



## ТЕСТИРОВАНИЕ НА ОДНОЗНАЧНОСТЬ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПРИ ГЛОБАЛЬНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

*Б.П. Безручко, Т.В. Диканев, Д.А. Смирнов*

Проблема построения глобальных динамических моделей по временным рядам - дискретным наборам значений наблюдаемой переменной - весьма актуальна в различных областях науки. Первый этап такого моделирования - получение по экспериментальному временному ряду численных значений величин, которые будут играть роль динамических переменных модели. Этим «выбором переменных» во многом определяется успех моделирования. В работе предлагается методика, помогающая найти «хороший» набор динамических переменных. Она состоит в том, что для каждого варианта переменных их временные ряды тестируются на предмет однозначности и непрерывности зависимостей между величинами, которые должны войти в левые части уравнений, и самими переменными (то есть на предмет возможности детерминистического описания). Эффективность методики показана в вычислительном и радиофизическом эксперименте.

### Введение

Динамическое моделирование предполагает задание вектора состояния объекта  $x=(x_1, x_2, \dots, x_D) \in R^D$ , где  $x_k$  - динамические переменные,  $D$  - размерность модели и оператора эволюции, обеспечивающего однозначный прогноз последующих состояний, если задано начальное. Модель, описывающую поведение объекта в широкой области фазового пространства  $(x_1, x_2, \dots, x_D)$ , называют глобальной. Одним из актуальных подходов к построению глобальных динамических моделей является реконструкция уравнений по временным рядам - дискретным последовательностям экспериментальных данных  $\eta(t_i)$ , где  $t_i=i\Delta t$ ,  $i=1, 2, \dots, N_\eta$ ,  $\Delta t$  - выборочный интервал. В настоящее время предложены методы построения по временным рядам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [1-6], дискретных отображений [7-9], дифференциальных уравнений с запаздыванием [10,11]. Такие феноменологические модели показали свою эффективность при решении задач прогноза [7], расчета характеристик наблюдаемого движения [2,3,12] и классификации сигналов [13].

В общем случае процедура конструирования модельных уравнений  $y(t)=f(x(t))$  по ряду  $\{\eta(t_i)\}$  выглядит следующим образом. Сначала из исходного ряда  $\{\eta(t_i)\}$  (размерность векторов и длина которого ограничиваются условиями

эксперимента) формируют временной ряд векторов состояния  $\{x(t_i)\}^1$ . Ряд  $\{y(t_i)\}$  получают из  $\{x(t_i)\}$  в соответствии с выбранным видом модели: для ОДУ -  $dx(t)/dt=f(x(t))$  - его формируют путем численного дифференцирования ряда  $\{x(t_i)\}$ , а для отображений -  $x(t_{i+1})=f(x(t_i))$  - сдвигом ряда  $\{x(t_i)\}$  по времени. Затем задают вид аппроксимирующих функций  $f_k$  (компонент вектор-функции  $f$ ) и методом наименьших квадратов находят значения их коэффициентов. Ключевыми в описанной процедуре являются начальные этапы: выбор динамических переменных  $x_k$  и задание вида функций  $f_k$ . Неудачный выбор переменных может затруднить аппроксимацию зависимости  $y(x)$  гладкой функцией [15] или вовсе сделать связь  $y$  с  $x$  неоднозначной.

В данной работе мы предлагаем методику оценки пригодности и «удобства» выбранных переменных  $x_k$  для построения *глобальной* динамической модели. В ее основе лежит тестирование временных рядов  $\{y(t_i)\}$  и  $\{x(t_i)\}$  на предмет однозначности и непрерывности каждой экспериментальной зависимости  $y_k(x)$  во всей области наблюдаемого движения. Предлагаемая нами методика в некоторой степени опирается на идеи  $\delta$ - $\epsilon$  метода, предложенного в [14] для выявления детерминированности наблюдаемого процесса. Но наше исследование посвящено решению другой задачи - построению глобальной модели.

Согласно предлагаемому нами подходу определяются значения относительного разброса величины  $y_k$  в пределах малых объемов  $\Delta V$  в пространстве выбранных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_D$  и выясняется закон его изменения при  $\Delta V \rightarrow 0$ . Причем в отличие от [14], где используются лишь средние (интегральные) оценки, основную роль играют локальные характеристики. Динамические переменные мы предлагаем выбирать так, чтобы обеспечить для каждой из модельных зависимостей минимум локального разброса и его стремление к нулю при уменьшении  $\Delta V$ . Это является признаком однозначности, непрерывности и отсутствия участков большой крутизны в зависимостях  $y_k(x)$ . В противном случае достаточно точная аппроксимация этих зависимостей обычно применяющимися гладкими функциями (например, полиномами) сильно усложняется или становится невозможной.

Предлагаемая методика изложена в разделе 1. В разделе 2 она иллюстрируется на примерах реконструкции эталонных разностных и дифференциальных уравнений по их «чистым» и зашумленным решениям. Ее работоспособность демонстрируется на примере моделирования реальной нелинейной электрической цепи в разделе 3.

## 1. Методика тестирования

Пусть имеется наблюдаемый временной ряд  $\{\eta(t_i)\}$ . Выбран вид модельных уравнений и сформированы ряды  $\{x(t_i)\}$  и  $\{y(t_i)\}$ ,  $i=1, \dots, N$ . Требуется оценить однозначность и непрерывность зависимостей  $y_k$  от  $x$  (для  $k=1, 2, \dots, D$ ), а также найти критерий для выделения варианта переменных, наиболее удобного для построения глобальной модели.

