



ВИДЫ КОЛЕБАНИЙ, МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ И БАССЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЯ АТТРАКТОРОВ СИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА

Б.П. Безручко, М.Д. Прохоров, Е.П. Селезнев

Нелинейные колебательные системы, каждая из которых при изменении управляющего параметра демонстрирует переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, при наличии симметричной связи демонстрируют различные виды взаимной синхронизации. Иерархия возможных видов колебаний такой системы рассматривается в работе на примере диссипативно связанных квадратичных отображений с использованием способа различения мультистабильных состояний по фазовому признаку. Показаны пути эволюции колебательных состояний и их бассейнов притяжения в широком диапазоне изменения параметров нелинейности и связи. Полученные результаты сопоставляются с результатами физического эксперимента на системе связанных периодически возбуждаемых нелинейных резонаторов.

Введение

Система двух симметрично связанных идентичных объектов, каждый из которых демонстрирует при изменении управляющего параметра переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, является одним из эталонных объектов нелинейной динамики. Наиболее детальные исследования поведения таких систем были проведены с помощью дискретных моделей в виде связанных одномерных унимодальных отображений с квадратичными максимумами. Показано, что связанные идентичные отображения демонстрируют широкий набор нелинейных явлений, включая мультистабильность, синхронизацию, хаос и гиперхаос, захват частоты, перемежаемость, кризисы хаотических аттракторов. В них может наблюдаться переход к хаосу как через последовательность бифуркаций удвоения периода, так и через разрушение тора [1-6]. Пространство параметров системы имеет сложное устройство с самоподобной структурой [7-9], универсальность которой может быть объяснена с помощью ренормгруппового анализа [9-12]. Многообразие мультистабильных состояний связанных отображений очень велико [12-19]. Разобраться в них и путях их формирования помогает исследование бассейнов притяжения аттракторов системы [20-23]. Обнаруженные при исследовании отображений особенности сложной динамики связанных систем хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований на различных связанных между собой реальных объектах [3, 13-16, 22-25]. Связанные отображения весьма популярны в связи с

изучением актуальных проблем разрушения хаотической синхронизации и перехода от синхронного хаотического поведения к несинхронному [26-30]. В последние годы с их помощью удалось объяснить бифуркационные механизмы потери устойчивости синхронного хаотического режима, вызывающие пузырение аттракторов и дырчатые бассейны [31-36].

Несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию системы двух симметрично связанных отображений, сравнительно мало внимания уделено изучению многообразия вариантов взаимной синхронизации подсистем и иерархии устойчивых видов колебаний. В данной работе мы постарались восполнить этот пробел, обобщив результаты наших предыдущих исследований и дополнив их новыми. Целесообразность такого рассмотрения определяется тем, что разветвленность иерархической схемы и разнообразие вариантов мультистабильных колебаний столь велики, что существуют даже попытки их статистического описания. Отсутствие полной схемы возможных колебательных режимов приводит иногда к спорным выводам о закономерностях в рассматриваемой системе, таким, например, как выделение в качестве универсального «7-зонового» варианта эволюции колебательных режимов при изменении параметра связи [37]. Это говорит об актуальности задачи подробного описания общей картины сложной динамики популярной эталонной системы на основе определенных принципов.

В работе на примере двух квадратичных отображений, связанных диссипативно (раздел 1), нами дана классификация видов колебаний, в которой в качестве отличительного признака используется сдвиг фазы колебаний подсистем. Результаты исследования областей существования выделенных режимов в пространстве параметров и путей их эволюции при малых значениях коэффициента связи представлены в разделе 2. В разделе 3 описаны несинфазные режимы, существующие в области сильной связи. В разделе 4 исследованы бассейны притяжения аттракторов периодических и хаотических мультистабильных состояний и их эволюция при изменении параметров. В разделе 5 проводится сопоставление полученных результатов с результатами физического эксперимента на системе связанных нелинейных резонаторов. Обсуждение степени общности результатов проводится в разделе 6.

1. Объект исследования

Все мыслимые варианты симметричной связи между отображениями с квадратичными максимумами могут быть представлены комбинацией двух основных видов: диссипативного и инерционного [9, 12]. Несмотря на ряд характерных особенностей, присущих каждому из этих типов связи, степень общности колебательных эффектов в системах с этими типами связи достаточно велика, что позволяет рассмотреть лишь один из них. В нашей работе исследование поведения системы двух связанных отображений проведено на примере диссипативной связи. Она способствует выравниванию мгновенных состояний подсистем, а при равенстве мгновенных состояний не влияет на их динамику. Такой тип связи возникает во многих системах, например, в радиотехнических объектах он реализуется с помощью резистора. Система отображений с диссипативной связью имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + k[f(y_n) - f(x_n)], \\y_{n+1} &= f(y_n) + k[f(x_n) - f(y_n)],\end{aligned}\tag{1}$$

где x, y - динамические переменные; $n=0, 1, 2, \dots$ - дискретное время; $f(x_n)$ и $f(y_n)$ - функции, описывающие поведение изолированных подсистем; k - коэффициент связи. Такой тип связи может быть наглядно истолкован на примере динамики популяций. Если $f(x_n)$ и $f(y_n)$ моделируют, например, численность некоторых особей в двух граничащих популяциях, то в промежутках времени между периодами размножения и гибели особи могут мигрировать в обе стороны, и k - доля особей, мигрировавших в соседнюю популяцию. Параметр связи k может изменяться от 0 до 1. В этом интервале изменения параметра связи фазовый объем претерпевает дополнительное сжатие по сравнению с той величиной, которую он имел бы в отсутствие связи, что дает основание называть такую связь диссипативной.

Нами исследуется система (1), в которой $f(x_n)=\lambda-x_n^2, f(y_n)=\lambda-y_n^2$, то есть

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2), \\y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + k(y_n^2 - x_n^2).\end{aligned}\tag{2}$$

Будем рассматривать случай, когда значения параметра нелинейности λ в первой и во второй подсистемах равны.

2. Классификация состояний связанной системы и их эволюция при малых k

2.1. Классификация видов колебаний. В силу того, что отображения (1) инвариантны относительно дискретной группы симметрий, в основу классификации колебательных режимов удобно положить величину временного сдвига между колебаниями подсистем. Очевидно, что в случае унимодальности функций $f(x_n)$ и $f(y_n)$ в пределе нулевой связи ($k=0$) каждый режим периода N может быть реализован N способами, отличающимися сдвигом колебаний подсистем во времени на величину $m=0,1,2,\dots,N-1$. Назовем их видами колебаний и используем в качестве базы для описания иерархии колебательных режимов при введении связи, когда взаимодействие подсистем приводит к различным вариантам их взаимной синхронизации. Для обозначения периодических видов будем использовать запись N_m . В хаотических режимах, обозначаемых N^m , несмотря на отсутствие повторяемости в движениях, можно сохранить принцип классификации, используемый для периодических режимов, если понимать под N число лент (связность) аттрактора, а под m - временной сдвиг между колебаниями подсистем на определенной ленте аттрактора, например, содержащей максимальные значения x_n и y_n . Режимы с $m=0$, для которых $x_n - y_n = 0$, а фазовый портрет располагается на диагонали плоскости (x_n, y_n) , являются синфазными. Остальные колебательные режимы с $m \neq 0$ - несинфазные. Заметим, что хаотические режимы могут быть несинфазными ($x_n \neq y_n$) даже при $m=0$, например, в области слабой связи подсистем. Чтобы отличать такие режимы от синфазных, будем использовать для их обозначения индекс $m=N$. Возможность реализации того или иного вида колебаний определяется величинами параметров и выбором начальных условий.

2.2. Эволюционная схема при малых k . Если воспользоваться известным графическим приемом и изобразить области существования и эволюции каждого из мультистабильных видов колебаний лежащими на отдельных листах, то можно построить наглядную многолистную схему областей существования устойчивых колебательных режимов на плоскости «коэффициент связи - управляющий

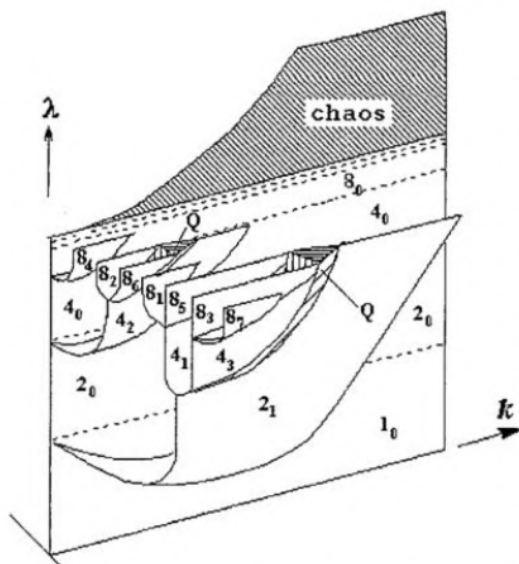


Рис. 1. Качественная схема устройства пространства параметров нелинейности и связи системы (2), отражающая области существования всех видов колебаний периода 1, 2, 4, 8 при $k < 0.5$. Области квазипериодических колебаний обозначены через Q

объединяющие некоторые группы режимов. Ветви начинаются периодическими режимами, а заканчиваются хаотическими. Ветвь A соответствует эволюции синфазных режимов ($m=0$), отходящие от нее ветви B, C, D - несинфазным режимам. Так, ветвь B начинается циклом периода 2 и объединяет колебания с $m=2l-1$, где $l=1, 2, 3, \dots$, ветвь C начинается циклом периода 4 и объединяет виды с $m=2(2l-1)$, ветвь D - соответственно, 8 и $m=4(2l-1)$.

