



## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ СИНХРОНИЗАЦИИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СТРУКТУРЫ СВЯЗЕЙ В МАЛЫХ АНСАМБЛЯХ МОДЕЛЬНЫХ НЕЙРОНОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ И КУСОЧНО-РАЗРЫВНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

*К.В. Андреев, Л.В. Красичков*

Предложены кусочно-линейное стохастическое, кусочно-непрерывное динамическое и кусочно-разрывное динамическое отображения для моделирования электрической активности уединенного нейрона, построенные исходя из феноменологических представлений о динамике биологического нейрона. Обсуждаются преимущества и ограничения предложенных отображений. Исследуется поведение малых ансамблей модельных нейронов на плоскости управляющих параметров. Показана существенная зависимость степени синхронизации от структуры связей между элементами ансамбля.

### Введение

Последнее время отмечается заметный рост интереса к проблеме математического моделирования динамики нейронных ансамблей. Большинство авторов, опираясь на имеющиеся результаты натуральных экспериментов, стремятся построить математический аппарат, позволяющий в той или иной мере описывать реально протекающие в живых нейронах процессы. Как правило, в качестве базовой выбирается математическая модель, описывающая временную динамику уединенного нейрона. Выбор способа описания зависит от поставленной задачи, и здесь можно выделить несколько различных подходов.

Если в процессе исследований возникает потребность в подробном анализе внутринейронных процессов, то в этом случае принято пользоваться формализмом Ходжкина - Хаксли [1], детально описывающим механизм ионного транспорта через мембрану. При этом возникнет необходимость в написании систем из достаточно большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для каждого нейрона. На базе систем ОДУ построены и более простые модели, например, система ФитцХью - Нагумо [2, 3] или Розе - Хиндмарш [4, 5]. Такие модели, построенные исходя из феноменологических соображений, позволяют качественно правильно описывать некоторые аспекты динамики как отдельных нейронов, так и их ансамблей. Если же в качестве цели исследований ставится изучение поведения достаточно больших ансамблей нейронов или же проведение ресурсоемких вычислений (например, построение плоскостей параметров), то

более удобным оказывается использование систем с дискретным временем, то есть отображений. В тоже самое время, модель, построенная на основе отображения, должна описывать динамику уединенного нейрона на уровне качественных представлений.

К настоящему времени известно достаточно много моделей нейронов, построенных на базе отображений. Среди них можно выделить следующие: модель с переменной состояния, принимающей дискретный набор значений (клеточный автомат) [6, 7], отображение, полученное по сечению Пуанкаре системы дифференциальных уравнений типа Розе - Хиндмарш [8], обучающееся отображение с глобальными связями [9], двумерное отображение, качественно описывающее процессы синхронизации в системе с глобальными связями [10]. Многообразие моделей и способов описания динамики нейронов говорит о том, что не существует единого подхода к построению отображений, задающих динамику уединенного нейрона, и построению систем связанных модельных нейронов с произвольной топологией.

В данной статье предложен подход к качественному описанию динамики нейронных ансамблей при помощи отображений, построенных исходя из феноменологических представлений о поведении уединенного нейрона. Кроме изложения принципа построения отображений будут представлены некоторые результаты моделирования, касающиеся явления синхронизации в ансамбле электрически связанных модельных нейронов.

### Предпосылки и принцип построения отображений

Прежде чем переходить непосредственно к моделированию поведения уединенного нейрона и ансамблей нейронов, необходимо определить, нейроны какого типа будут моделироваться и какие аспекты динамики нервных клеток должны быть отражены в модели в первую очередь. В дальнейшем речь будет идти о нейронах центрального генератора ритма (ЦГР, CPG, Central Pattern Generator), отвечающих за ритмические движения живых организмов, без конкретизации реальных живых систем.

Рассматриваемая в данной работе модель представляет собой отображение и построена на основе феноменологических представлений о поведении нейрона. Представления основаны на данных натуральных экспериментов [11, 12] и на результатах, полученных с помощью классических моделей [1-5]. Основная идея построения отображения заключалась в том, что различные фрагменты динамики нейрона, а именно состояние покоя, берст и спайк (рис. 1), могут быть описаны различными ветвями кусочной функции, а перемещение с одной ветви на другую может быть задано специально подобранными условиями перехода. Построение модели проходило в несколько этапов.

**Кусочно-линейное стохастическое отображение.** Отображение состоит из двух кусочно-линейных функций, связанных условиями перехода с одной функции на другую [13, 14]. Основная переменная состояния  $x$ , которая по физическому смыслу сопоставима с мембранным потенциалом нейрона, непрерывно изменяется на отрезке  $[0, 1]$ . Вспомогательная переменная состояния  $d = \{-1, 1\}$  определяет выбор одной из

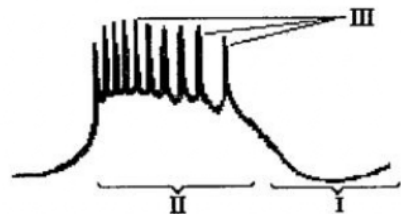


Рис. 1. Фрагмент временной реализации, полученной для уединенного нейрона, где I - состояние покоя, II - берст, III - спайки

двух кусочно-линейных функций, а переменная  $N_s$  подсчитывает количество спайков, генерируемых в течение данного берста. Отображение  $x \rightarrow x'$  можно записать в следующем виде:

При  $d=1$  (движение в сторону увеличения переменной состояния  $x$ )

$$x' = \begin{cases} \alpha x, & x \in [0, A), \\ \beta(x - B) + B, & x \in [A, B - \delta_1), \\ 2B - x, & x \in [B - \delta_1, B), \\ \gamma(x - B) + B, & x \in [B, C), \\ x + \xi, & x \in [C, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Условие перехода:  $d = -1$  при  $x \in [C, 1]$ .

