,0,0]$ ,  $[0,0,1]$ ,  $[0,1,1]$  модели (1) при  $\gamma_1=0.4$ ,  $\varepsilon_1=0.8$ ,  $\gamma_2=0.5$ ,  $\varepsilon_2=7.5$ ,  $\gamma_3=0.7$ ,  $\varepsilon_3=3$ , и  $\kappa_1=0.3$ ;  $\kappa_2=0.512, 0.84, 1.32$ , соответственно

В заключение сравним полученный параметрический портрет на рис. 1 и аналогичный параметрический портрет  $\{\kappa, \gamma\}$  для модели двух каскадно связанных генераторов [1,2]. Это сравнение позволяет констатировать следующие явления, связанные с увеличением числа звеньев цепочки.

Система трех идентичных каскадно связанных генераторов с малоинерционными цепями управления, так же как и система, состоящая из двух таких же генераторов, имеет два синхронных режима. Один (режим  $I_1$ ) имеет место при «слабых» связях ( $\kappa < 1$ ), другой (режим  $I_2$ ) - при «сильных» связях ( $\kappa > 1$ ). При увеличении числа звеньев области существования синхронных режимов уменьшаются, а кривые смены устойчивости синхронных режимов смещаются в область меньших значений  $\kappa$ , то есть смена устойчивости синхронных режимов происходит при более слабых связях. Если смена устойчивости синхронных режимов в двух каскадно связанных генераторах происходила одновременно, то при объединении трех систем в ансамбль смена устойчивости синхронных режимов  $I_1$  и  $I_2$  происходит при разных значениях параметров  $\kappa$ . Это приводит к тому, что в

области параметров трех связанных систем появляется область, где ансамбль не имеет синхронных движений. В двух каскадно связанных генераторах смена устойчивости режима  $I_1$  происходила всегда жестко, а режима  $I_2$  - всегда мягко. В трех связанных генераторах смена устойчивости как режима  $I_1$ , так и режима  $I_2$  может протекать как мягко, так и жестко. Принципиально новым явлением для трех связанных генераторов с малоинерционными цепями управления является то, что они могут генерировать хаотические колебания.

Обращает на себя внимание еще один тип движений, обнаруженный в модели цепочки трех однородных генераторов. Это движения типа  $[1,0,0]$ , при которых первый генератор работает в асинхронном режиме по отношению к опорному сигналу, а два последующих функционируют в квазисинхронном режиме. Этот режим интересен тем, что связанные однородные генераторы способны генерировать квазисинхронные колебания, стабилизированные по опорному сигналу даже в случае поступления на их вход асинхронного сигнала. Аналогичные режимы в системе двух связанных генераторов могут иметь место только при неоднородности связываемых генераторов ( $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ) [3].

5. Проведенное исследование стационарных движений и бифуркаций в моделях (1) и (2) позволило получить достаточно полное описание возможных динамических режимов поведения трех каскадно связанных систем ФАП с фильтрами первого порядка в цепях управления, а также оценить области существования различных динамических режимов в пространстве параметров. Удалось выявить и обосновать ряд особенностей динамического поведения управляемых генераторов, объединенных в ансамбль.

Прослежена эволюция областей существования синхронных режимов при изменении параметров связей, обнаружены области отсутствия синхронных режимов, изучены сценарии нарушения режима синхронизации при варьировании параметров системы. Установлена и объяснена достаточно сложная структура областей существования квазисинхронных режимов, в том числе и хаотических. Из полученных результатов следует, что систему трех каскадно связанных колец ФАП, не содержащих фильтров низких частот в цепях управления, можно рассматривать как генератор сложнопериодических автомодуляционных колебаний. При этом, изменяя степень связи по цепям управления, можно эффективно воздействовать на свойства таких колебаний. Включение фильтров в цепи управления позволяет обеспечить в рассматриваемой системе генерацию ХМК в достаточно широкой области параметров.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 02-02-17573, 03-02-06369), программы «Университеты России» (проект УР.03.01.027).*