Значения λ , при которых происходят бифуркации удвоения синфазных циклов в связанной системе, точно совпадают с соответствующими бифуркационными значениями в изолированных подсистемах. На схеме в точках раздвоения ветви A исходный синфазный цикл теряет устойчивость (один мультипликатор достигает значения -1) и в его окрестности рождается устойчивый синфазный цикл удвоенного периода, продолжающий ветвь. Потерявший устойчивость цикл с увеличением λ еще раз претерпевает бифуркацию удвоения периода (второй мультипликатор достигает -1) и возникает неустойчивый несинфазный цикл удвоенного периода, который в дальнейшем становится устойчивым. В результате каждый синфазный цикл $(2^n)_0$ порождает с ростом λ пару циклов: синфазный $(2^{n+1})_0$ и несинфазный $(2^{n+1})_2$. Родившиеся таким образом несинфазные циклы $2_1, 4_2, 8_4, \dots$ ложатся в основу ветвей B, C, D, \dots , где с ростом λ обязательно претерпевают бифуркацию рождения тора. В результате синхронизации движения на торе возникают следующие пары несинфазных циклов: 4_1 и 4_3 на ветви B , 8_2 и 8_6 на C , 16_4 и 16_{12} на D . Эти циклы в свою очередь порождают по два цикла аналогично только что рассмотренному случаю с синфазными циклами, и так до критических значений λ , соответствующих образованию хаотического аттрактора на базе каждого из циклов ветви. В области хаоса с ростом λ эволюционная схема внешне похожа на схему периодических режимов. Пунктирные линии соответствуют непритягивающим множествам, сплошные - хаотическим аттракторам. Точка слияния пунктирной и сплошной линий соответствует слиянию лент аттрактора и его объединению с ранее

параметр». На рис. 1 представлена такая схема, качественно отражающая области существования всех видов колебаний периода 1, 2, 4, 8 при $k < 0.5$. Фазовые портреты этих режимов и возникших на их основе хаотических колебаний изображены на рис. 2, а, являющемся сечением рис. 1 плоскостью $k = \text{const}$, продолженной в область больших λ . Эта схема качественно иллюстрирует эволюцию движений в системе (2) с изменением параметра λ при слабой фиксированной связи. Рассмотрим динамику связанной системы, используя еще один, более подробный и удобный для обозрения вариант изображения эволюционной схемы (рис. 2, б) [16]. Сплошные линии на этой схеме соответствуют устойчивым режимам, штриховые - неустойчивым. Точками показаны бифуркационные переходы. Поясним узловые моменты этой схемы. На ней выделены ветви A, B, C, D ,

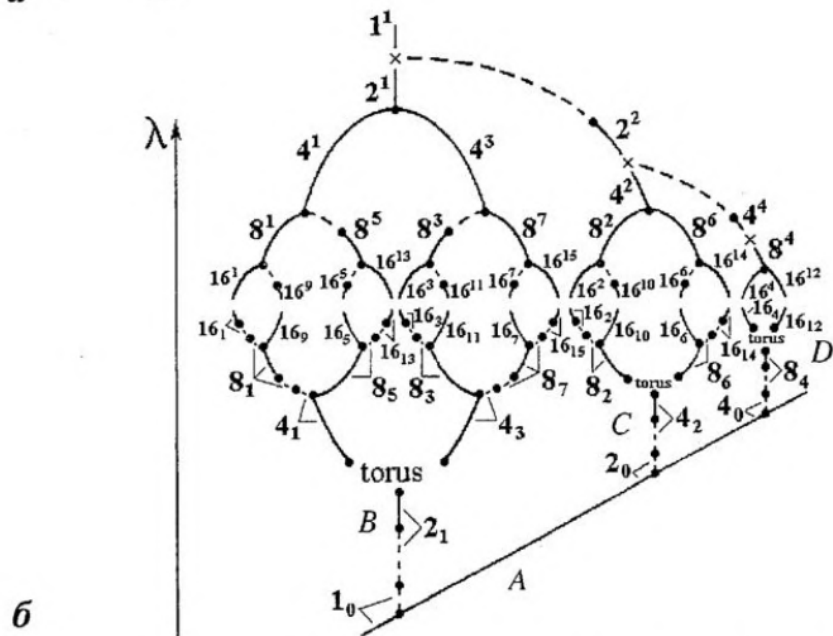
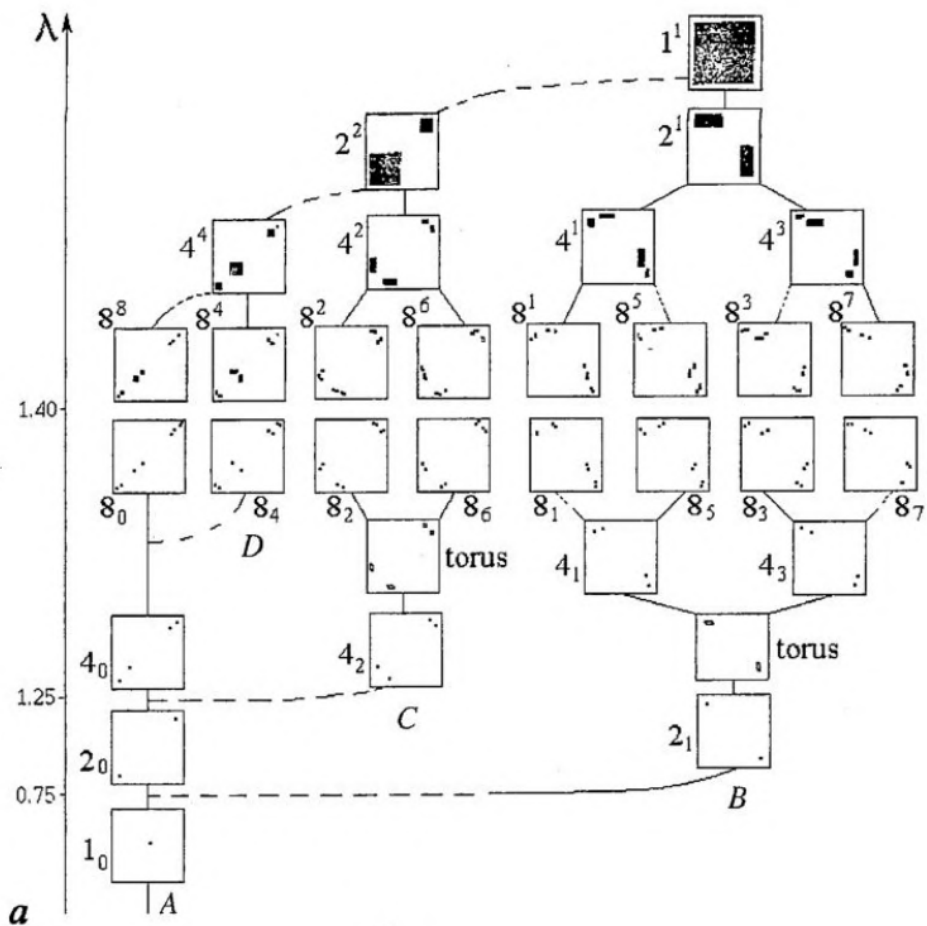


Рис. 2. *a* - Аттракторы системы (2) на плоскости (x_n, y_n) при $k=0.006$. *б* - Схема эволюции колебательных состояний связанной системы с изменением управляющего параметра при малом фиксированном коэффициенте связи

непритягивающим множеством, так что в результате формируется аттрактор, включающий в себя оба отмеченные множества. Каждая из ветвей с ростом λ завершается парой странных аттракторов, индексы которых совпадают с индексами циклов, возникающих в результате движения на торе (4^1 и 4^3 на ветви B , 8^2 и 8^6 на C, \dots). При дальнейшем увеличении λ наблюдается режим перемежаемости хаос - хаос между аттракторами пары. Режим перемежающейся стохастичности плавно сменяется аттрактором $(2^n)^m$, у которого n и m совпадают с индексами цикла, являющегося началом этой ветви: 2^1 на ветви B , 4^2 на ветви C, \dots . Выше отметки (\times) соответствующий аттрактор объединяется с аттракторами, которые образуют ветви, расположенные на рис. 2, б справа.

При нулевом коэффициенте связи и значениях λ , меньших критического, колебания идентичных подсистем одинаковы и могут быть лишь сдвинуты относительно друг друга во времени. Наличие конечной связи приводит к появлению различий во временных реализациях периодических колебаний даже идентичных подсистем и к нарушению симметрии цикла относительно замены $x \leftrightarrow u$. Это касается всех видов колебаний, кроме синфазных $(2^n)_0$ и родившихся непосредственно из синфазных $(2^{n+1})_{2^n}$. Степень различия увеличивается с ростом связи, но не затрагивает определяющего признака вида колебаний - фиксированного значения временного сдвига между колебаниями подсистем (если под этим понимать временной интервал, например, между максимумами в периодических реализациях x_n, y_n). Циклы, родившиеся в результате синхронизации движения на торе ($4_1-4_3, 8_2-8_6, 16_4-16_{12}, \dots$), образуют зеркально симметричные пары: замена $x \leftrightarrow u$ переводит их друг в друга. Родившиеся из них циклы также образуют зеркально симметричные пары $(2^n)_m - (2^n)_{2^n-m}$ при условии идентичности путей эволюции. Например, зеркально симметричны виды $8_1-8_7, 16_2-16_{14}, 16_1-16_{15}$, родившиеся после удвоения периода потерявших устойчивость циклов, а также $8_5-8_3, 16_{10}-16_6$, появившиеся непосредственно после бифуркации удвоения периода исходного цикла. Как видно из рис. 1 и рис. 3, а, несинфазные виды колебаний, существующие в области малой связи, с ростом k теряют устойчивость.

С увеличением λ все несинфазные симметричные циклы $N_m, m=N/2$ претерпевают бифуркацию рождения тора (мультипликаторы этих циклов с увеличением параметра становятся комплексно-сопряженными и достигают по модулю единицы). В области существования квазипериодических движений наблюдается множество резонансных циклов на торе, имеющих четный период и характерную форму в виде клюва. На рис. 3, б показаны области двух таких резонансных циклов с периодом 18 и 22. Эти циклы симметричны относительно замены $x \leftrightarrow u$ и с изменением параметров демонстрируют рождение тора (вторичный тор). В области существования вторичного тора также наблюдается множество резонансных циклов. Выделить определенные закономерности в их иерархии достаточно сложно. Однако следует отметить существование симметричных резонансных циклов, которые с изменением параметров опять демонстрируют рождение тора. Таким образом, двигаясь по сложной траектории в пространстве параметров исследуемой системы, можно наблюдать последовательность переходов: цикл - тор - резонансный цикл - тор - резонансный цикл - тор.