Если некоторая зависимость  $y(x)$  однозначна и непрерывна в области  $V$ , то разность  $|y(x)-y(x_0)|$  стремится к нулю при  $\|x-x_0\| \rightarrow 0$  (для любого  $x_0 \in V$ ). Нарушение этого условия на практике можно считать признаком неоднозначности или разрывности зависимости  $y(x)$ . Так как мы располагаем лишь временным рядом, состоящим из *конечного* числа точек, то указанный предельный переход выполнить невозможно, но можно проследить тенденцию изменения разности

<sup>1</sup> Компоненты вектора  $x$  могут быть получены методом последовательных производных [3,5], временных задержек [5,6], интегрирования [5] или просто совпадать с наблюдаемыми.

$|y(t_i) - y(t_j)|$  при сближении векторов  $x(t_i)$  и  $x(t_j)$  до определенного *конечного* расстояния. При достаточно большом количестве данных  $N$ , высокой точности измерений и низком уровне шума это расстояние может быть сделано достаточно малым (для любого участка в области наблюдаемого движения).

Методика тестирования выбранных переменных состоит в следующем. Предположим (без ограничения общности), что разность между максимальным и минимальным значениями для каждой из величин  $x_k$  и  $y$  равна единице<sup>2</sup>. Другими словами, все исследуемое множество векторов  $\{x(t_i)\}$  содержится внутри гиперкуба  $V \subset R^D$ , длина стороны которого равна 1. Разобьем  $V$  на одинаковые «гиперкубические» ячейки со стороной  $\delta$ . И выберем из них все ячейки, содержащие больше одного вектора каждая. Обозначим их  $s_1, s_2, \dots, s_M$ . Разность между максимальным и минимальным значениями  $y$  в пределах ячейки  $s_k$  назовем *локальным* разбросом:  $\epsilon_k = \max_{x \in s_k} y(x) - \min_{x \in s_k} y(x)$ . Используем величину максимального локального разброса  $\epsilon_{\max} = \max_{1 \leq k \leq M} \epsilon_k$  и график  $\epsilon_{\max}(\delta)$  в качестве *основных* характеристик исследуемой зависимости  $y(x)$ . Будем оценивать пригодность рассматриваемых величин  $x$  и  $y$  для глобального моделирования, опираясь на следующие соображения.

- Если зависимость  $y(x)$  однозначна и непрерывна, то величина  $\epsilon_{\max}$  должна быть достаточно малой при малом  $\delta$  и обнаруживать тенденцию к уменьшению до нуля при  $\delta \rightarrow 0$ . Нетрудно показать, что при достаточно малых  $\delta$  графиком  $\epsilon_{\max}(\delta)$  должна быть прямая.

- Для однозначной непрерывной зависимости с участком большой крутизны величина  $\epsilon_{\max}$  остается большой при довольно малых  $\delta$ , пока весь этот участок попадает внутрь одной ячейки. При дальнейшем уменьшении  $\delta$  величина  $\epsilon_{\max}$  все-таки уменьшается, так как перепад уже «поделен» между несколькими ячейками. График  $\epsilon_{\max}(\delta)$  имеет «излом» при значении  $\delta$ , равном размеру участка большой крутизны (например, рис. 1, б, светлые кружки). В таком случае зависимость  $y(x)$  также трудно аппроксимировать гладкой функцией. Поэтому для построения глобальной модели нужно выбирать переменные так, чтобы график  $\epsilon_{\max}(\delta)$  стремился к началу координат плавно, без изломов.

- На практике достижимая величина  $\delta$  ограничена снизу из-за конечного

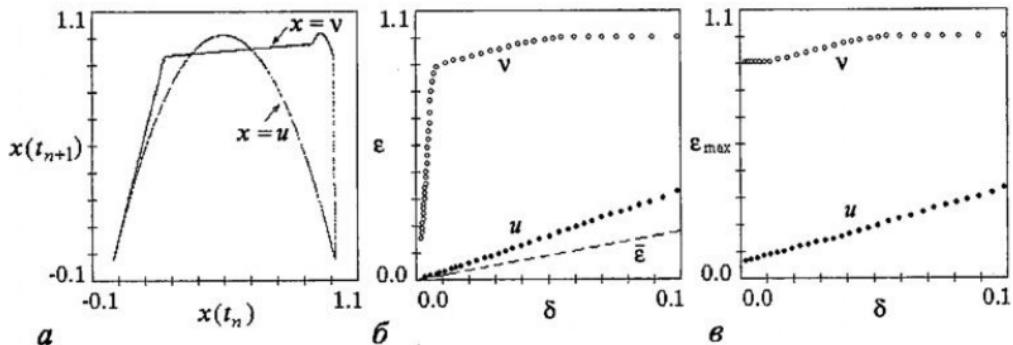


Рис. 1. а - Графики отображений последования для временных рядов переменных  $u$  и  $v$ , сформированных из хаотического решения системы (1). На графике для  $v$  имеется участок большой крутизны (справа). б - Графики  $\epsilon_{\max}(\delta)$  при отсутствии шума для переменных  $v$  (светлые кружки) и  $u$  (черные кружки). Для  $v$  наличие участка большой крутизны (рис. 1, а) отражается в появлении излома на графике при  $\delta \approx 0.005$ . Графики  $\bar{\epsilon}(\delta)$  совпадают для обеих переменных (штриховая линия). в - Графики  $\epsilon_{\max}(\delta)$  при наличии шума (1%-го)

<sup>2</sup> В любом случае этого легко добиться соответствующей нормировкой величин  $x_k$  и  $y$ .