При  $d=-1$  (движение в сторону уменьшения переменной состояния)

$$x' = \begin{cases} (1/\gamma)(x - B) + B, & x \in [B + \delta_2, 1], \\ 2B - x, & x \in [B, B + \delta_2), \\ (1/\beta)(x - B) + B, & x \in [\alpha A, B), \\ (1/\alpha)x, & x \in [\delta_3, \alpha A). \end{cases} \quad (2)$$

Дополнительные условия:  $d = 1, N_s = N_s + 1$  при  $x \in [B, B + \delta_2)$  и  $N_s < N_s^0$   
 $N_s = 0,$  при  $x \in [B, B + \delta_2)$  и  $N_s = N_s^0$   
 $d = 1$  при  $x \in [0, \delta_3).$

Здесь  $A, \alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  - параметры, на которые налагаются условия, вытекающие из принципа построения отображения:  $0 < A < 1; \alpha > 1; 0 < \beta \leq 1; \gamma > 1; \delta_1, \delta_2, \delta_3 < 1$ .  $N_s^0 = 1, 2, 3, \dots$  - число спайков в берсте;  $\xi$  - шумовая добавка (случайная последовательность с равномерным распределением на интервале  $[0, 0.01]$ ). Коэффициенты  $B$  и  $C$  определяются из условия непрерывности и условия нормировки как  $B = A(\alpha - \beta)/(1 - \beta), C = (1 + B(\gamma - 1))/\gamma$ .

Для наглядного объяснения функционирования данного отображения на рис. 2 изображена итерационная диаграмма, а на рис. 3 представлены характерные временные реализации, полученные с помощью отображения для уединенного нейрона.

В предложенной форме модель имеет ряд особенностей. Во-первых, отображение является стохастическим из-за присутствия шума. Отказаться от внесения шума в систему нельзя, так как в этом случае поведение будет регулярным: все спайки будут одинаковой высоты и берсты будут идентичны при условии  $N_s^0 = \text{const}$ , поскольку ветви модельной функции симметричны относительно биссектрисы  $x_{n+1} = x_n$  (см. рис. 2). Надо отметить, что в ряде моделей нейронов, в частности, модели Розе - Хиндмарш, в случае двух связанных нейронов, шумовая компонента также присутствует и несет определенную смысловую нагрузку [4,5]. Тем не менее, при

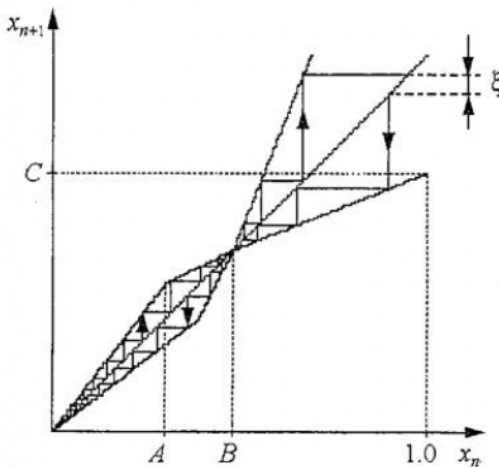


Рис. 2. Качественная иллюстрация движения изображающей точки на итерационной диаграмме для отображения, описываемого формулами (1), (2) и условиями перехода

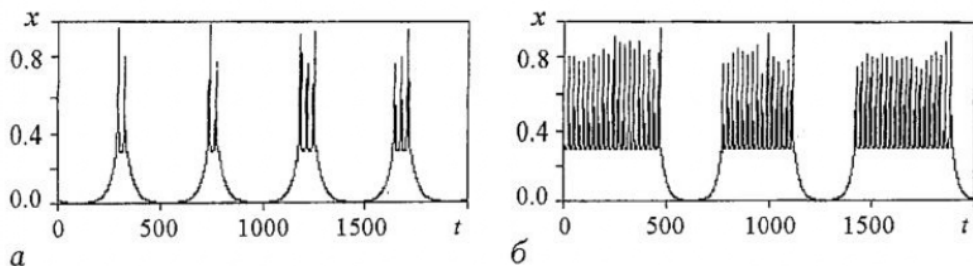


Рис. 3. Временные реализации, полученные для уединенного нейрона с помощью отображения (1), (2) и условий перехода при  $A = 0.3$ ,  $\delta_1 = 0.01$ ,  $\delta_2 = \delta_3 = 0.001$ ; а -  $\alpha = 1.03$ ,  $\gamma = 1.5$ ,  $N_s^0 = 2$ ; б -  $\alpha = 1.04$ ,  $\gamma = 1.7$ ,  $N_s^0 = 20$

построении простейшей модели нейронной динамики представляет интерес создать динамическую модель, то есть модель в которой отсутствуют какие-либо случайные силы.

Другой особенностью данной модели является установление наперед заданного числа спайков в берсте при помощи параметра  $N_s^0$ . Для решения этой проблемы можно было бы задать какой-либо закон изменения числа спайков на берсте в зависимости от внутреннего состояния системы. При построении представленных на рис. 3 временных реализаций данное число спайков задавалось по случайному закону с равномерным распределением, где  $N_s^0$  - среднее значение. Такой закон изменения числа спайков препятствует установлению полной синхронизации в системах связанных модельных нейронов. Известно, что полная синхронизация наблюдается в ансамблях нейронов, исследуемых как в натуральных [11,12], так и в численных [4,5] экспериментах.

**Кусочно-непрерывное динамическое отображение.** Для того чтобы отказаться от внесения шума в систему, достаточно сделать две ветви функции несимметричными. Кроме того, в модифицированной модели два линейных участка, описывающие движение между берстами, заменены одной гладкой нелинейной функцией. Для данного отображения полагалось, что берст заканчивается, если в течение берста были сгенерированы спайки с минимальной и максимальной амплитудой, то есть лежащей в диапазоне  $[C_1, h_1]$  и  $[h_2, 1]$ , соответственно. Применение такого условия позволяет достичь качественного сходства с результатами натуральных экспериментов не только для уединенного нейрона, но и при моделировании связанных систем, что будет показано ниже.