Асимметричные, но симметричные друг другу циклы, например, 4_1 и 4_3 (замена $x \leftrightarrow u$ отображает один цикл в другой), возникают в результате седло-узловой бифуркации. Линии седло-узловых бифуркаций таких циклов совпадают и опираются на линию рождения тора в точке $k=0$ (см. рис. 3, а), а реализация того или иного цикла зависит от выбора начальных условий. Структура плоскости параметров рис. 3, а типична для всех ветвей несинфазных режимов.

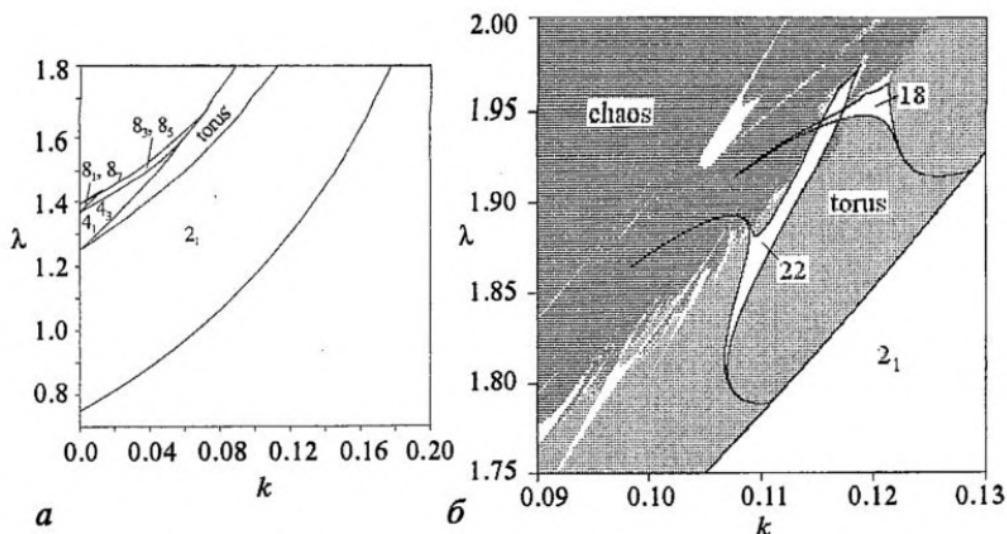


Рис. 3. а - Области существования несинфазных циклов ветви В эволюционной схемы на плоскости параметров (k, λ) ; б - области существования резонансных циклов периода 18 и 22

3. Несинфазные режимы при сильной связи

В области сильной связи $0.5 \leq k \leq 1$ лист синфазного вида колебаний на плоскости (k, λ) продолжается без каких-либо особенностей, а схема расположения листов несинфазных видов полностью симметрична относительно $k=0.5$ (рис. 4, а). Однако, несмотря на симметрию бифуркационных линий, несинфазные режимы в области слабой и сильной связи *принципиально различны*. Для обозначения последних будем указывать индексы римскими цифрами. Как было показано в [18], в области сильной связи существуют устойчивые несинфазные циклы периода 1. Их существование может быть продемонстрировано следующим образом: введем новые переменные $u_n = (x_n - y_n)/2$, $v_n = (x_n + y_n)/2$. В этих новых переменных система (2) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(2k-1)u_n v_n, \\ v_{n+1} &= \lambda - v_n^2 - u_n^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Для цикла периода 1 $u_{n+1} = u_n = u$, $v_{n+1} = v_n = v$, и из (3) получаем

$$\begin{aligned} u(1 - 2(2k-1)v) &= 0, \\ v^2 + v + u^2 - \lambda &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Первое уравнение в (4) имеет два решения: $u=0$ и $v=1/[2(2k-1)]$. Случай $u=0$ соответствует синфазному режиму ($x_n = y_n$), при этом из второго уравнения $v_{1,2} = [-1 \pm (1+4\lambda)^{1/2}]/2$. Другое решение соответствует несинфазному режиму. Подставив v во второе уравнение системы (4), получим $u_{1,2} = \pm[\lambda - (4k-1)/(4(2k-1)^2)]^{1/2}$.

Для исследования циклов периода 1 на устойчивость найдем их мультипликаторы как собственные значения матрицы Якоби М отображения (3):

$$M = \begin{bmatrix} 2(2k-1)v & 2(2k-1)u \\ -2u & -2v \end{bmatrix}.$$

Обозначив мультипликаторы цикла периода 1 через $\mu_{1,2(1)}$, получим

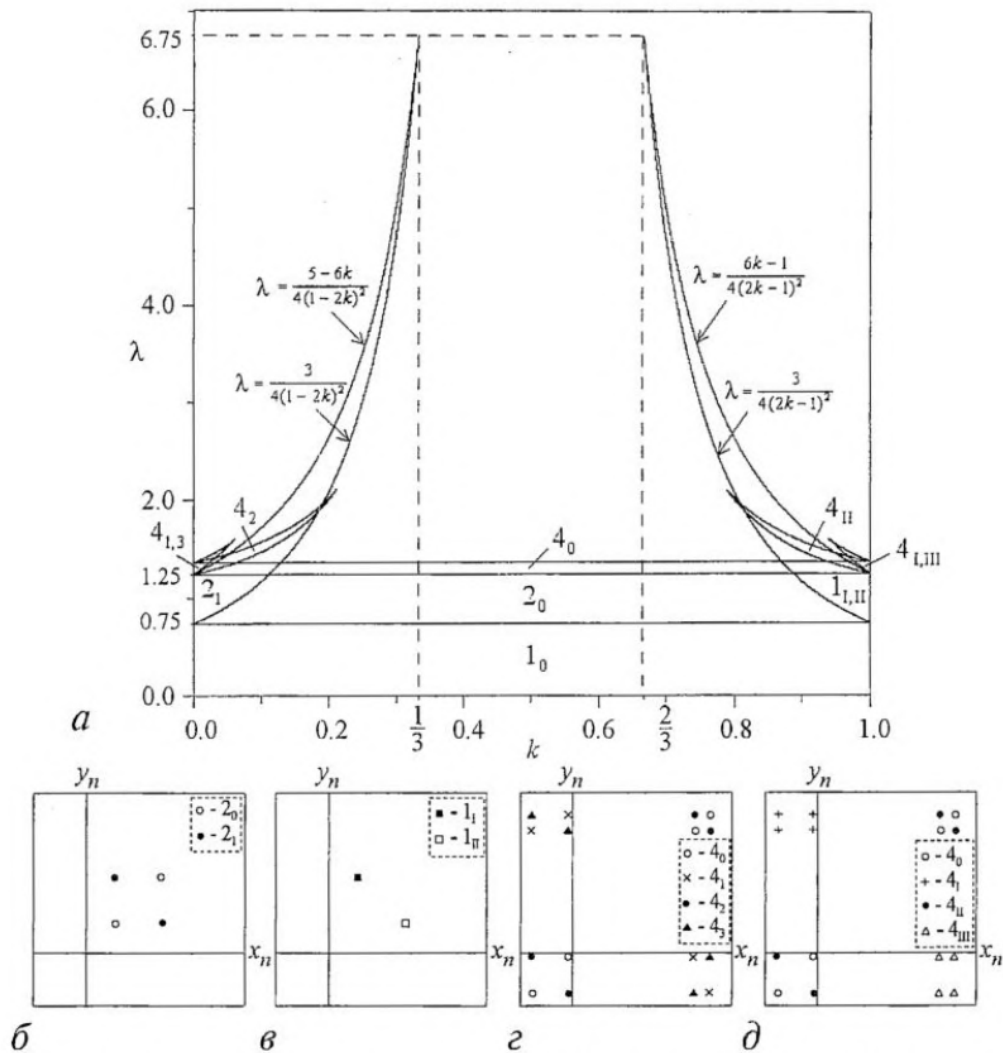


Рис. 4. а - Области устойчивости циклов периода 1, 2 и 4 на плоскости параметров (k, λ) системы (2). Для несинфазных циклов периода 1 и 2 границы областей получены в явном виде. б, в - аттракторы периода 2 и 1 при $\lambda=0.8$ и $k=0$, $k=1$, соответственно. г, д - аттракторы периода 4 при $\lambda=1.3$ и $k=0$, $k=1$, соответственно

$$\mu_{1,2(1)} = 2\nu(k-1) \pm 2[k^2\nu^2 + u^2(1-2k)]^{1/2}. \quad (5)$$

Для синфазного цикла 1_0 $u=0$ и $\mu_{1(1_0)}=-2\nu$, $\mu_{2(1_0)}=2\nu(2k-1)$. Таким образом, в интервале положительных λ значение $\nu_1 = [-1 - (1+4\lambda)^{1/2}]/2$ соответствует всегда неустойчивой неподвижной точке, а $\nu_2 = [-1 + (1+4\lambda)^{1/2}]/2$ - устойчивой при $\lambda < 3/4$ неподвижной точке (оба мультипликатора при этом по модулю меньше единицы).

Подставляя в (5) значения ν и $u_{1,2}$, соответствующие несинфазному режиму, и обозначая мультипликаторы в точке (ν, u_1) через $\mu_{1,2(1_1)}$, а в точке (ν, u_2) через $\mu_{1,2(1_2)}$, получим

$$\begin{aligned} \mu_{1,2(1_1)} = \mu_{1,2(1_2)} = & (k-1)/(2k-1) \pm \\ & \pm [[(k-1)/(2k-1)]^2 + 4(k-\lambda(2k-1)^2)/(2k-1)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

То есть существуют два несинфазных, симметричных относительно замены $u \rightarrow -u$

устойчивы в широкой области параметров (см. рис. 4, а) (границы области устойчивости циклов $1_I, 1_{II}$ получены в явном виде из (6)). Например, при $k=1$ $\mu_{1,2(1_I)} = \mu_{1,2(1_{II})} = \pm 2(1-\lambda)^{1/2}$ и циклы $1_I, 1_{II}$ устойчивы при $3/4 < \lambda < 5/4$, то есть при тех же значениях λ , что и циклы периода 2 в несвязанной системе.