количества данных  $N$ . Например, если векторы  $\mathbf{x}(t_i)$  равномерно распределены внутри гиперкуба  $V$ , то эту границу можно оценить как  $N^{-1/D}$ . При очень малом  $N$  во многих областях нет достаточно близких векторов  $\mathbf{x}(t_i)$  и  $\mathbf{x}(t_j)$ , и данный подход неприменим, так как нет возможности исследовать локальные свойства зависимости  $y(\mathbf{x})$ .<sup>3</sup>

• В экспериментальных данных неизбежно присутствуют погрешность измерений (связанная, например, с разрядностью АЦП) и шумы (влияние многочисленных факторов, которые не поддаются детерминированному описанию). Обозначим через  $\sigma_{noise}$  их суммарный вклад в значения  $x$  и  $y$ . Когда  $\delta$  становится меньше  $\sigma_{noise}$ ,  $\epsilon_{max}$  больше не уменьшается даже при наличии определенной закономерности, связывающей  $y$  и  $x$ . Так, если величина  $\sigma_{noise}$  превышает размер участка большой крутизны, то график  $\epsilon_{max}(\delta)$  будет свидетельствовать о неоднозначности исследуемой зависимости (например, рис. 1, в, светлые кружки). В этом случае согласно предлагаемому критерию рассматриваемые переменные не годятся для глобального моделирования.

В качестве *дополнительной* характеристики можно использовать и величину среднего локального разброса  $\bar{\epsilon} = 1/M \sum_{k=1}^M \epsilon_k$ . Если  $\bar{\epsilon} \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$  и крутизна графика  $\bar{\epsilon}(\delta)$  мала, то это может указывать на более «плавную» в среднем зависимость  $y(\mathbf{x})$ , которую иногда (*при прочих равных условиях*) легче аппроксимировать гладкой функцией. Далее будет проиллюстрировано, что сама по себе величина  $\bar{\epsilon}$  не содержит необходимой для глобального моделирования информации о свойствах  $y(\mathbf{x})$ . Так, если  $y(\mathbf{x})$  имеет локализованный участок неоднозначности или разрыв, то они могут вносить малый вклад в среднее значение  $\bar{\epsilon}$  и график  $\bar{\epsilon}(\delta)$  будет выглядеть примерно так же, как и для гладкой однозначной зависимости.

## 2. Демонстрационные численные примеры

**2.1. Реконструкция отображений.** Проиллюстрируем изложенные выше соображения на примере реконструкции разностных уравнений по временному ряду, генерируемому квадратичным отображением

$$u_{n+1} = ru_n(1 - u_n), \quad (1)$$

моделируя две ситуации. В первой - наблюдаемая  $\eta(t_i) = u_i$ , где  $u_i$  - результат итерирования системы (1) при  $r=4.0$ , что соответствует хаотическому режиму. Во второй -  $\eta(t_i) = v_i$ , где переменная  $v$  связана с  $u$  функционально взаимно-однозначным кусочно-линейным преобразованием  $h$

$$v = h(u) = \begin{cases} 5u, & 0 < u < 0.18, \\ 0.9 + (u - 0.18)/8.2, & 0.18 < u < 1, \end{cases} \quad (2)$$

которое можно интерпретировать, например, как преобразование сигнала измерительными устройствами. Располагая рядами этих двух наблюдаемых длиной  $N=10000$ , оценим с помощью предложенной методики возможность построения глобальной модели в виде одномерного отображения  $x(t_{i+1}) = f(x(t_i))$ , где  $x(t_i)$  совпадает с наблюдаемой  $\eta(t_i)$ .

<sup>3</sup> В [14] нет таких ограничений, поскольку цель там другая - при небольшой длине ряда найти хотя бы «следы детерминизма», другими словами, участки однозначности - «исключительные события» (при этом вполне допустимо игнорировать большие, но редкозаселенные области).

Построение глобальной модели при  $\eta(t_i)=u_i$  не представляет затруднений: достаточно использовать в качестве функции  $f$  полином 2-го порядка. При этом построенная модель дает прогноз на один шаг вперед практически с машинной точностью. При  $\eta(t_i)=v_i$  моделирование весьма затруднительно. Так, используя полином 11-го (!) порядка, удастся снизить среднеквадратичную ошибку прогноза на один шаг вперед лишь до 30%.

Применим предложенную методику для тестирования зависимостей  $x(t_{i+1})$  от  $x(t_i)$  для наблюдаемых  $u$  и  $v$  (см. рис. 1, а). Графики  $\epsilon_{\max}(\delta)$  на рис. 1, б говорят о наличии однозначности и непрерывности, но для  $\eta=u$   $\epsilon_{\max}$  «плавно» стремится к нулю при уменьшении  $\delta$ , а для  $\eta=v$  график имеет «излом» при малом  $\delta$ . Излом отражает наличие участка большой крутизны в зависимости  $x(t_{i+1})$  от  $x(t_i)$  (область  $x(t_i) \approx 1$  на рис. 1, а). Графики же  $\tilde{\epsilon}(\delta)$  (рис. 1, б, штриховая линия) практически совпадают для обеих переменных.

Преимущества одной из переменных для глобального моделирования еще более очевидны, если наблюдаемые ряды зашумлены, то есть  $\eta(t_i)=u_i+\xi_i$  или  $\eta(t_i)=v_i+\xi_i$ , где  $\xi_i$  - последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке  $[-0.005, 0.005]$  (это соответствует примерно 1% от уровня сигнала). При этом по ряду  $\{u_i+\xi_i\}$  еще удастся получить эффективную глобальную модель с полиномом 2-го порядка (относительная ошибка прогноза на один шаг вперед сравнительно невелика - 3%), а ряд  $\{v_i+\xi_i\}$  оказался вовсе непригодным для моделирования. Об этом предупреждают и графики  $\epsilon_{\max}(\delta)$  (рис. 1, в): для  $u$  график лишь немного «поднялся» по сравнению с рис. 1, б, а для  $v$  график «говорит» о неоднозначности.

Другим показательным примером является сравнение результатов оценки переменных и реконструкции модели вида  $x(t_{i+1})=f(x(t_i))$  по ряду в случаях: 1 -  $x(t_i)=\eta(t_i)$ ; 2 -  $x(t_i)=\eta(t_{2i})$ ; 3 -  $x(t_i)=\eta(t_{3i})$ . Это соответствует первой, второй и третьей итерациям логистического отображения (1). С ростом номера итерации графики  $x(t_{i+1})=f(x(t_i))$  имеют все более сложный для аппроксимации вид (рис. 2, а), что отражается во все большей крутизне зависимости  $\epsilon_{\max}(\delta)$  (рис. 2, б). Аналогично предыдущему примеру влияние шума проявляется сильнее при более сложной зависимости (рис. 2, в).