Поведение кусочно-непрерывного динамического отображения описывается четырьмя переменными состояния:  $x \in [0, 1]$ ,  $d = \{-1, 1\}$ ,  $s_1, s_2 = \{0, 1\}$ . Смысл первых двух переменных остался прежним, то есть  $x$  - основная переменная состояния, переменная  $d$  определяет выбор верхней или нижней ветвей отображения, а новые переменные  $s_{1,2}$  являются своего рода «переключателями», определяющими выполнение условий окончания берста. В математической форме модифицированная модель выглядит следующим образом.

При  $d=1$  (движение в сторону увеличения переменной состояния  $X$ )

$$x' = \begin{cases} \alpha_1 \arctg(k_1 x), & x \in [0, A - \delta_1), \\ 2A - x, & x \in [A - \delta_1, A), \\ \gamma_1(x - A) + A, & x \in [A, C_1). \end{cases} \quad (3)$$

Условие перехода задается следующим образом:  $d=-1$  при  $x \in [C_1, 1]$ .

При  $d=-1$  (движение в сторону уменьшения переменной состояния)

$$x' = \begin{cases} (1/\gamma_2)(x - A) + A, & x \in [A + \delta_2, 1], \\ 2A - x, & x \in [A, A + \delta_2), s_1 \cdot s_2 = 1, \\ (1/\alpha_2) \operatorname{arctg}(k_2 x), & x \in [\delta_3, A]. \end{cases} \quad (4)$$

Дополнительные условия:  $d = 1$ , при  $x \in [A, A + \delta_2)$  и  $s_1 \cdot s_2 = 0$ .

$$s_1 = \begin{cases} 1, & x \in [C_1, h_1], \\ 0, & x \in [0, A], \end{cases}$$

$$s_2 = \begin{cases} 1, & x \in [h_2, 1], \\ 0, & x \in [0, A], \end{cases}$$

$$d = 1 \quad \text{при } x \in [0, \delta_3).$$

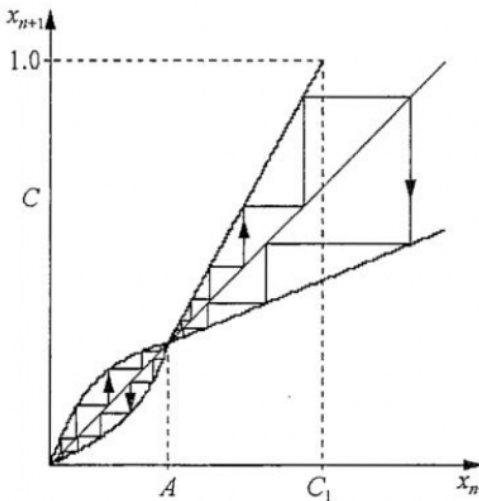


Рис. 4. Итерационная диаграмма для кусочно-непрерывного отображения (3), (4)

Здесь  $A, k_1, k_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  - постоянные параметры отображения, а остальные коэффициенты определяются из условия нормировки и условий непрерывности следующим образом:  $C_1 = (1-A)/\gamma_1 + A$ ,  $\alpha_1 = A/\operatorname{arctg}(k_1 A)$ ,  $\alpha_2 = A/\operatorname{arctg}(k_2 A)$ . Параметр  $h_2$  задается также постоянным и близким к единице, а  $h_1$  должен зависеть от значения коэффициента  $C_1$ , то есть  $h_1 = C_1 + \Delta h$ , где  $\Delta h$  - относительно малый параметр.

Как функционирует предложенное отображение иллюстрирует итерационная диаграмма, представленная на рис. 4. На рис. 5 изображены некоторые характерные временные реализации, полученные с помощью данного отображения.

**Кусочно-разрывное динамическое отображение.** Представленный выше вид модельного отображения является удобным для исследования, однако лишь одним из возможных. То есть можно говорить о целом семействе кусочных отображений, которые можно построить, исходя из общих феноменологических представлений о динамике нейрона. В данной модификации отображения условие окончания берста определяется при помощи специально подобранной сшивки линейных участков

$$x' = \begin{cases} \alpha_1 x, & x \in [0, A), d = 1, \\ (1/\alpha_2)x, & x \in [\delta_3, A), d = -1, \\ A - \delta_1 + \gamma_1(x - A + \delta_1), & x \in [A, C], d = 1, \\ A - \delta_1 + 1/\gamma_2(x - A + \delta_1), & x \in [A + \delta_2, 1], d = -1, \end{cases} \quad (5)$$

$$d' = \begin{cases} -d, & x \in (C, 1], d = 1 \text{ или } x \in [A, A + \delta_2), d = -1 \text{ или } x \in [0, \delta_3), d = -1, \\ d, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