Симметрия бифуркационных линий относительно $k=0.5$, то есть относительно замены $k \rightarrow 1-k$, тоже может быть подтверждена с помощью анализа мультипликаторов циклов. Продемонстрируем это на примере несинфазных циклов периода 1 и 2. Для цикла периода 2 отображения (2) матрица Якоби имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} 2x_1(k-1) & -2ky_1 \\ -2kx_1 & -2y_1(k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_2(k-1) & -2ky_2 \\ -2kx_2 & -2y_2(k-1) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

где x_1, x_2 и y_1, y_2 - элементы циклов в подсистемах x и y , соответственно. Так как несинфазный цикл 2_1 является симметричным, то для него $x_1=y_2, x_2=y_1$. С учетом этого мультипликаторы несинфазного цикла 2_1 , являющиеся собственными значениями матрицы (7), имеют вид

$$\mu_{1,2(2_1)} = 2k^2(x_1+y_1)^2 + 4x_1y_1(1-2k) \pm 2k(x_1+y_1)[k^2(x_1+y_1)^2 + 4x_1y_1(1-2k)]^{1/2}.$$

Выразив теперь значения мультипликаторов $\mu_{1,2(2_1)}$ только через λ и k , получим

$$\begin{aligned} \mu_{1,2(2_1)} &= 2k^2/(1-2k)^2 + 4(1-k-\lambda(1-2k)^2)/(1-2k) \pm \\ &\pm (2k/(1-2k)[(k/(1-2k))^2 + 4(1-k-\lambda(1-2k)^2)/(1-2k)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Возводя (6) в квадрат и обозначая мультипликаторы несинфазных циклов 1_I и 1_{II} через $\mu_{1,2(1_{I,II})}$, окончательно получаем:

$$\mu_{1,2(2_1)}(\lambda, k) = \{\mu_{2,1(1_{I,II})}(\lambda, 1-k)\}^2.$$

Следовательно, если $|\mu_{1,2(2_1)}(\lambda, k)| < 1$ (несинфазный цикл 2_1 устойчив при некотором k), то $|\mu_{2,1(1_{I,II})}(\lambda, 1-k)| < 1$ (несинфазные циклы периода 1 устойчивы при $1-k$).

Для произвольного k нетрудно показать, что замена $k \rightarrow 1-k$ в системе (2) приводит к замене $x_{n+1} \leftrightarrow y_{n+1}$, что эквивалентно симметричному отражению точки (x_{n+1}, y_{n+1}) относительно линии $x=y$. В результате, если при некотором k существуют циклы периода $2^n, n=2,3,\dots$, то циклы с тем же периодом и типом симметрии будут существовать и при величине связи $1-k$. Фазовые портреты зеркально симметричных пар циклов $(2^n)_m - (2^n)^{2^n-m}$ при коэффициентах связи k и $1-k$ качественно различны, а несинфазных симметричных циклов $(2^n)_{n/2}$ - внешне совпадают, но отличаются порядком следования элементов (рис. 4, б-д).

Отметим, что введение связи между элементами приводит к появлению устойчивых режимов, существующих при таких значениях параметров, достижение которых в отсутствие связи было бы невозможным. Например, как видно из рис. 4, а, устойчивые несинфазные режимы периода 1 и 2 существуют в связанной системе при значении параметра нелинейности λ , более чем в 3 раза превышающем критическое ($\lambda_{кр}=2$), при котором все синфазные решения уходят на бесконечность. Таким образом, введение связи между элементами не только обогащает динамику системы, но и может существенно расширить область ее конечных решений.

4. Бассейны притяжения мультистабильных состояний

Рассмотрим особенности формирования бассейнов на примере модели (2), двигаясь по схеме рис. 2, *a* снизу вверх, от значений λ , при которых в фазовом пространстве существует единственный цикл периода 1. Так, в примере, представленном на рис. 5, *a*, устойчивым решением является точка C (цикл периода 1), а бассейном его притяжения - вся область значений x_0, y_0 , ограниченная прямыми линиями $|x_0|=|x_B|, |y_0|=|y_B|$, где x_B, y_B соответствуют неустойчивому решению - точке B . При $k=0$ бассейн представляет собой квадрат со стороной $a=1+(1+4\lambda)^{1/2}$. С увеличением коэффициента связи он постепенно деформируется, приобретая при $k=0.5$ форму круга радиуса $r=2^{1/2}(1+(1+4\lambda)^{1/2})$ (рис. 5, *б*). Если начальная точка (x_0, y_0) находится вне бассейна, с течением времени решение «убегает» на бесконечность; (на рис. 5 и на последующих рисунках эта область отмечена штриховкой). Система (2) инвариантна относительно замены $x_n \rightarrow -x_n, y_n \rightarrow -y_n$, поэтому бассейны притяжения аттракторов симметричны относительно осей $x_0=0, y_0=0$, и мы далее будем приводить на рисунках лишь правый верхний квадрант плоскости (x_0, y_0) .

С появлением в фазовом пространстве второго аттрактора область

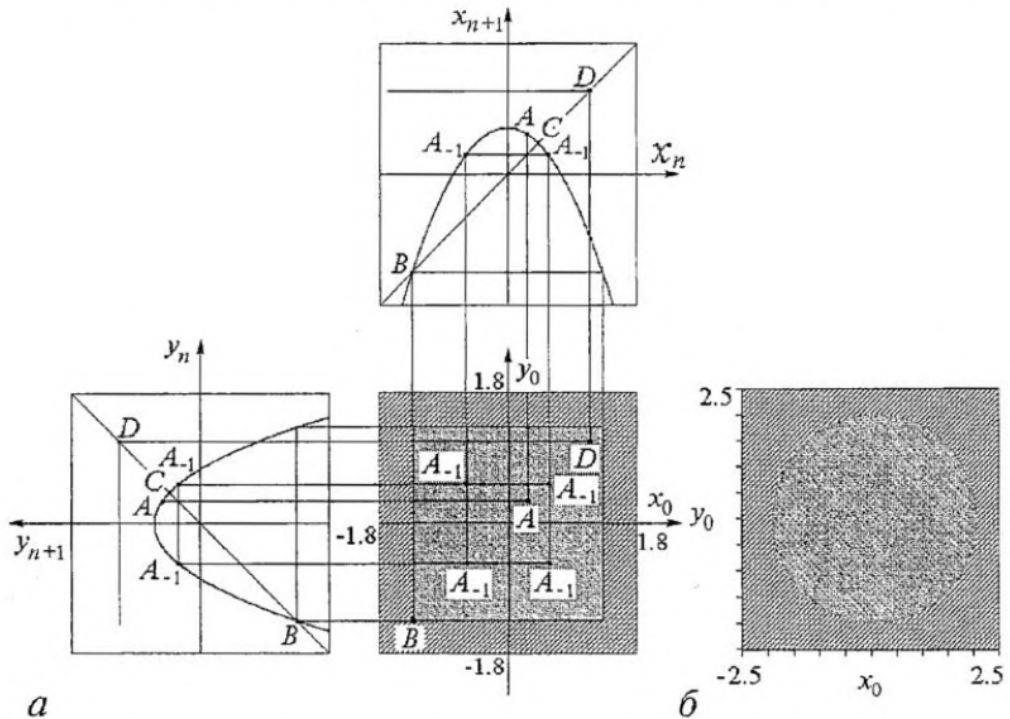


Рис. 5. Бассейн притяжения цикла периода 1 при $\lambda=0.5, k=0$ (*a*) и $k=0.5$ (*б*)

конечных решений дробится на бассейны сосуществующих аттракторов [23]. Принцип дробления поясняет рис. 6, *a*, построенный, как и рис. 5, *a*, для случая $k=0$, но при значении параметра $\lambda > \lambda_1$, где λ_1 - значение первой бифуркации удвоения периода. Здесь цикл периода 1 (точка C) уже потерял устойчивость, и в фазовом пространстве сосуществуют два аттрактора - циклы периода 2: 2_0 и 2_1 (см. рис. 6, *a* и рис. 1). Множество неустойчивых точек, включающее в себя и точку C с прообразами всех рангов, формирует границы бассейнов притяжения сосуществующих циклов. Отметим, что вблизи границы области дробящегося

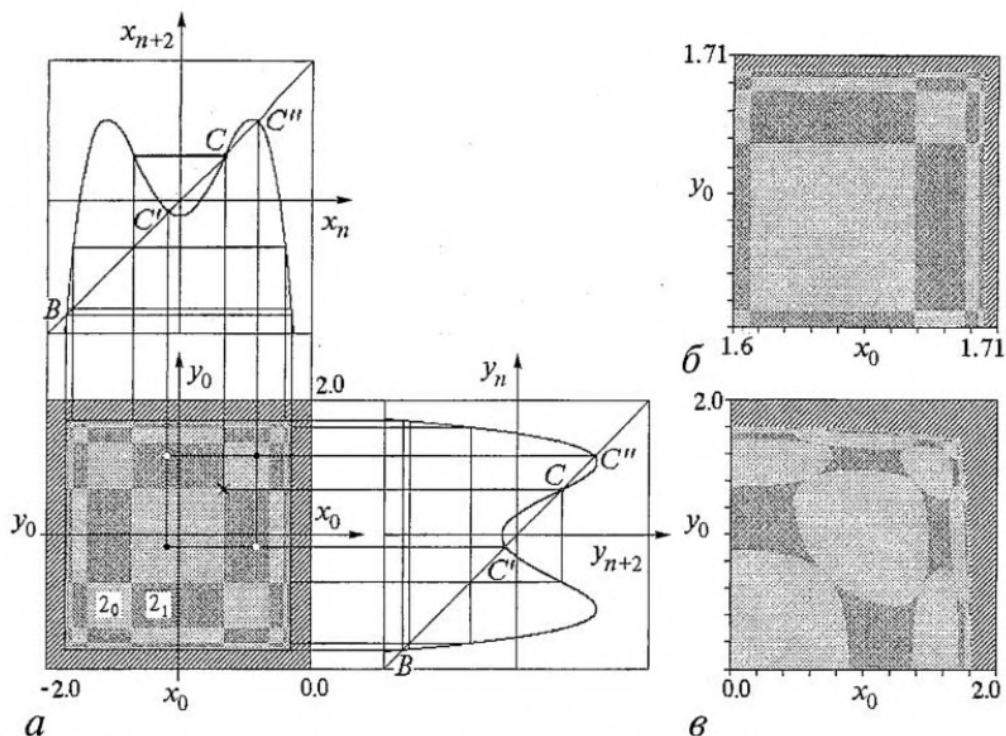


Рис. 6. а - График вторых итераций $x_{n+2}=f(x_n)$, $y_{n+2}=f(y_n)$ системы (2) и бассейны притяжения циклов 2_0 и 2_1 при $\lambda=1.2$ и $k=0$. С - неустойчивая точка (цикл периода 1 (x)), С', С'' - устойчивые точки; б - увеличенный фрагмент рис.а вблизи границы области конечных решений; в - бассейны притяжения при $\lambda=1.2$ и $k=0.08$