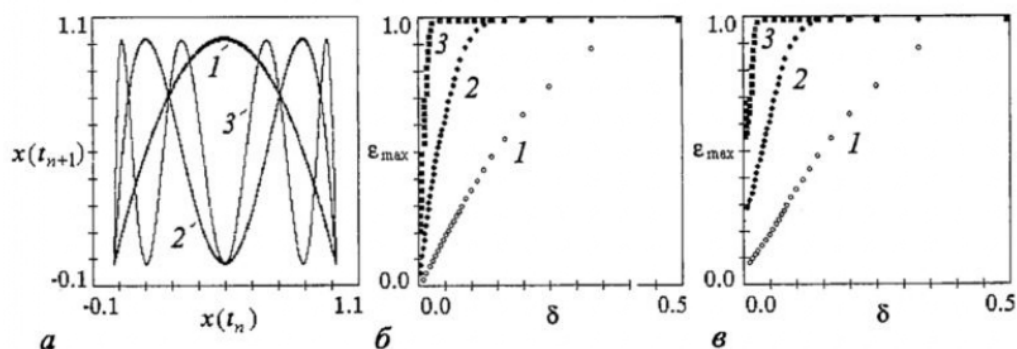


Рис. 2. а - Графики отображений последования для временных рядов, сформированных из хаотического решения системы (1) путем записи каждого значения  $u$  (график 1), каждого второго (график 2) и каждого третьего (график 3). б - Графики  $\epsilon_{\max}(\delta)$ : быстрее осциллирующей зависимости соответствует более крутой график. в - При наличии шума графики «подняты» вверх. Наиболее существенно усиливается разброс быстро осциллирующих зависимостей (соответствующие им графики «подняты» выше)

**2.2. Реконструкция дифференциальных уравнений.** Возьмем в качестве первого объекта систему Ресслера

$$\dot{u} = -v - w,$$

$$\dot{v} = u + av, \quad (3)$$

$$\dot{w} = b + w(u-c),$$

при значениях параметров  $a=0.398$ ,  $b=2.0$ ,  $c=4.0$ , что соответствует хаотическому режиму (рис. 3, а).

Рассмотрим предварительные оценки по критерию  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  и результаты реконструкции модели стандартного вида [3]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{x}_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$

где  $x_1$  совпадает с наблюдаемой  $v$ , а ряд наблюдаемой  $\{v(t_i)\}$  сформирован на основе последовательности значений переменной  $v$ . Значения  $\{v(t_i)\}$  были получены численным интегрированием уравнений (3) методом Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом  $\Delta t=0.01$  (длина ряда  $N=10^5$ ). Предложенная методика применялась во всех приведенных ниже случаях для исследования зависимости  $\dot{x}_3(x_1, x_2, x_3)$ . Значения координаты  $x_1$  формировались по ряду  $\{v(t_i)\}$  различными способами, а ряды величин  $x_2$ ,  $x_3$  и  $\dot{x}_3$  были получены численным дифференцированием ряда  $\{x_1(t_i)\}$  с использованием разных методов.

$I - \{x_1(t_i)\}=\{v(t_i)\}$ , шум отсутствует, производные вычисляются с помощью простых разностных формул вида  $\{\dot{x}_1(t_i)\}=(x_1(t_i+\Delta t)-x_1(t_i-\Delta t))/(2\Delta t)$ . График  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  (рис. 3, б, светлые кружки) свидетельствует об однозначности и непрерывности зависимости  $\dot{x}_3(x_1, x_2, x_3)$ , что только подтверждает известный результат [3]. Весьма эффективная модель (4) может быть получена при использовании полинома 2-го порядка в качестве функции  $f$  (прогноз с относительной погрешностью не более 5% осуществляется примерно на 15 характерных периодов вперед, на периоде здесь укладывается около 600 точек).

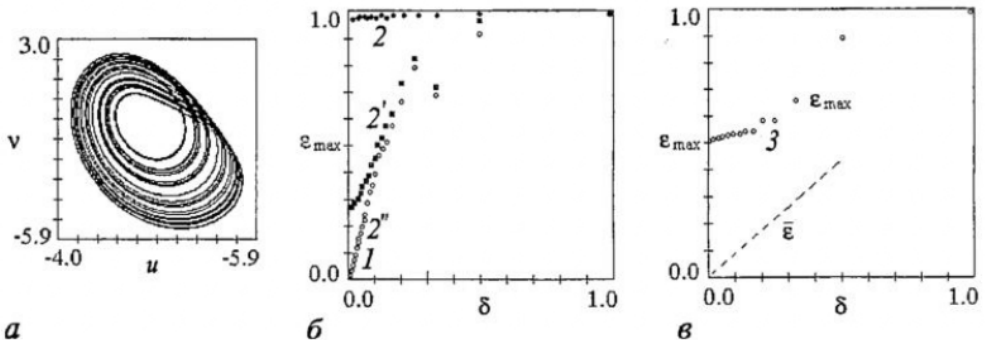


Рис. 3. а - Хаотический аттрактор системы Ресслера (3). б - Графики  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  для  $x_1=v$ ; без шума, «чистые ряды» -  $I$  (светлые кружки); с шумом: при расчете производных без фильтра -  $2$  (черные кружки), при расчете производных с помощью 21-точечного сглаживающего полинома -  $2'$  (черные квадраты), при использовании 41-точечного полинома -  $2''$  (в данном масштабе накладывается на график  $I$ ). в -  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  для  $x_1=v^2$ ; без шума -  $3$  (светлые кружки). Зависимость неоднозначна, а график  $\bar{\varepsilon}(\delta)$  выглядит так же, как и для однозначной зависимости (штриховая линия)