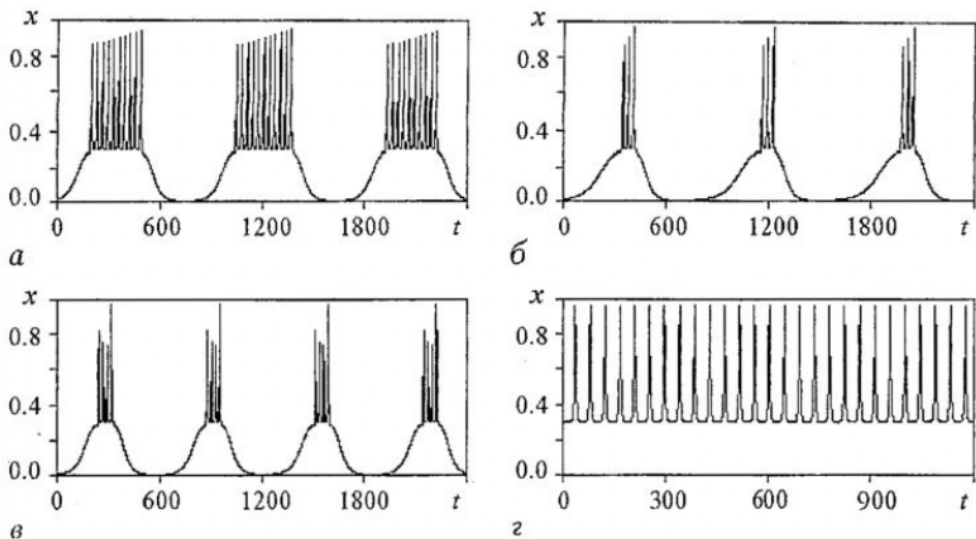


Рис. 5. Временные реализации, полученные для уединенного нейрона с помощью кусочно-непрерывного отображения при  $A = 0.3$ ,  $\delta_1 = 0.01$ ,  $\delta_3 = 0.001$ ; а -  $\gamma_1 = 1.4$ ,  $\gamma_2 = 1.75$ ,  $k_1 = 0.9$ ,  $k_2 = 1.0$ ,  $\delta_2 = 0.001$ ; б -  $\gamma_1 = 1.4$ ,  $\gamma_2 = 1.74$ ,  $k_1 = 0.7$ ,  $k_2 = 1.0$ ,  $\delta_2 = 0.001$ ; в -  $\gamma_1 = 1.6$ ,  $\gamma_2 = 1.75$ ,  $k_1 = 0.9$ ,  $k_2 = 1.0$ ,  $\delta_2 = 0.001$ ; з -  $\gamma_1 = 1.5$ ,  $\gamma_2 = 1.50$ ,  $k_1 = 0.9$ ,  $k_2 = 1.0$ ,  $\delta_2 = 0.0001$

Здесь  $C = A - \delta_1 + (1 - A + \delta_1)/\gamma_1$ . Как нетрудно видеть, отображение (5), (6) имеет более простую форму записи по сравнению с (3), (4).

Необходимо отметить, что несмотря на существенно различный вид записи отображений (3), (4) и (5), (6), результаты, касающиеся поведения ансамблей нейронов, составленных из таких отображений, оказываются принципиально схожими. Поэтому далее в статье речь будет идти о результатах, полученных для кусочно-непрерывного отображения (3), (4). Аналогичные результаты можно получить, рассматривая кусочно-разрывное отображение (5), (6).

### Исследование связанных систем

**Способ задания связи.** Предложенное отображение (3), (4) способно качественно описывать динамику изолированного нейрона, однако основной исследовательский интерес представляют связанные системы. Поэтому модель была обобщена на системы из произвольного числа элементов с любой пространственной конфигурацией. Способ задания связи был выбран по аналогии с моделью Розе - Хиндмарш [4,5].

В общем виде для системы из  $N$  элементов с переменными состояниями  $(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$  в момент времени  $n$  влияние соседних нейронов на  $j$ -й элемент в момент времени  $n+1$  учитывается добавлением слагаемого

$$(1/L_j) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \epsilon_{ij} (x_n^i - x_n^j) \Theta(x_n^j - A) \quad (7)$$

к переменной состояния  $x_{n+1}^j$ . Здесь  $\epsilon_{ij}$  - коэффициент связи между  $i$ -м и  $j$ -м элементами в ансамбле ( $i, j = 1 \dots N$ );  $L_j$  - количество элементов, связанных с данным;  $\Theta$  - функция Хевисайда, учитывающая пороговый характер воздействия.

**Метод исследований.** При изучении систем нейронов основное внимание

уделялось явлению синхронизации в нейронных ансамблях, которое имеет место в биологических системах. Степень синхронизации можно определять различными способами. В данной работе степень синхронизации определялась путем расчета величины  $\Delta$  по следующим формулам:

$$\Delta = (1/M) \sum_{n=1}^M |x_n^1 - x_n^2| \quad (8)$$

для системы из двух элементов и

$$\Delta = (1/M) \sum_{n=1}^M |x_n^k - (1/N) \sum_{i=1}^N x_n^i| \quad (9)$$

для систем из большего числа элементов.

При таком подходе под полной синхронизацией следует понимать идентичное поведение всех элементов ансамбля. Необходимо отметить, что формула (9), вообще говоря, является приближенной, основанной на сравнении переменной состояния одного из элементов с усредненным по всему ансамблю значением переменной состояния. Тем не менее, все проведенные численные эксперименты показали правомерность использования данного соотношения.

Для исследования зависимости степени синхронизации от значений параметров отображения значения величины  $\Delta$  строились на плоскости параметров  $(\epsilon, \gamma_1)$ . Выбор параметра  $\epsilon$  в качестве управляющего закономерен, так как именно он отвечает за величину связи между элементами, а параметр  $\gamma_1$  (так же как и  $\gamma_2$ ), определяющий наклон линейного участка, наиболее существенно влияет на динамику парциальных систем. Точка на плоскости  $(\epsilon, \gamma_1)$  окрашивалась в один из оттенков серого цвета, причем белый цвет соответствовал полной синхронизации ( $\Delta=0$ ), а положительное значение  $\Delta$  отображалось по правилу: чем больше значение, тем темнее точка.

### Исследование системы из двух элементов

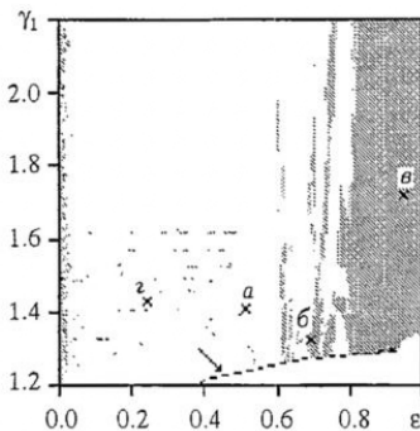


Рис. 6. Плоскость параметров для системы двух связанных нейронов. Значения параметров:  $A = 0.3$ ,  $k_1 = 0.9$ ,  $k_2 = 1.0$ ,  $\gamma_2 = 1.75$ ,  $\delta_1 = 0.01$ ,  $\delta_2 = 0.001$ ,  $\delta_3 = 0.001$ ,  $h_2 = 0.95$ . Переходный процесс - 5000 итераций, время усреднения - 2000 итераций. Точки, обозначенные буквами, соответствуют реализациям, изображенным на рис. 7

Система из двух связанных элементов является простейшим нейронным ансамблем, который может демонстрировать взаимное влияние элементов друг на друга. Рассмотрение этой системы должно дать общие предпосылки для понимания динамики систем связанных нейронов. На рис. 6 представлена плоскость параметров, построенная для данной системы при фиксированных начальных условиях, выбранных так, чтобы состояния парциальных систем в начальный момент времени отличались. Динамика системы во времени в отмеченных на рис. 6 точках представлена на рис. 7.