бассейна имеет место фрактальная структура (рис. 6, б, в), иллюстрирующая отсутствие ограничения на дробление областей. Увеличение сопровождается ростом числа сосуществующих регулярных аттракторов в фазовом пространстве. При этом площадь бассейна синфазного цикла после очередного удвоения периода перераспределяется между синфазным и симметричным несинфазным циклами удвоенного периода (например, $2_0 \rightarrow 4_0, 4_2$; $4_0 \rightarrow 8_0, 8_4$), а бассейны несинфазных циклов дробятся на бассейны зеркально-симметричных циклов (например, $2_1 \rightarrow 4_1, 4_3$; $4_3 \rightarrow 8_3, 8_7$) так, что структура вблизи бывших границ становится фрактальной (рис. 7, б, в). Дробление продолжается вплоть до критического значения параметра $\lambda=\lambda_{кр}$, соответствующего переходу к хаосу. Подобные описанным изменения структуры бассейнов притяжения при $k \rightarrow 0$ имеют место и при движении по схеме рис. 2, а сверху вниз от единственного односвязного хаотического аттрактора к бесконечному множеству многосвязных вблизи точки перехода порядок - хаос $\lambda=\lambda_{кр}$.

Введение связи по-разному сказывается на конфигурации бассейнов притяжения аттракторов, отличающихся видом симметрии. Кроме уже отмеченного искривления границ бассейнов, изменение k приводит к перераспределению площадей бассейнов сосуществующих аттракторов: площадь бассейнов притяжения несинфазных циклов сокращается, а синфазных - увеличивается за их счет. При этом области бассейна синфазных циклов становятся выпуклыми, поглощая часть площади бассейна несинфазного вида, границы которого становятся вогнутыми (рис. 6, в).

Все симметричные циклы (кроме синфазных), например 2_1 , с ростом параметра демонстрируют бифуркацию рождения тора. Бассейн притяжения квазипериодических колебаний (рис. 7, а) полностью поглощает бассейн

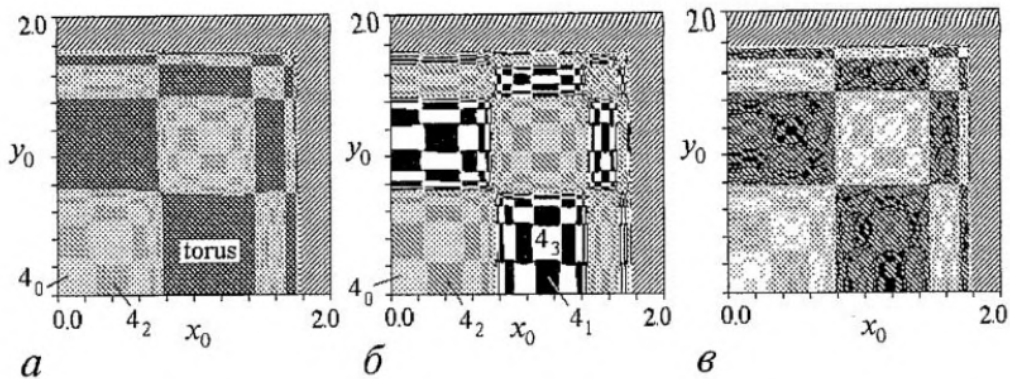


Рис. 7. Бассейны притяжения: *a* - циклов 4_0 , 4_2 и квазипериодических колебаний при $\lambda=1.3$, $k=0.015$; *б* - циклов 4_0 , 4_1 , 4_2 , 4_3 при $\lambda=1.3$, $k=0.008$; *в* - циклов 8_0 , 8_1 , ..., 8_7 при $\lambda=1.38$, $k=0.001$

притяжения цикла, на базе которого они сформировались. Зеркально-симметричные пары циклов, рождающиеся в результате синхронизации движений на торе, например 4_1 и 4_3 , дробят бассейн притяжения тора таким образом, что площадь бассейнов циклов одинакова, а сами бассейны зеркально-симметричны (см. рис. 7, б). Описанный путь эволюции бассейнов притяжения регулярных аттракторов универсален и реализуется на всех ветвях схемы рис. 1 и рис. 2, соответствующих периодическим и квазипериодическим режимам.

Бассейны притяжения хаотических аттракторов эволюционируют по более сложной схеме, зависящей еще и от выполнения условий, сформулированных в [38]: от положения некоторой критической линии на плоскости начальных условий. Поясним сказанное. Исследуемая система (2) относится к классу необратимых отображений. Причем плоскость (x, y) состоит из двух полуплоскостей Z_4 и Z_0 , точки которых, соответственно, имеют 4 прообраза или не имеют действительных прообразов. Например, точка *A* на рис. 5, *a* имеет четыре прообраза A_{-1} , координаты которых получаются в результате построения обратных диаграмм Ламерея; то есть после первой итерации система (2) из этих точек попадает в *A*. В тоже время точка *D* не имеет прообразов, так как обратные диаграммы Ламерея не попадают на графики отображений, и, таким образом, на плоскости (x_0, y_0) нет таких точек, из которых система (2) после первой итерации попадает в точку *D*. Границей между множествами таких точек является линия, названная в [38] критической. Критическую линию можно найти численно первой итерацией множества точек (x_0, y_0) , при которых якобиан отображения обращается в 0. Для системы (2) критическая линия $l_{кр}$ (штриховая линия на рис. 8 и рис. 9) представляет собой два луча, выходящих из точки с координатами (λ, λ) .

Рассмотрим эволюцию бассейнов притяжения хаотических аттракторов в зависимости от их расположения относительно критической линии. При $k \neq 0$ границы элементов бассейнов имеют выпуклую или вогнутую форму. Для случая слабой связи характерное положение критической линии изображено на рис. 8, *a*, *б*, построенных для случая, когда в исследуемой системе сосуществуют четыре четырехсвязных хаотических аттрактора. С изменением параметров два аттрактора 4^2 и 4^4 объединяются в один - 2^2 , соответствующим образом сливаются и их бассейны притяжения (рис. 8, *в*). Аттракторы 4^1 и 4^3 почти не меняются, но внутри почти всех элементов их бассейнов притяжения (кроме тех, где находятся точки решения) образуются озера, или дыры (рис. 8, *в*, *г*). Здесь и далее мы используем географическую терминологию, предложенную Мира [38]. Появление этих озер объясняется формированием так называемых заливов, то есть

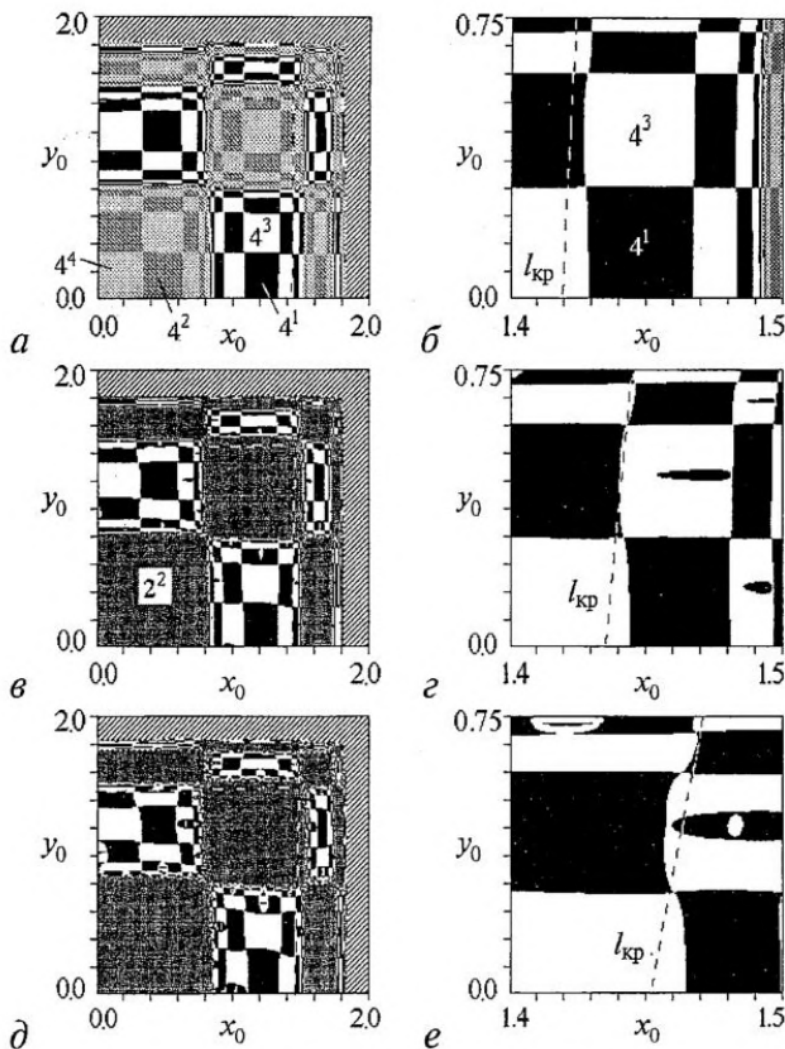


Рис. 8. Формирование озер в бассейнах притяжения хаотических аттракторов 4^1 и 4^3 : а, б - $\lambda=1.428, k=0.006$; в, з - $\lambda=1.454, k=0.0128$; д, е - $\lambda=1.49, k=0.025$. Рисунки справа представляют собой увеличенные фрагменты рисунков слева

замкнутых областей Z_4 , ограниченных сегментом критической линии и сегментом границы бассейна. Последовательные прообразы таких областей и приводят к появлению озер. Наличие неограниченного числа прообразов различных рангов приводит к появлению бесконечно большого числа озер. Дальнейшее изменение параметров приводит к тому, что внутри озер формируются острова, когда озеро пересекается критической линией (рис. 8, д, е). Затем внутри появившихся островов формируются новые озера, называемые вложенными, и так далее.