2 -  $\{x_1(t_i)\}=\{v(t_i)+\xi_i\}$ , где  $\xi_i$  - последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке  $[-0.0005,0.0005]$ , что соответствует примерно 0.01 % от уровня сигнала. Без фильтрации ряда реконструированная модель не выдерживает никакой критики, что прогнозирует и график  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  (рис. 3, б, черные кружки). Это связано с тем, что шум существенно усиливается при дифференцировании. Ситуация улучшается, если для расчета производных использовать сглаживающий полином (фильтр Савицки - Голэя [16]) при достаточно большой ширине окна для его построения. Использование окна шириной в 21 точку (случай, представленный на рис. 3, б черными квадратами), оказалось недостаточным - график  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  указывает на неоднозначность. Реконструированная глобальная модель (4) с полиномом 2-го порядка значительно хуже, чем в случае «чистых» данных: прогноз обеспечивается лишь на  $3T$  вперед. При использовании большей ширины окна (41 точка) график  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  практически накладывается на график для «чистого ряда» (рис. 3, б). Модель значительно более эффективна: дает прогноз на  $7T$  вперед.

3 -  $\{x_1(t_i)\}=\{v^2(t_i)\}$ , шум отсутствует. График  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  явно указывает на неоднозначность зависимости  $x_3(x_1, x_2, x_3)$  (рис. 3, в). Эффективную модель (4) получить не удастся.<sup>4</sup> Заметим, что график  $\bar{\varepsilon}(\delta)$  в данном случае выглядит так же, как и для однозначной непрерывной зависимости, то есть не позволяет выявить непригодность переменных для глобального моделирования.

В качестве второго примера рассмотрим применение методики для реконструкции уравнений неавтономного объекта - гармонически возбуждаемого осциллятора Дуффинга

$$\dot{u}_1 = u_2, \quad (5)$$

$$\dot{u}_2 = -\gamma u_2 + u_1 - u_1^3 + A \cos(\omega t),$$

при  $\gamma=0.1, A=1, \omega=1$  (см. фазовую траекторию на рис. 4, а). Рассмотрим оценки по критерию  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  и реконструкцию модели вида [19-21]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, \varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

по ряду наблюдаемой  $\{\eta(t_i)\}$ , который формировался на основе реализаций переменных  $u_1$  и  $u_2$  различными способами. Предложенная методика применялась во всех приведенных ниже случаях для оценки однозначности и непрерывности зависимости  $\dot{x}_2(x_1, x_2, \varphi)$ , где  $x_1$  совпадает с наблюдаемой  $\eta$ , ряды величин  $\dot{x}_2$  и  $x_2$  были получены численным дифференцированием ряда  $\{x_1(t_i)\}$  с использованием разных методов. Реализация фазы  $\varphi$  получена по формуле  $\varphi(t_i)=\omega t_i \bmod 2\pi$ , частота  $\omega$  считалась известной.

1 -  $\{x_1(t_i)\}=\{u(t_i)\}$ , шум отсутствует, производные вычисляются с помощью простых разностных формул аналогично предыдущему примеру. График  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  (рис. 4, б, кружки) свидетельствует об однозначности и непрерывности зависимости  $\dot{x}_2(x_1, x_2, \varphi)$ . Сопоставляя исходные уравнения (5) с выбранным видом модели (6), можно убедиться, что эта зависимость действительно однозначна. Полученная модель (6) с аддитивным воздействием [20,21] обеспечивает прогноз на 13 периодов воздействия ( $13T$ ) вперед.

<sup>4</sup> Путем аналитических преобразований можно показать, что эта зависимость действительно неоднозначна.

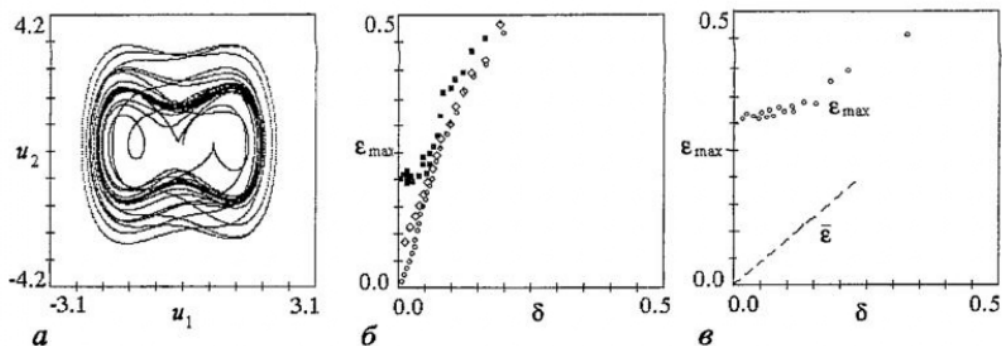


Рис. 4. а - Проекция фазовой траектории осциллятора Дуффинга (5). б -  $\epsilon_{\max}(\delta)$  для зависимости  $\dot{x}_2(x_1, x_2, \varphi)$  в случае  $x_1 = u_1$ , без шума - кружки, с шумом и (недостаточным) усреднением в окне шириной 35 точек - квадраты, с шумом и усреднением в 51-точечном окне - ромбики (влияние шума снижено). в -  $\epsilon_{\max}(\delta)$  для  $x_1 = u_2$ . Зависимость неоднозначна, а график  $\bar{\epsilon}(\delta)$  выглядит так же, как и для однозначной зависимости (штриховая линия)

2 -  $\{x_1(t_i)\} = \{u(t_i) + \xi_i\}$ , где  $\xi_i$  - последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке  $[-0.005, 0.005]$ , что соответствует примерно 0.1 % от уровня сигнала. Без фильтрации вновь не удастся получить эффективную модель. Для снижения влияния шума производные вычислялись с использованием сглаживающего полинома и окна шириной 35 точек ( $34\Delta t$  составляет примерно 0.05 характерного периода колебаний  $T$ ). Эта ширина оказалась недостаточной: график  $\epsilon_{\max}(\delta)$  (рис. 4, б, квадраты) указывает на неоднозначность, а полученная модель дает точный прогноз лишь на  $3T$  вперед. При использовании большей ширины окна (51 точка) график  $\epsilon_{\max}(\delta)$  приобретает вид, который более характерен для однозначной зависимости (рис. 4, б, ромбики). Можно получить достаточно эффективную модель (б), обеспечивающую дальность прогноза  $6T$ .