Среди возможных режимов функционирования системы можно выделить следующие: полная синхронизация, причем в этом случае динамика всей системы в целом не сложнее поведения отдельных элементов (рис. 7, а);

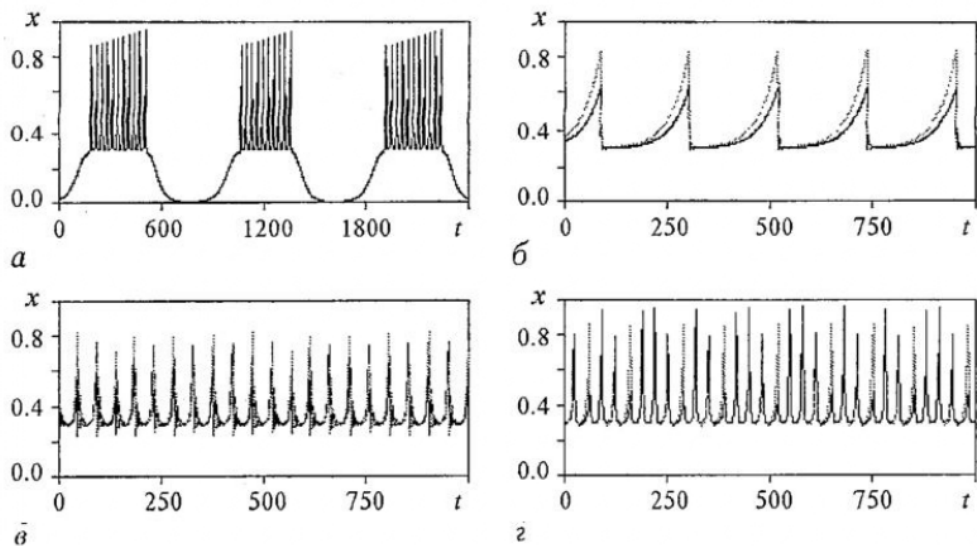


Рис. 7. Временные реализации для двух связанных нейронов в различных точках на плоскости параметров  $(\epsilon, \gamma_1)$  (см. рис. 6). Значения остальных параметров: а -  $\epsilon = 0.50, \gamma_1 = 1.40$ ; б -  $\epsilon = 0.70, \gamma_1 = 1.30$ ; в -  $\epsilon = 0.95, \gamma_1 = 1.70$ ; г -  $\epsilon = 0.24, \gamma_1 = 1.427$

режимы с несинхронной динамикой ( $\Delta \neq 0$ ), однако демонстрирующие взаимосогласованное поведение, наблюдающиеся как в крупных темных областях, так и в мелких (см. рис. 6). Временные реализации для такого поведения изображены на рис. 7, б-г. Кроме того, на рис. 6 следует выделить узкую темную «пунктирную» линию (пересекает ось  $\epsilon$  в точке  $\epsilon \approx 0.4$  и ось  $\gamma_1$  в точке  $\gamma_1 \approx 1.35$ ), на которой наблюдаются сверхдлительные (десятки тысяч итераций) переходные процессы. Линия обозначена на рисунке стрелкой. Таким образом, оказывается, что практически на всей плоскости параметров рис. 6, за исключением области малых  $\epsilon$ , динамика системы является если не синхронной, то, по крайней мере, наблюдается частичная синхронизация.

Как уже отмечалось выше, представленная плоскость параметров была построена для конкретных начальных условий, поэтому возникает вопрос о типичности ее вида. Для ответа на этот вопрос были построены бассейны притяжения синхронных и несинхронных режимов в различных точках плоскости

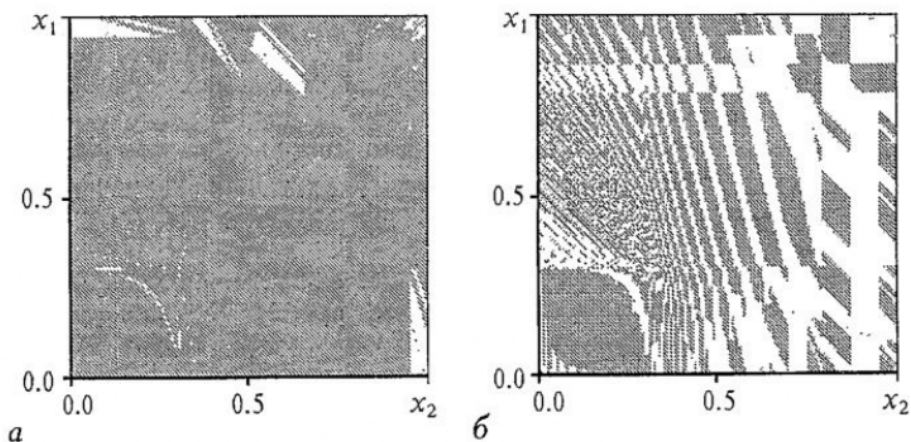


Рис. 8. Вид бассейнов притяжения в двух точках плоскости параметров  $(\epsilon, \gamma_1)$ : а -  $\epsilon = 0.86, \gamma_1 = 1.96$ ; б -  $\epsilon = 0.24, \gamma_1 = 1.427$



параметров  $(\epsilon, \gamma_1)$ . Построение велось аналогично тому, как строились карты синхронизации. Оказалось, что для точек на плоскости  $(\epsilon, \gamma_1)$ , принадлежащих областям с близкими значениями степени синхронизации  $\Delta$  (закрашены однородным серым цветом), практически вся плоскость начальных условий  $(x_1, x_2)$  занята бассейном притяжения одного типа (рис. 8, а). Если же точка взята на границе областей с различной динамикой, то бассейны притяжения имеют сложную структуру (например, рис. 8, б). Таким образом, можно сделать вывод, что представленный на рис. 6 вид плоскости параметров для системы из двух элементов типичен, однако мелкие детали карты могут изменяться при варьировании начальных условий, что было также показано путем построений плоскостей параметров для различных начальных условий.