При дальнейшем изменении параметров λ и k происходят изменения, которые не удается объяснить с помощью описанного подхода. Аттрактор 2^2 претерпевает кризис в результате слияния с неустойчивым циклом периода 1 и становится непритягивающим. Это сопровождается качественно новым изменением области, которую занимал его бассейн на плоскости (x_0, y_0) : происходит ее фрактальное дробление на бассейны притяжения аттракторов 4^1 и 4^3 (см. рис. 9). Последнее приводит к тому, что критическая линия проходит через фрактальное множество, и в результате невозможно определить характер ее

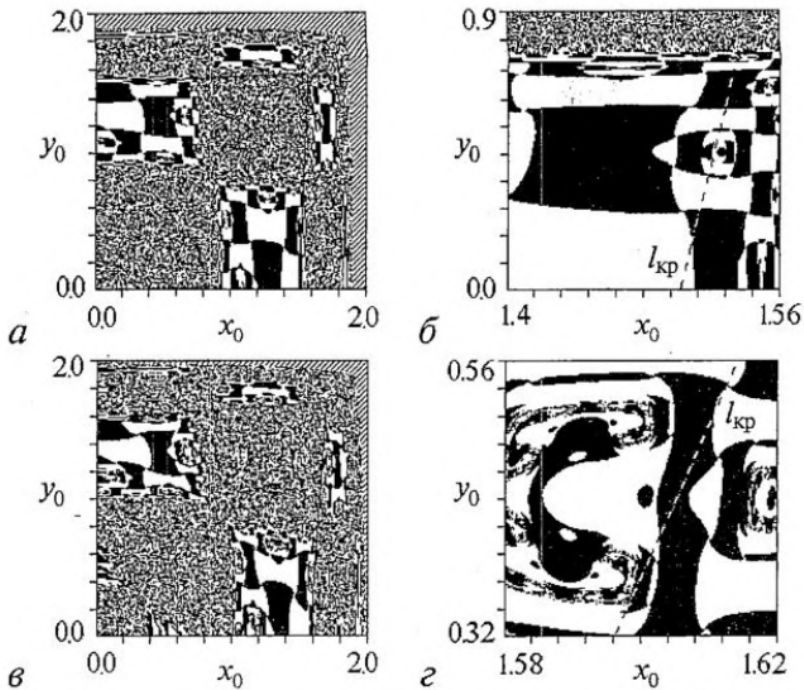


Рис. 9. Бассейны притяжения хаотических аттракторов 4^1 (черный цвет) и 4^3 (белый цвет): а, б - $\lambda=1.57, k=0.042$; в, г - $\lambda=1.7, k=0.07$. Рисунки справа представляют собой увеличенные фрагменты рисунков слева

пересечения с элементами бассейнов. При этом не наблюдается фрактализации ранее существовавших областей бассейнов притяжения аттракторов 4^1 и 4^3 : степень вложения озер и островов после таких изменений остается конечной (рис. 9, б). Но при значениях управляющих параметров λ и k выше некоторых критических значений структура и этих областей становится фрактальной: степень их вложения становится бесконечной (рис. 9, в, г). Описанный сценарий фрактализации бассейнов притяжения носит универсальный характер и проявляется для хаотических аттракторов более высокой связности, но в более узком интервале значений параметров.

Рассмотренные особенности устройства бассейнов и их эволюции с изменением параметров справедливы для колебательных режимов, существующих в области значений $k < 0.5$. В области сильной связи ($k > 0.5$) остается неизменным устройство бассейнов только синфазных и симметричных несинфазных режимов. Несимметричные режимы при сильной и слабой связи имеют качественно отличающиеся фазовые портреты и, соответственно, по-разному устроенные бассейны притяжения. На рис. 10, а-г представлены бассейны режимов, существующих при тех же значениях параметра λ , что и режимы на рис. 6, а, 7, б, в, 8, а, соответственно. Для наглядности на рис. 10 величина $k=1-k_w$, где k_w - величина связи на рис. 6, а, 7, б, в, 8, а. Бассейны зеркально-симметричных режимов при сильной связи имеют другую конфигурацию, в частности, бассейны режимов $4_I, 4_{III}$ и $4^I, 4^{III}$ состоят из более крупных блоков, не имеющих фрактальную структуру. Фрактализация бассейнов при сильной связи характерна лишь для несимметричных режимов N_m и N^m , где $N \geq 8$ (см. рис. 10, в). В результате при изменении параметров не происходит дробление бассейнов режимов $4^I, 4^{III}$ и не наблюдается появление заливов, озер и островов. Эти эффекты должны проявляться для бассейнов более многосвязных хаотических аттракторов.

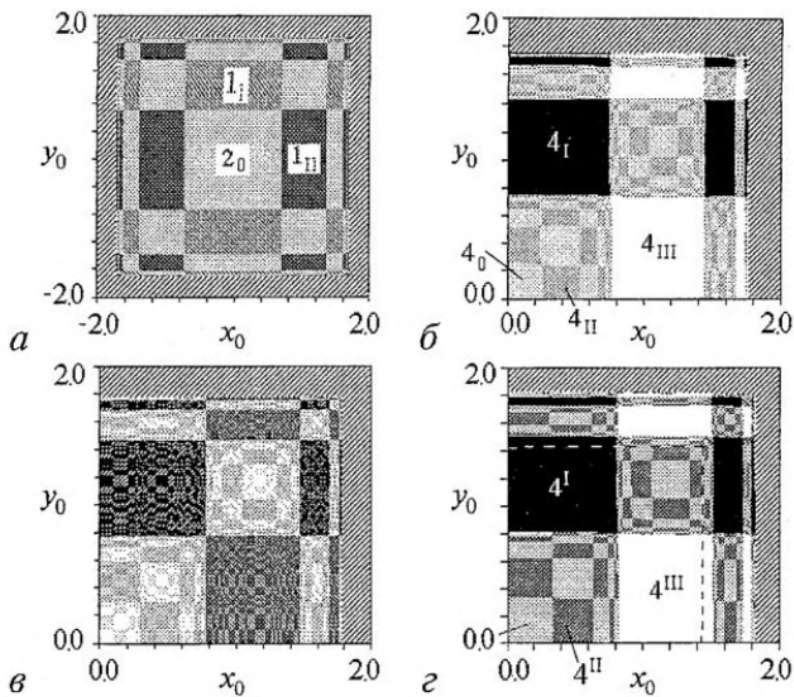


Рис. 10. Бассейны притяжения: а - циклов периода 1 и 2 при $\lambda=1.2$ и $k=1$, б - циклов $4_0, 4_I, 4_{II}, 4_{III}$ при $\lambda=1.3, k=0.994$; в - циклов $8_0, 8_I, \dots, 8_{VII}$ при $\lambda=1.38, k=0.999$; г - хаотических аттракторов $4^I, 4^{II}, 4^{III}, 4^{IV}$ при $\lambda=1.428, k=0.994$.

5. Сопоставление с экспериментом

Нами проведено сопоставление результатов, полученных при исследовании дискретной системы (2) с результатами физического эксперимента на системе связанных колебательных объектов, демонстрирующих переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода и функционирующих в непрерывном времени. Экспериментально исследовались возбуждаемые нелинейные резонаторы - связанные через резистор RLD-цепи, синфазно возбуждаемые одинаковыми периодическими сигналами через развязывающие усилители (рис. 11). Аналогом параметра связи k в эксперименте служит проводимость резистора связи $K=1/R_c$ (случай $K \rightarrow 0$ соответствует $k \rightarrow 0$, $K \rightarrow \infty$ - случаю $k \rightarrow 0.5$), а параметра нелинейности λ - амплитуда внешнего воздействия V . Для задания начальных условий диоды с помощью электронных ключей K_1 и K_2 подключались к дополнительным источникам напряжения, а затем цепь восстанавливалась столь быстро, чтобы за время срабатывания ключа распределение зарядов в диоде не успело релаксировать к равновесному.