3 -  $\{x_1(t_i)\} = \{u_2(t_i)\}$ , шум отсутствует. График  $\epsilon_{\max}(\delta)$  явно указывает на неоднозначность зависимости  $\dot{x}_2(x_1, x_2, \varphi)$  (рис. 4, в). Эффективную модель (б) в данном случае получить невозможно. Вновь график  $\bar{\epsilon}(\delta)$  (рис. 4, в) выглядит так же, как и для однозначной непрерывной зависимости, то есть не позволяет выявить непригодность переменных для глобального моделирования.

### 3. Моделирование реальной нелинейной электрической цепи

На рис. 5, а приведена схема нелинейной электрической цепи -  $RLC$ -контур с переключаемыми конденсаторами, гармонически возбуждаемый источником внешней ЭДС [17,18]. Элемент К - это электронный ключ: микросхема, содержащая десятки транзисторов и других пассивных элементов, которая питается от специального источника постоянного напряжения. При малых значениях напряжения  $U$  на емкости  $C_1$  сопротивление ключа очень велико и вынужденные колебания происходят лишь в контуре  $RLC_1$ . Когда напряжение достигает порогового значения  $U_{\text{пор}}$ , сопротивление ключа резко падает, и он подключает к цепи емкость  $C_2$ . Обратное переключение происходит приблизительно при том же значении  $U$ . В результате при больших амплитудах воздействия система демонстрирует сложную динамику, в том числе хаотические колебания.



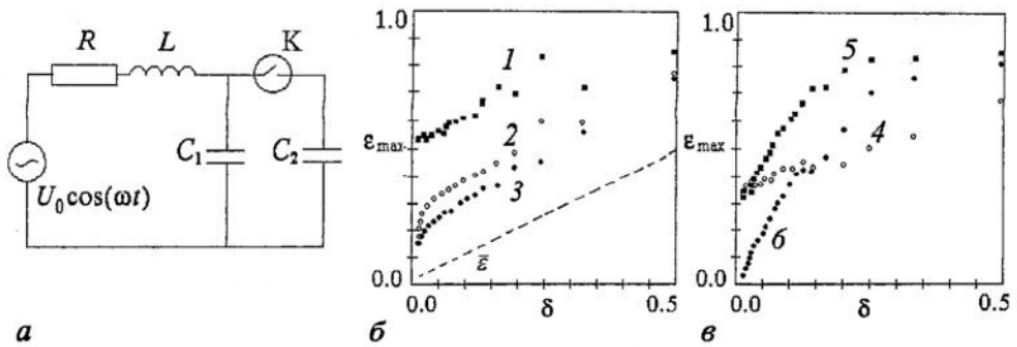


Рис. 5. а - Схема контура с переключаемыми конденсаторами:  $C_1=0.1$  мкФ,  $C_2=4.4$  мкФ,  $L=0.03$  Гн,  $R=10$  Ом,  $U_{\text{шор}}=-0.2$  В,  $U_0=2.344$  В, частота воздействия  $2.98$  кГц. б - Оценки выбора переменной  $x_1=I$  по графикам  $\epsilon_{\text{max}}(\delta)$ . Графики  $\bar{\epsilon}(\delta)$  выглядят примерно одинаково (штриховой линией показан график для случая 1). в - Оценки выбора переменной  $x_1$  - интеграла от силы тока  $I$  по графикам  $\epsilon_{\text{max}}(\delta)$

Рассмотрим влияние выбора динамических переменных и структуры уравнений на результат моделирования. Используем в качестве наблюдаемого ряда  $\{\eta(t_i)\}$  последовательность значений силы тока  $I$  через резистор  $R$  в хаотическом режиме. Данные записывались с помощью 12-разрядного АЦП, выборочный интервал был равен  $\Delta t=4$  мкс, период воздействия  $T=84\Delta t$ , длина ряда  $N=30000$ . Ниже приведены 6 примеров (три варианта структуры модельных ОДУ для двух различных вариантов выбора наблюдаемой переменной) и изложены результаты оценок по предлагаемой методике (рис. 5, б, в) и результаты построения моделей. Графики на рисунках пронумерованы в соответствии с номерами примеров.

### 1) Часто применяемая форма модели

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (7)$$

с  $x_1(t_i)=\eta(t_i)$ ,  $x_2(t_i)=\eta(t_i+\tau)$ ,  $x_3(t_i)=\eta(t_i+2\tau)$  - координаты получены методом временных задержек, где  $\tau=21\Delta t$  - первый ноль автокорреляционной функции. Для численного дифференцирования оптимальным образом подбирался сглаживающий полином. Тестировались все три зависимости  $x_k(x_1, x_2, x_3)$ ,  $k=1, 2, 3$ . Величина  $\epsilon_{\text{max}}$  не стремится к нулю при уменьшении  $\delta$  для всех  $k$ . Графики  $\epsilon_{\text{max}}(\delta)$  выглядят аналогично представленному на рис. 5, б (черные квадраты) для  $k=3$ . Это говорит о невозможности построения эффективной глобальной модели, что полностью подтверждается на практике.