### **Особенности синхронизации в системах из четырех и семи элементов**

Для системы из  $N$  элементов возможно  $(N-1)!$  различных пространственных конфигураций. Очевидно, что рассмотреть все случаи не представляется возможным, тем более, что далеко не все возможные конфигурации встречаются в реальных нервных системах. Исследования, описываемые в данной работе, направлены на выявление того, как влияет введение дополнительных связей на степень синхронизации в системах нейронов, для которых в качестве базовой пространственной конфигурации была выбрана кольцевая топология.

Рассмотрим трансформацию вида плоскости параметров при последовательном добавлении связей в систему из четырех элементов (рис. 9). Сопоставление представленных плоскостей параметров между собой, а также с плоскостью параметров, полученной для системы из двух элементов (см. рис. 6), позволяет сделать по крайней мере два вывода. Первый вывод - общий вид плоскостей параметров подобен наблюдаемому для системы из двух связанных нейронов. Сохраняются основные особенности: отсутствие синхронизации в области больших значений параметра связи  $\epsilon$ ; обширная область с синхронными режимами, в которую вкраплены малые области с несинхронным поведением; линия, на которой наблюдаются сверхдлительные переходные процессы (обозначена на рисунке стрелками). Второй вывод касается увеличения размера областей с синхронным поведением при введении дополнительных связей. При переходе от цепочки к кольцу для системы из четырех элементов данный вывод не является очевидным (рис. 9, а, б). Если в систему элементов, образующих кольцо, добавить дополнительные связи (рис. 9, в, г), увеличение областей с синхронным поведением становится заметным. Для системы с глобальными связями (см. рис. 9, г) синхронизация наблюдается практически во всем диапазоне изменения управляющих параметров.

Описанные закономерности проверялись на системах из различного числа элементов и для каждой системы получили подтверждение, хотя наблюдались и некоторые особенности. Так, для системы из семи элементов оказалось, что степень синхронизации в системе с конфигурацией типа «цепочка» значительно выше, чем в системе типа «кольцо». Тем не менее, полученная закономерность увеличения степени синхронизации с увеличением числа связей в системе элементов, образующих кольцо, справедлива для всех исследованных систем.

Иллюстрацией данного утверждения служит серия плоскостей параметров, построенных для системы из семи элементов (рис. 10). Если для системы с кольцевой топологией площадь белых областей ( $\Delta = 0$ ) относительно невелика (рис. 10, а), то введение одной, а затем второй дополнительной связи расширяет области с синхронным поведением (рис. 10, б, в). Что касается системы глобально

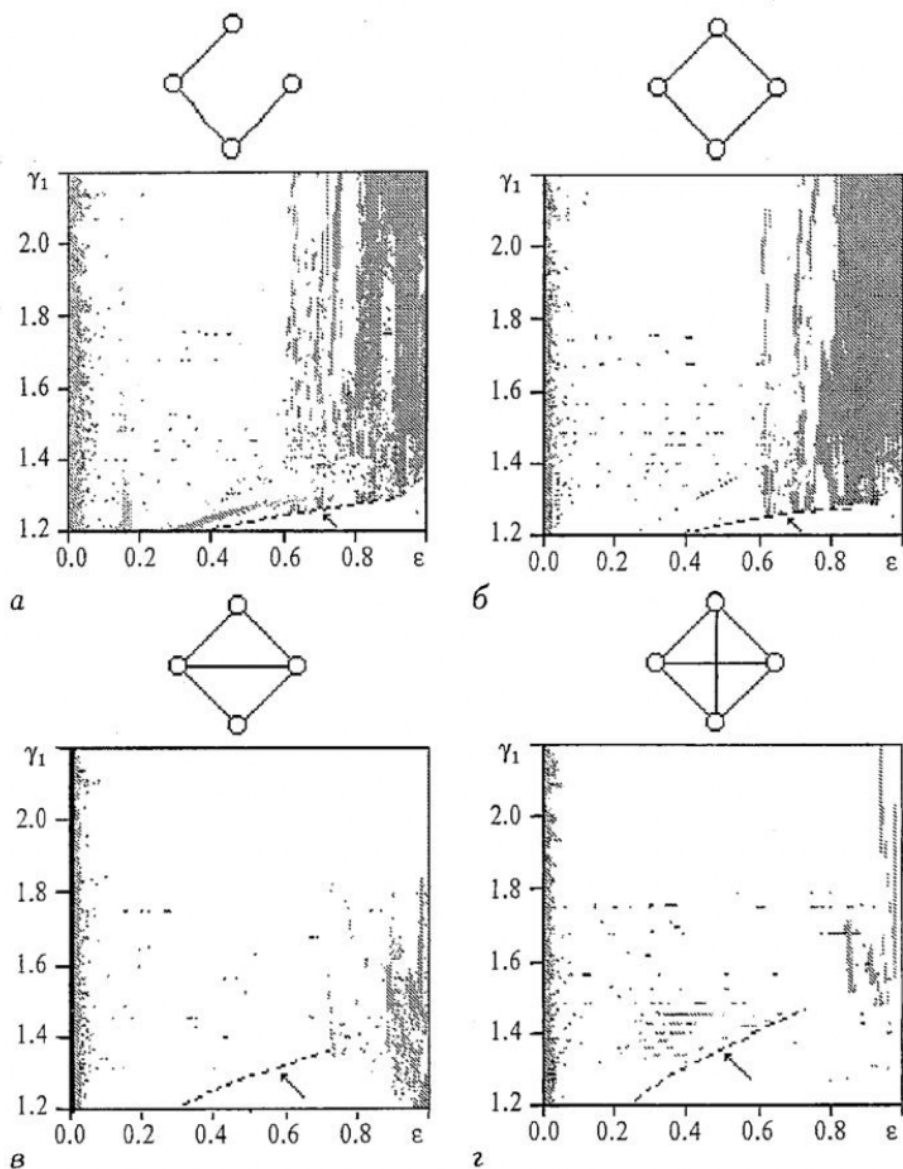


Рис. 9. Трансформация вида плоскостей параметров при последовательном добавлении связей в систему из четырех элементов. Над плоскостями параметров схематически изображены топологии рассматриваемых ансамблей