Системы, находящиеся под внешним периодическим воздействием, так же как и точечные отображения, инвариантны относительно дискретной группы симметрий, и в основу классификации их колебательных состояний может быть положена величина временного сдвига между колебаниями подсистем, кратная периоду воздействия. Получено хорошее качественное совпадение результатов натурального и численного исследований. В частности, для колебаний малого периода экспериментально обнаружены все виды динамических состояний, имеющих при $k < 0.5$ в системе (2), а конфигурации экспериментально полученных бифуркационных линий и бассейнов притяжения различных циклов хорошо согласуются с

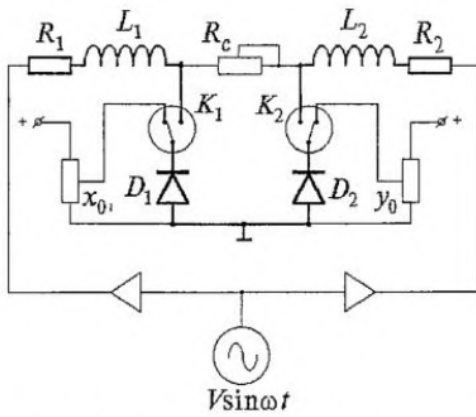


Рис. 11. Схема экспериментальной установки. Жирным выделены резонаторы, составляющие систему, R_c - резистор связи, K_1, K_2 - электронные ключи, необходимые для задания начальных условий

при изменении параметров приводит к дроблению всех элементов существовавших ранее бассейнов в соответствии с описанными для системы (2) закономерностями (рис. 12, в). Вблизи границы, разделяющей бассейны притяжения симметричных $4_0, 4_2$ и несимметричных $4_1, 4_3$ циклов, наблюдается последовательное уменьшение элементов, однако, установить их самоподобие в эксперименте не представлялось возможным из-за технических ограничений на масштаб разрешения и нестабильностей. Поэтому граница между бассейнами этих циклов на рисунке отмечена жирной линией, а пограничные области просто заштрихованы. Наблюдаемая в эксперименте асимметрия в структуре бассейнов притяжения относительно прямой $x_0 = y_0$, связана с неидентичностью реальных подсистем.

На рис. 13 приведены результаты экспериментальных исследований бассейнов притяжения четырехсвязных хаотических аттракторов. При слабой связи структура этих бассейнов (рис. 13, а) качественно соответствует рис. 8, а, жирной линией обозначена граница, разделяющая бассейны притяжения пар аттракторов, в окрестности которой имеет место накопление областей (на рис. 13 отмечено штриховкой). При совместном изменении параметра внешнего воздействия и связи в структуре бассейнов притяжения экспериментальной системы наблюдаются изменения, описанные выше для системы (2). Аттракторы 4^2 и 4^4 сливаются, образуя аттрактор 2^2 . А внутри областей бассейнов притяжения аттракторов 4^1 и 4^3 с изменением параметров образуются озера (рис. 13, б).

численными расчетами. На рис. 12 приведены двумерные проекции бассейнов притяжения циклов периода 2 и 4 экспериментальной системы. В отличие от модели (2), исследованная часть плоскости (x_0, y_0) ограничена пределами, выход за которые грозит разрушением диода из-за тепловой неустойчивости. В отсутствие связи ($K=0$) элементы бассейнов имеют прямоугольную форму (рис. 12, а), так что картина напоминает шахматную доску с разновеликими клетками. Увеличение связи, как и в модели, сопровождается расширением бассейна синфазного вида за счет несинфазного (рис. 12, б). Появление в фазовом пространстве дополнительных циклов

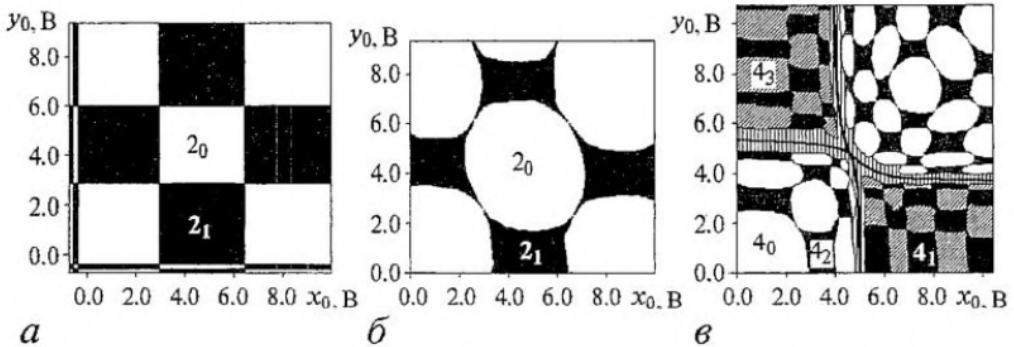


Рис. 12. Бассейны притяжения циклов периода 2 и 4 экспериментальной системы на плоскости (x_0, y_0) : а - $K=0$; б, в - $K \neq 0$

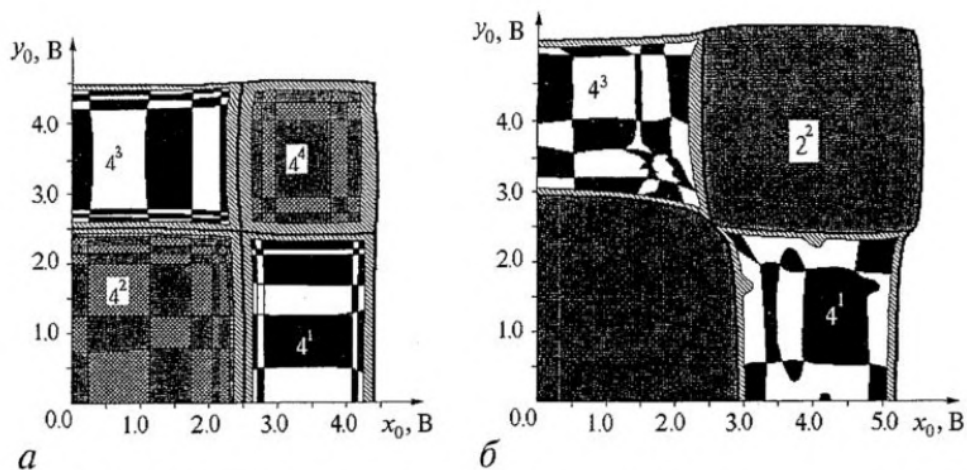


Рис. 13. Бассейны притяжения хаотических аттракторов экспериментальной системы: *a* - $V=1$ В, $K=0.002$ мСм; *б* - $V=1.79$ В, $K=0.025$ мСм

Дальнейшее изменение параметров приводит к тому, что в результате кризиса аттрактор 2^2 становится непритягивающим и исчезает. При этом его бассейн притяжения дробится сложным образом на бассейны притяжения аттракторов 4^1 и 4^3 . Можно предположить, что в данном случае, как и для системы (2) (см. рис. 9), формируется фрактальная или фракталоподобная структура, но построить ее в эксперименте не представляется возможным. Опосредованно о наличии фрактальной структуры свидетельствует вид переходного процесса и влияние на него естественных флуктуаций экспериментальной системы - установление того или иного режима становится непредсказуемым.

6. Обсуждение

Показано, что в пространстве параметров системы (2) имеется большое количество мультистабильных состояний, бассейны притяжения которых устроены достаточно сложным образом. Установление того или иного колебательного режима определяется как значением параметров (что отражено представленными схемами), так и начальными условиями. Соответственно смена режимов при изменении какого-то одного параметра определяется начальной точкой в фазовом пространстве, а также эволюцией границ бассейнов притяжения.

Для иллюстрации полезности развитых представлений рассмотрим пример, связанный с решением задачи синхронизации нелинейных систем и упрощения и регуляризации их динамики с помощью введения соответствующей связи. Опираясь на схему режимов, можно, например, утверждать, что объявленное в [37] универсальным свойством существование в системе связанных отображений с отрицательной кривизной Шварциана так называемой 7-зоновой динамики (последовательности режимов: сложное поведение - периодическое - хаотическое несинфазное - хаотическое синфазное - хаотическое несинфазное - периодическое - сложное) при изменении параметра k от 0 до 1 таковым не является. Количество зон, используемых для классификации динамики связанных систем при изменении параметра связи, будет зависеть от значений других параметров и от способа задания начальных условий. Число зон, в частности, может быть равно 5, 7, 9, 11. На рис. 14 показаны зависимости амплитуды разностного сигнала от величины коэффициента связи. Зоны 1 и 9 на рис. 14, *a* соответствуют сложному

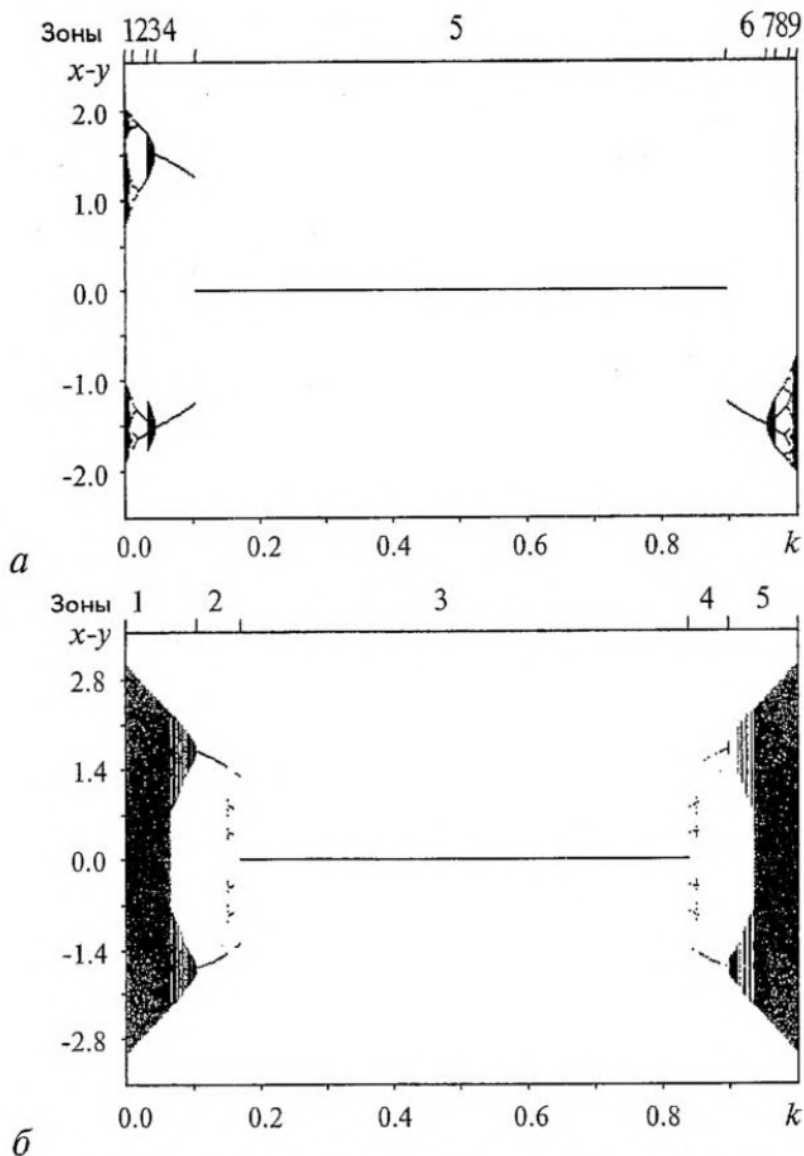


Рис. 14. *а* - девятизонная динамика системы (2) при $\lambda = 1.42$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$; *б* - пятизонная динамика при $\lambda = 1.74$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Для каждого значения k выводится 1000 значений $(x - y)$ после проведения 50000 итераций