2) Стандартная модель (4) с  $x_1(t_i)=\eta(t_i)$ . Тестировалась зависимость  $\dot{x}_3(x_1, x_2, x_3)$ :  $\epsilon_{\text{max}}(\delta)$  уменьшается при уменьшении  $\delta$  (рис. 5, б, светлые кружки), что указывает на возможное наличие однозначности. Результат моделирования: эффективную модель с полиномом в правой части подобрать не удастся. По-видимому, для аппроксимации зависимости полином не годится. Здесь требуется другой вид аппроксимирующей функции  $f$ , его выбор - это отдельная сложная задача, которая не является предметом данной статьи.

3) Неавтономная модель вида (б) с  $x_1(t_i)=\eta(t_i)$ . Тестировалась зависимость  $\dot{x}_2(x_1, x_2, \varphi)$ . График  $\epsilon_{\text{max}}(\delta)$  (рис. 5, б, черные кружки) указывает, что зависимость, возможно, однозначна. Но эффективную модель с полиномиальной аппроксима-

цией зависимости  $\dot{x}_2(x_1, x_2, \varphi)$  получить не удастся. Вновь требуется подбирать специальный вид функции  $f$ .

4) Стандартная модель (4) с  $x_1(t) = \int_{t_1}^{t_i} \eta(t) dt$ . Эта переменная имеет физический смысл - суммарный заряд на емкостях  $C_1$  и  $C_2$ . Временной ряд  $\{x_1(t_i)\}$  был получен путем численного интегрирования (методом трапеций) измеренного ряда значений силы тока  $I$ . График  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  не обнаруживает тенденции к уменьшению при уменьшении  $\delta$  (рис. 5, в, светлые кружки):  $\varepsilon_{\max}$  остается не меньше 0.35. Эффективную модель построить не удастся.

5) Модель (7) с  $x_1(t_i) = \int_{t_1}^{t_i} \eta(t) dt$  и задержанными координатами  $x_2(t_i) = x_1(t_i + \tau)$  и  $x_3(t_i) = x_1(t_i + 2\tau)$ , где  $\tau$  - первый ноль АКФ. Тестировались все три зависимости  $\dot{x}_k(x_1, x_2, x_3)$ ,  $k=1, 2, 3$ . Для всех трех случаев графики  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  не стремятся к началу координат при уменьшении  $\delta$  (один из них - для  $k=1$  - приведен на рис. 5, в, черные квадраты). Эффективную модель построить не удастся.

6) Модель (6) с  $x_1(t_i) = \int_{t_1}^{t_i} \eta(t) dt$ . График  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  (рис. 5, в, черные кружки) показывает, что зависимость однозначна и меняется плавно. Реконструированная модель (6) с полиномом 11-го порядка и аддитивным воздействием демонстрирует хаотический аттрактор, качественно схожий с экспериментальным, и дает прогноз с относительной погрешностью не более 5% примерно на  $5T$  вперед [21].

Показательно, что оптимистическая оценка по критерию  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  и хорошие результаты глобальной реконструкции получены лишь в последнем (шестом) случае, а графики  $\bar{\varepsilon}_{\max}$  для всех перечисленных выше вариантов выбора переменных практически совпадают: один из них (для первого примера) показан пунктиром на рис. 5, б. Это подтверждает тезис о том, что средняя характеристика  $\bar{\varepsilon}$  в общем случае не позволяет оценить пригодность переменных для глобального моделирования.

## Заключение

При глобальной реконструкции динамических моделей по временным рядам очень важным шагом является взаимосогласованный выбор динамических переменных и вида функций, аппроксимирующих входящие в модель зависимости. При неудачном выборе переменных эти зависимости могут оказаться слишком сложными для аппроксимации или вовсе неоднозначными.

Развитая в данной работе методика тестирования временных рядов  $\{x(t_i)\}$  и  $\{y(t_i)\}$ , сформированных по наблюдаемым данным, позволяет оценить, являются ли зависимости  $y_k(x)$  однозначными, непрерывными и без участков большой крутизны (и, следовательно, пригодны ли выбранные переменные для построения динамической модели). Работоспособность предложенной методики показана на численных и радиофизических примерах. Она имеет общие черты с  $\delta$ - $\varepsilon$  методом, предложенным в [14] для выявления детерминированности наблюдаемого процесса. Но в отличие от [14], где используются лишь средние (интегральные) оценки, в нашем подходе основную роль играют локальные характеристики, которые гораздо важнее для успеха глобальной реконструкции. В примерах показано, что усредненная величина разброса не содержит всей необходимой для моделирования информации.

Что касается применения методики на практике, то необходимо особо

упоминать случай, когда в данных имеется хотя бы один сильный выброс, например, в результате помехи в измерительном приборе, то есть в зависимости  $y_k(\mathbf{x})$  имеется всего одна точка, лежащая «отдельно» от всех остальных. При этом методика приведет к выводу, что зависимость неоднозначна, так как в той ячейке, которой принадлежит «выброс», при любых  $\delta$  будет наблюдаться большой локальный разброс. Это свидетельствует, на первый взгляд, о статистической неустойчивости предложенного подхода. Однако эту трудность можно устранить с помощью несложной предварительной обработки данных. Во-первых, сильную помеху, как правило, легко заметить на графике наблюдаемой реализации  $\eta(t)$ . О таких выбросах говорят как о неправдоподобных данных и исключают соответствующие участки ряда из рассмотрения. Во-вторых, если выбросы визуально заметить трудно, то можно внести небольшую поправку в методику тестирования. А именно, в случае большой величины  $\epsilon_{\max}$  проверять, какая ячейка дала это большое значение, исключать наиболее удаленный от всех других вектор этой ячейки из рассмотрения и повторять процедуру. Таким образом можно исключить, скажем, до 5% векторов. При этом избавление от помех (если их немного) гарантировано. В-третьих, такие выбросы в эксперименте присутствуют не всегда. Так, в рассмотренных радиофизических примерах, где есть шумы и измерительная аппаратура, таких помех не было, и процедура позволила выявить подходящие для моделирования переменные.