### **Библиографический список**

1. Корзинова М.В., Матросов В.В. Моделирование нелинейной динамики каскадного соединения фазовых систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36, № 8. С. 815.
2. Матросов В.В., Корзинова М.В. Коллективная динамика каскадного соединения фазовых систем // Изв. вузов. ПНД. 1994. Т. 2, № 2. С. 10.
3. Матросов В.В. Некоторые особенности динамического поведения каскадного соединения двух фазовых систем // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т. 5, № 6. С. 52.
4. Matrosov V.V., Kasatkin D.V. The dynamics of three cascade coupled phase systems // Proc. Int. Conf. dedicated to the 100th Anniversary of A.A. Andronov. 2002. Vol. 2. P. 225-231.



5. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 6. С. 698.

6. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Анализ процессов возбуждения хаотических колебаний во взаимосвязанных генераторах с фазовым управлением // Изв. вузов. ПНД. 2003. Т. 11, № 4-5. С. 31.

7. *Matrosov V.V., Kasatkin D.V.* Collective dynamics of small ensembles of coupled PLL systems // Proc. of the Int.Symposium «Topical Problems of Nonlinear Wave Physics. NWP-1: Nonlinear Dynamics and Information». IAP RAS, Nizhny Novgorod, 2003. P.137.

8. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капранова. М.: Сов.радио, 1978.

9. *Anderson P.M., Found A.A.* Power system control and stability. IEEE Press, NY, 1994.

10. *Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О.* // Зарубеж. радиоэлектрон. Успехи современной радиоэлектроники. 1997. № 10. С. 4.

11. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В., Корзинова М.В.* // Зарубеж. радиоэлектрон. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 11. С. 44.

12. *Shalfeev V.D., Matrosov V.V., and Korzinova M.V.* // Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems / Ed. by G. Chen. CRC Press. Boca - Raton - London - New York - Washington, D.C. 2000. P. 529.

13. *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФАН, 1989.

14. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.

15. *Матросов В.В.* Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород: ННГУ, 2002.

*Нижегородский государственный  
университет*

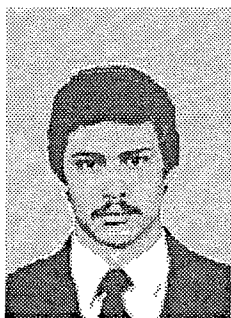
*Поступила в редакцию 7.10.03*

Основные результаты, представленные в статье, были первоначально опубликованы в материалах Международного симпозиума «Topical Problems of Nonlinear Wave Physics», Нижний Новгород, Россия, 6-12 сентября, 2003. 1-63, р. 137.

## **PARTICULARITIES OF DYNAMICS OF THREE CASCADE-COUPLED PHASE-LOCKED LOOPS**

*V.V. Matrosov, D.V. Kasatkin*

Results of investigations of dynamic modes of three phase-locked loops are presented. The influence of coupling parameters and initial frequency mismatch on synchronous and quasi-synchronous modes is studied. Domains of quasi-synchronous oscillations of controlled oscillators are allocated in the parameter space. The comparative analysis of dynamics of ensembles, consisting of two and three oscillators is carried out.



*Матросов Валерий Владимирович* - родился в 1960 году. Окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета по специальности «прикладная математика» (1982). С 1984 по 1999 научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ, с 1999 года доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Кандидат физико-математических наук (1994), доцент (2001). Область научных интересов - динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 50 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

E-mail: [matrosov@neuron.appl.sci-nnov.ru](mailto:matrosov@neuron.appl.sci-nnov.ru)



*Касаткин Дмитрий Владимирович* - родился в Нижнем Новгороде (1978). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (2001). В настоящее время является аспирантом кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, нелинейная динамика активных сред, хаотическая динамика. Является соавтором нескольких научных статей по указанным направлениям.