связанных элементов (рис. 10, з), то здесь, как и в случае ансамбля из четырех элементов (см. рис. 9, з), синхронизация наблюдается практически на всей плоскости параметров.

Как уже отмечалось, глобальная структура плоскостей параметров не изменяется для систем с разным числом элементов и с различной пространственной конфигурацией. Однако стоит отметить, что для ансамблей с числом элементов больше двух динамика системы в темных областях, то есть там, где отсутствует полная синхронизация, может быть очень сложной. Условию синхронизации (9) при  $\Delta=0$  не удовлетворяют как режимы с беспорядочной пространственно-временной динамикой, так и режимы, при которых имеет место кластерная синхронизация с числом кластеров более одного. Проиллюстрировать это можно на примере пространственно-временных диаграмм (рис. 11). Первая

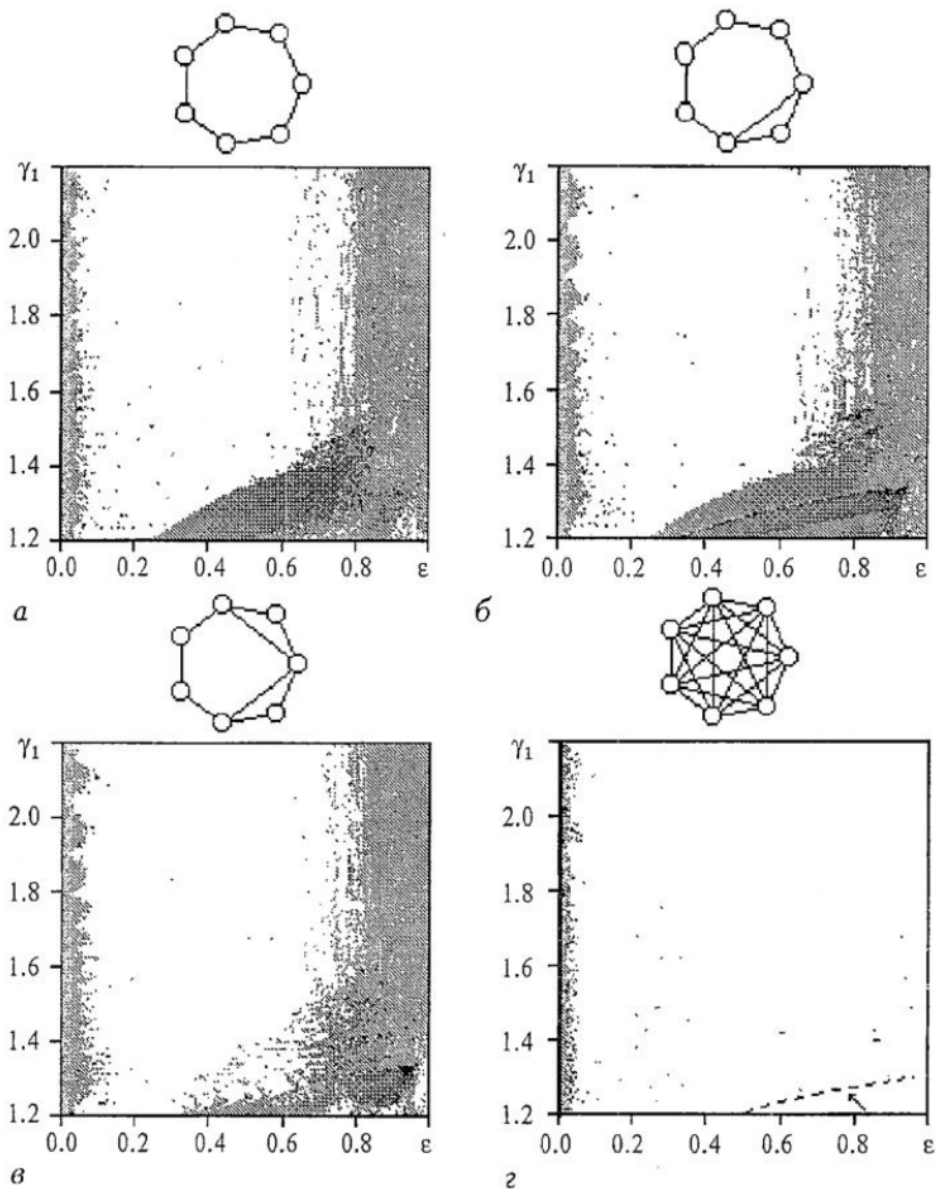


Рис. 10. Плоскости параметров для ансамбля из семи элементов с топологиями, схематично изображенными над картами

диаграмма (рис. 11, *а*) соответствует случаю полной синхронизации, вторая и третья (рис. 11, *б, в*) демонстрируют режимы, одинаково несинхронные с точки зрения критерия (9), однако можно видеть, что диаграмма, представленная на рис. 11, *б*, соответствует регулярному режиму, а представленная на рис. 11, *в* - нерегулярному. Таким образом, для детального описания поведения ансамбля из большого числа модельных нейронов требуются дополнительные критерии, характеризующие степень синхронизации.