(преимущественно хаотическому) поведению, зоны 2, 4 и 8, 6 - области периодических колебаний, зоны 3 и 7 - области сложного (квазипериодического) поведения и, наконец, зона 5 - область синфазного хаоса. На рис. 14, *б* зоны 1 и 5 - это области сложного поведения, зоны 2 и 4 соответствуют периодическим колебаниям, зона 3 - область синфазного хаоса. Обратим внимание, что при выбранных начальных условиях и значениях λ отсутствуют зоны хаотических несинфазных движений. При замене $x_0 \leftrightarrow y_0$ зависимости на рис. 14 отобразятся относительно линии $(x-y)=0$. Представление о взаимном расположении сосуществующих аттракторов и их эволюции с изменением параметров позволяет также заключить, что типичный при достаточно слабой связи квазипериодический сценарий перехода к хаосу в системе симметрично связанных отображений [6] отсутствует уже при сравнительно небольших значениях k .

Полученные результаты являются общими для широкого класса систем вида

(1) при условии идентичности унимодальных функций $f(x_n)$ и $f(y_n)$. В случае мультимодальности функций $f(x_n)$ и $f(y_n)$ разнообразие колебательных состояний системы (1) становится еще большим. Колебания подсистем могут быть различны даже при нулевой связи, например, если изолированные элементы обладают бистабильностью и их начальные условия выбраны в бассейнах притяжения различных аттракторов. В результате в схеме, изображенной на рис. 1, появятся дополнительные листы. Подробное исследование особенностей, накладываемых мультистабильностью локальных отображений, проведено нами в работе [25] (см. также [39]).

Хорошее качественное совпадение результатов дискретного моделирования и физического эксперимента говорит об общности представленной схемы режимов диссипативно связанной системы. Плодотворность использованной классификации видов подтверждается рассмотрением в эксперименте связанных систем с удвоением периода при других видах связи или условиях возбуждения [40, 41], при этом сохраняется внутренняя структура листов на плоскости (k, λ) (последовательность бифуркаций базовых циклов), а размеры, конфигурация листов и их взаимное расположение определяются видом связи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-02-17578, госконтракта № 40.020.1.1.1168 Минпромнауки РФ и CRDF, REC-006.

Библиографический список

1. *Froyland J.* Some symmetric, two-dimensional, dissipative maps // *Physica D.* 1983. Vol. 8. P. 423.
2. *Yuan J.-M., Tung M., Feng D.H., Narducci L. M.* Instability and irregular behavior of coupled logistic equations // *Phys. Rev. A.* 1983. Vol. 28. 1662.
3. *Buskirk R., Jeffries C.* Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol. 31, № 5. P. 3332.
4. *Sakaguchi H., Tomita K.* Bifurcations of the coupled logistic map // *Prog. Theor. Phys.* 1987. Vol. 78. P. 305.
5. *Satoh K.* Quasiperiodic route to chaos in a coupled logistic map // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1991. Vol. 60. P. 718.
6. *Reick C., Mosekilde E.* Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 2. P. 1418.
7. *Satoh K., Aihara T.* Self-similar structures in the phase diagram of a coupled-logistic map // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1990. Vol. 59. P. 1123.
8. *Satoh K., Aihara, T.* Numerical study on a coupled-logistic map as a simple model for a predator-prey system // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1990. Vol. 59. P. 1184.
9. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
10. *Kim S.-Y.* Universal scaling in coupled maps // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52. P. 1206.
11. *Kim S.-Y.* Period p -tuplings in coupled maps // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P. 3393.
12. *Kook H., Ling F.H., Schmidt G.* Universal behavior of coupled nonlinear systems // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 43. P. 2700.
13. *Ferretti A., Rahman N.K.* A study of coupled logistic maps and their usefulness for modeling physical-chemical processes // *Chem. Phys. Lett.* 1987. Vol. 133. P. 150.
14. *Ferretti A., Rahman N.K.* Coupled logistic maps in physical-chemical processes: Coexisting attractors and their applications // *Chem. Phys. Lett.* 1987. Vol. 140. P. 71.

15. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 3. С. 60.
16. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н. Селезнев Е.П. Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ. 1990. Т. 60, вып. 10. С. 19-26.
17. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П. Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 2. С. 291.
18. Прохоров М.Д. Виды колебаний диссипативно связанных систем с удвоением периода при сильной связи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4-5. С. 99.
19. Carvalho R., Fernandez B., Mendes R.V. From synchronization to multistability in two coupled quadratic maps // Phys. Lett. A. 2001. Vol. 285. P. 327.
20. Gu Y., Tung M., Yuan J.M., Feng D.H., Narducci L.M. Crises and hysteresis in coupled logistic maps // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52, № 9. P. 701.
21. Inoue M., Nishi Y. Highly complicated basins of periodic attractors in coupled chaotic maps // Prog. Theor. Phys. 1996. Vol. 95. P. 685.
22. Безручко Б.П., Селезнев Е.П. Бассейны притяжения хаотических аттракторов в связанных системах с удвоением периода // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, вып. 4. С. 40.
23. Астахов С.А., Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А. Эволюция бассейнов притяжения связанных систем с удвоением периода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 2-3. С. 87.
24. Anishchenko V.S. Dynamical Chaos in Physical Systems. Teubner, Leipzig, 1989.
25. Безручко Б.П., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П. Особенности устройства пространства параметров двух связанных неавтономных неизохронных осцилляторов // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, вып. 6. С. 61.
26. Yamada T., Fujisaka H. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems, II. The mapping approach // Prog. Theor. Phys. 1983. Vol. 70. P. 1240.
27. Fujisaka H. Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Prog. Theor. Phys. 1985. Vol. 74. P. 918.
28. Pikovsky A.S. On the interaction of strange attractors // Z. Phys. B. 1984. Vol. 55. P. 149.
29. Кузнецов С.П., Пиковский А.С. Переход от симметричного к несимметричному режиму хаотической динамики в системе диссипативно связанных рекуррентных отображений // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. С. 49.
30. Pikovsky A.S., Grassberger P. Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // J. Physics A. 1991. Vol. 24. P. 4587.
31. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. P. 1014.
32. Kapitaniak T., Maistrenko Yu.L. Chaos synchronization and riddled basins in two coupled one-dimensional maps // Chaos, Solitons & Fractals. 1998. Vol. 9. P. 271.
33. Yang H.L., Pikovsky A.S. Riddling, bubbling, and Hopf bifurcation in coupled map systems // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 5474.
34. Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Popovich A., Mosekilde E. Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 2713.

35. Maistrenko Y.L., Maistrenko V.L., Popovych O., Mosekilde E. Desynchronization of chaos in coupled logistic maps // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 2817.

36. Popovych O., Maistrenko Yu., Mosekilde E., Pikovsky A., Kurths J. Transcritical riddling in a system of coupled maps // Phys. Rev. E. Vol. 63. 2001. 036201.

37. Udvardi F.E., Raju N. Some global properties of a pair of coupled maps: quasi-symmetry, periodicity, and synchronicity // Physica D. 1998. Vol. 111. P. 16.

38. Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H., Cathala J.C. Basin bifurcations of two-dimensional noninvertible maps: fractalization of basins // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 4, № 2. P. 343.

39. Johnston M.E. Bifurcations of coupled bistable maps // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 229. P. 156.

40. Астахов В.В., Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Особенности возникновения квазипериодических движений в системе диссипативно связанных нелинейных осцилляторов под внешним периодическим воздействием // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 1. С. 37.

41. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П. Мультистабильность в системе радиотехнических осцилляторов с емкостной связью // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 11. С. 21670.

Саратовский государственный
университет

Институт радиотехники и электроники РАН,
Саратовское отделение

Поступила в редакцию 04.09.02

OSCILLATION TYPES, MULTISTABILITY, AND BASINS OF ATTRACTORS IN SYMMETRICALLY COUPLED PERIOD-DOUBLING SYSTEMS

B.P. Bezruchko, M.D. Prokhorov, Ye.P. Seleznev

Symmetrically coupled nonlinear oscillator systems demonstrating transition to chaos via a sequence of period-doubling bifurcations under the control parameter variation exhibit various types of mutual synchronization. For these coupled systems, with dissipatively coupled logistic maps, we consider a hierarchy of possible oscillation types using the magnitude of the time shift between subsystem oscillations as a basis for multistable states classification. For oscillation states and their basins of attraction the ways of evolution are studied under nonlinearity and coupling variation. Obtained results are compared with those of physical experiment with a system of coupled, periodically driven nonlinear resonators.



Безручко Борис Петрович родился в 1946 году, окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1969). Профессор кафедры электроники и волновых процессов СГУ; ведущий научный сотрудник (по совместительству) Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН; доктор физико-математических наук. Область научных интересов - экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических и электронных системах, математическое моделирование по экспериментальной наблюдаемой. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



Прохоров Михаил Дмитриевич - родился в Саратове (1968). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997, СГУ). Работает старшим научным сотрудником в Саратовском отделении Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - нелинейная динамика, экспериментальное и численное моделирование сложных систем, исследование систем с запаздыванием. Имеет более 40 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: SBIRE@sgu.ru



Селезнев Евгений Петрович - родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990). Старший научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, доцент факультета нелинейных процессов СГУ. Автор и соавтор более 85 научных работ. Область научных интересов - экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических системах.