Предложенная методика может применяться также при реконструкции дифференциальных уравнений с запаздыванием и дифференциальных уравнений в частных производных, поскольку и в этих случаях одним из элементов процедуры моделирования является аппроксимация некоторых зависимостей по экспериментальным данным [22].

Однако однозначность зависимости еще не гарантирует получения эффективной глобальной модели. Однозначная зависимость может оказаться трудно поддающейся глобальной аппроксимации (особенно стандартными функциями, в частности, полиномами), если она, например, является быстро осциллирующей. В этом случае может оказаться эффективным локальный подход [7-8].

В заключение отметим, что предложенная методика констатирует результат выбора переменных, но не говорит о том, как нужно изменить набор переменных в случае неудачи. Может потребоваться добавить новые переменные, исключить или преобразовать какие-то из имеющихся и т.д., что является темой отдельного разговора.

Авторы признательны Е.П. Селезневу за предоставление данных радиофизического эксперимента.

*Работа поддержана РФФИ (гранты №№ 02-02-17578, 02-02-06502, 02-02-06503), РАН (молодежный грант № 23) и CRDF (грант REC-006).*

## **Библиографический список**

1. Voss H.U., Schwache A., Kurths J. and Mitschke F. Equations of motion from chaotic data: A driven optical fiber ring resonator // Phys. Lett. A. 1999. Vol. 256. P. 47.
2. Horbelt W. and Timmer J., Bünner M.J., Meucci R. and Ciofini M. Identifying physical properties of a laser by dynamical modeling of measured time series // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 016222.
3. Gouesbet G., Letellier C. Global vector-field approximation by using a multivariate polynomial approximation on nets // Phys.Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 4955.
4. Aguirre L.A., Freitas U.S., Letellier C. and Maquet J. Structure-selection techniques applied to continuous-time nonlinear models // Physica D. 2001. Vol. 158. P.1.

5. Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С. Реконструкция динамических систем // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 9. С. 1075.

6. Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А. Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам (краткий обзор) // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 1. С. 29.

7. Farmer J.D., Sidorowich J.J. Predicting chaotic time series // Phys.Rev.Lett.. 1987. Vol. 59. P. 845.

8. Casdagli M. Nonlinear prediction of chaotic time series // Physica D. 1989. Vol. 35. P.335.

9. Judd K., Mees A. On selecting models for nonlinear time series // Physica D. 1995. Vol. 82. P. 426.

10. Büchner M.J., Meyer Th., Kittel A., Parisi J. Recovery of the time-evolution equation of time-delay systems from time series // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. P. 5083.

11. Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I. and Prokhorov M.D. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 056216.

12. Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С. Применение статистических методов при решении задачи глобальной реконструкции // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 8. С. 7.

13. Kadtko J., Kremliovsky M. Estimating statistics for detecting determinism using global dynamical models // Phys.Lett. A. 1997. Vol. 229. P. 97.

14. Kaplan D.T. Exceptional events as evidence for determinism // Physica D. 1994. Vol. 73. P. 738.

15. Letellier C., Macquet J., Le Sceller L., Gouesbet G., Aguirre L.A. On the nonequivalence of observables in phase space reconstructions from recorded time series // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. Vol. 31. P. 7913.

16. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. and Flannery B.P. Numerical Recipes. Cambridge, Cambridge University Press, 1992.

17. Hasler M. Electrical circuits with chaotic behavior // Proc. of the IEEE. 1987. Vol. 75, № 8. P. 40.

18. Безручко Б.П., Селезнев Е.П. Сложная динамика возбуждаемого осциллятора с кусочно-линейной характеристикой // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, вып. 19. С. 75.

19. Hegger R., Kantz H., Schmuser F., Diestelhorst M., Kapsch R.-P., Beige H. Dynamical properties of a ferroelectric capacitors observed through nonlinear time series analysis // Chaos. 1998. Vol. 8, № 3. P. 727.

20. Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А. Реконструкция уравнений неавтономного нелинейного осциллятора по временному ряду: модели, эксперимент // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 1. С. 49.

21. Bezruchko B.P., Smirnov D.A. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. 016207.

22. Bär M., Hegger R. and Kantz H. Fitting partial differential equations to space-time dynamics // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59. P. 337.

Саратовское отделение Института  
радиотехники и электроники РАН

Поступила в редакцию 24.06.02

# TEST FOR UNIQUENESS AND CONTINUITY IN GLOBAL RECONSTRUCTION OF MODEL EQUATIONS FROM TIME SERIES

*B.P. Bezruchko, T.V. Dikanev, and D.A. Smirnov*

The problem of construction of global dynamical models from time series (from discrete sets of values of an observable variable) is quite relevant for different fields of science. The first step of such modeling is the values obtaining of variable quantities from an experimental time series which will serve as dynamical variables of a model. This «choice of variables» determines the success of modeling to a significant extent. In this paper we suggest a technique which helps to find a «good» set of dynamical variables. For each variant of state variables, their time series are tested for uniqueness and continuity of dependencies between the state variables and quantities which should enter left-hand sides of model equations (that is for possibility of deterministic description). Efficiency of the technique is shown in numerical and radiophysical experiments.



*Диканев Тарас Викторович* - родился в городе Саратове (1979). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2002). В настоящее время - аспирант кафедры электроники, колебаний и волн. Область научных интересов: анализ нестационарных временных рядов, динамическое моделирование по временным рядам. Автор и соавтор 9 публикаций по данной тематике.



*Смирнов Дмитрий Алексеевич* - родился в Ершове Саратовской области (1977). Окончил Высший колледж прикладных наук Саратовского государственного университета (1999). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиопизика (2001). В настоящее время - научный сотрудник Саратовского отделения ИРЭ РАН. Область научных интересов: эмпирическое математическое моделирование, анализ временных рядов, теория динамических систем. Автор и соавтор 42 научных публикаций.