### Заключение

В работе представлен подход к моделированию динамики нейронов. Показано, что предложенный феноменологический принцип построения кусочных

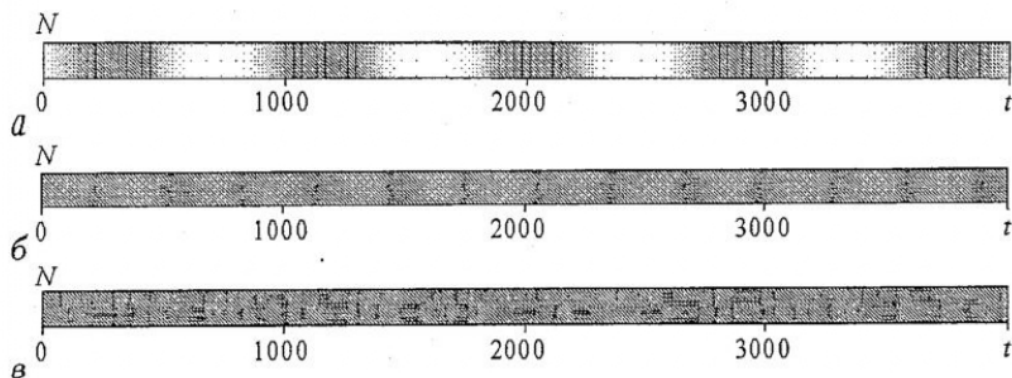


Рис. 11. Некоторые характерные виды пространственно-временных диаграмм, построенные для системы из 20 нейронов. При построении использовались оттенки серого цвета по правилу: чем больше значение переменной состояния, тем темнее точка

отображений позволяет описывать не только динамику уединенного нейрона, но и эффект синхронизации в ансамблях нейронов. В силу простоты предложенного класса моделей они могут успешно применяться для изучения некоторых особенностей поведения ансамблей из большого числа элементов. В качестве примера эффективного использования предложенного отображения было показано, что введение дополнительных связей в системах с кольцевой топологией, составленных из небольшого числа элементов, расширяет диапазон управляющих параметров, при которых наблюдается полная синхронизация.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 02-02-16351, 00-15-96673, Министерства образования РФ, грант № E00-3.5-196 и CRDF, REC-006.*

### Библиографический список

1. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // Journal of Physiology (London). 1952. Vol. 117. P. 500.
2. FitzHugh R. Impulses and physiological states in models of nerve membrane // Biophysics Journal. 1961. Vol. 1. P. 445.
3. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. Vol. 50. P. 2061.
4. Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстоун А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суцук М.М. Синхронизация в нейронных ансамблях // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 363.
5. Abarbanel H.I.D., Huerta R., Rabinovich M.I., Rowat P.F., Rulkov N.F., Selverston A.I. Synchronized action of synaptically coupled chaotic models neurons // Neural computation. 1996. Vol.8 № 8. P. 1567.
6. Huerta R. A finite automata model of spiking-bursting neurons // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6, № 4. P. 705.
7. Rabinovich M.I., Selverston A.I., Rubchinsky L., Huerta R. Dynamics and kinematics of simple neural systems // Chaos. 1996. Vol. 6, № 3. P. 288.
8. Бельых И.В. Бифуркация колебаний мембранного потенциала и моделирование электрически связанных нейронов с помощью отображений // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 12. С. 1572.
9. Hayakawa Y., Sawada Y. Learning-induced synchronization of a globally coupled excitable map system // Physical Review E. 2000. Vol.61, № 5. P. 5091.
10. Rulkov N.F. Regularization of synchronized chaotic bursts // Physical Review Letters. 2001. Vol.86, № 1. P. 183.
11. Elson R.C., Selverston A.I., Huerta R., Rulkov N.F., Rabinovich M.I.,

Abarbanel H.D.I. Synchronous behavior of two coupled biological neurons // Physical Review Letters. 1998. Vol. 81, № 25. P. 5692.

12. Szucs A., Varona P., Volkovskii A.R., Abarbanel H.D.I., Rabinovich M.I., Selverston A.I. Interacting biological and electronic neurons generate realistic oscillatory rhythms // Neuro Report. 2000. Vol. 11, № 30. P. 1.

13. Андреев К.В., Красичков Л.В. Моделирование поведения нейрона с помощью функционального отображения // Вторая международная конференция «Фундаментальные проблемы физики» (Саратов, Россия, 9-14 октября 2000 года). Материалы конференции. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000. С. 28.

14. Андреев К.В. Модель электрической активности нейрона в виде функционального отображения // «Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2000». Сборник материалов научной школы-конференции. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000. С. 76.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 01.08.2002

## SAME PECULIARITIES OF SYNCHRONIZATION UNDER CHANGING THE CONNECTION STRUCTURE IN SMALL MODEL NEURON ENSEMBLES, DESCRIBED BY PIECEWISE CONTINUOUS MAPS AND PIECEWISE DISCONTINUOUS MAPS

*K.V. Andreev, L.V. Krasichkov*

The piecewise-linear stochastic map, the piecewise-continuous dynamic map and piecewise-discontinuous dynamic map, for electrical activity modeling of neuron are proposed. These maps are constructed using the phenomenological notions of biological neuron dynamics. Advantages and limitations of the proposed maps are discussed. The behaviour of small model neuron ensembles on the parameters plane is investigated. Considerable dependence between the synchronization degree and the topology of neuron ensemble is shown.



*Кирилл Владимирович Андреев* окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2001). Аспирант кафедры нелинейной физики ФНП СГУ. Область научных интересов: моделирование динамики малых нейронных ансамблей, исследование поведения решеток нелинейных активных элементов. Имеет 9 публикаций по данной тематике.



*Красичков Леонид Валерьевич* - окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика. Работал в Научно-исследовательском институте механики и физики СГУ. Доцент факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика, количественные характеристики сложнопериодического и хаотического поведения динамических систем, преобразование хаотических колебаний цепями и средами. Автор и соавтор более 50 научных публикаций, в том числе пособия «Введение в теорию самоорганизации открытых систем» (М.: Физматлит, 2002, совместно с Д.И. Трубецковым и Е.С. Мчедловой).