Изв. вузов «ПНД», т.10, № 5, 2002 УДК 517.9

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В РЕЖИМЕ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

А.А. Короновский, А.В. Стародубов, А.Е. Храмов

В настоящей работе рассматривается методика определения длительности переходного процесса для эталонной двумерной динамической системы с дискретным временем (отображения Эно), находящейся в режиме хаотических колебаний.

В подавляющем большинстве работ, которые посвящены исследованию сложного поведения нелинейных динамических систем, внимание уделяется, прежде всего, установившимся режимам (которые могут быть как периодическими, так и хаотическими). При этом начальная часть временной реализации, отвечающая переходному процессу, считается несущественной и отбрасывается, а рассматриваются, в основном, характеристики установившихся колебательных режимов (размерность аттракторов, ляпуновские экспоненты и т.п.), бифуркации, возникающие при изменении значений управляющих параметров, сценарии перехода к хаосу и т.п. Однако переходные процессы подчиняются определенным закономерностям [1] и в ряде случаев позволяют получить важную информацию о системе в целом и ее динамике [2].

Под длительностью переходного процесса понимается интервал времени, который необходим динамической системе для того, чтобы изображающая точка в фазовом пространстве достигла аттрактора с некоторой наперед заданной точностью ε. Понятно, что с формальной точки зрения переходный процесс в системе, как правило, длится бесконечно долго, изображающая точка лишь асимптотически стремится к аттрактору при $t \to \infty$ и за конечный интервал времени никогда его не достигает. В натурных экспериментах и при численном моделировании поведения динамических систем во временной реализации, как правило, можно выделить участки, отвечающие установившемуся режиму или переходному процессу. Длительность переходного процесса зависит в каждом конкретном случае от начальных условий и точности, с которой определяется выход фазовой траектории на аттрактор.

Если состояние, к которому асимптотически стремится система при $t \to \infty$, является периодическим, существует достаточно простой и эффективный метод определения длительности переходного процесса, использованный в [1]. Суть этого метода для системы с дискретным временем

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_n$ - вектор, характеризующий состояние системы в n-й момент времени, заключается в следующем.

1. Система (1) итерируется достаточно большое число раз N (N должно быть заведомо больше максимальной длительности переходного процесса) со случайным начальным условием $\mathbf{x}_0$, после чего предполагается, что система достигла асимптотического состояния, а изображающая точка вышла на аттрактор, то есть точка $\mathbf{x}_N$ принадлежит аттрактору. После этого последовательность $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{N}$ анализируется, начиная с предпоследнего элемента $\mathbf{x}_{N-1}$, до тех пор пока не будет выполнено условие $\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_N\|<\varepsilon_0$, где ε_0 - точность, с которой определяется период асимптотического режима. В этом случае период колебаний системы (1) $\tau=N-k$ и, соответственно, аттрактор будет состоять из точек $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\tau}$, где $\mathbf{x}_1^0=\mathbf{x}_{k+1}$, $\mathbf{x}_2^0=\mathbf{x}_{k+2},\ldots,\mathbf{x}_\tau^0=\mathbf{x}_{k+\tau}=\mathbf{x}_N$.

2. После определения точек аттрактора $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\tau}$, длительность переходного процесса может быть определена для любого начального условия $\mathbf{x}_0$ с некоторой наперед заданной точностью ε. Для этого поочередно проверяются все точки последовательности $\{\mathbf{x}_i\}|_{i=0}^{N}$, начиная с $\mathbf{x}_0$ до некоторого $\mathbf{x}_k$, до тех пор пока не будет выполнено условие $\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_i^0\|<\varepsilon$, $1\le i\le\tau$, то есть пока одна из точек последовательности $\{\mathbf{x}_i\}|_{i=0}^{N}$ не совпадет с одной из точек аттрактора $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\tau}$ с наперед заданной точностью ε. В том случае, если переходной процесс завершается (с точностью до ε) в момент дискретного времени k, следующая точка $\mathbf{x}_{k+1}$ последовательности $\{\mathbf{x}_i\}|_{i=0}^{N}$ должна совпадать со следующей точкой аттрактора $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\tau}$. Если это условие выполняется, можно считать, что для начального условия $\mathbf{x}_0$ переходный процесс завершился в момент дискретного времени k, и его длительность определяется как $T_\varepsilon(\mathbf{x}_0)=k$.

3. Для того чтобы определить длительность переходного процесса для любого другого начального условия $\mathbf{x}_0$ или другого значения точности ε, необходимо повторить п. 2 с новыми величинами $\mathbf{x}_0$ и ε.

Следует отметить некоторые ограничения предложенного метода. Во-первых, в случае мультистабильности, если в фазовом пространстве системы (1) сосуществуют несколько периодических аттракторов, необходимо повторять п. 1 метода для каждого начального условия $\mathbf{x}_0$. Во-вторых, метод не работает при значениях параметров системы (1), равных бифуркационным, поскольку в точках бифуркации длительность переходного процесса обращается в бесконечность. В точках, близких к точкам бифуркации, длительность переходного процесса оказывается большой, что влечет за собой необходимость увеличения числа итераций на каждом этапе.

Для систем с непрерывным временем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, данный метод может быть применен, если выполнить процедуру сечения Пуанкаре [3]. В этом случае n-мерная потоковая система будет сведена к (n-1)-мерной системе с дискретным временем. При этом, конечно, осуществляется переход от непрерывного времени к дискретному, а в определение длительности переходного процесса вносится неопределенность, равная периоду колебаний. При этом отображение (1), получаемое в сечении Пуанкаре, может быть дополнено информацией о временных интервалах (в единицах непрерывного времени) с учетом того, что изображающей точке необходимо время для перехода из точки $\mathbf{x}_i$ сечения Пуанкаре в точку $\mathbf{x}_{i+1}$ [4]

$$t_{i+1} = t_i + \tau(\mathbf{x}_i). \tag{2}$$

Если асимптотический режим является хаотическим, изложенный выше метод оказывается неприменимым для определения длительности переходных процессов. Это связано, прежде всего, с тем, что число точек хаотического аттрактора $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\infty}$ оказывается бесконечным.

В рамках настоящей работы рассматривается методика определения длительности переходного процесса для динамической системы с дискретным временем, находящейся в хаотическом режиме. В качестве такой системы было выбрано отображение Эно - одно из эталонных отображений нелинейной динамики [5,6]

$$x_{n+1} = ax_n(1\text{-}x_n) + by_n,$$
$$y_{n+1} = x_n. \qquad (3)$$

Величины a и b являются управляющими параметрами, которые задают режимы колебаний системы (3).

Модифицируем вышеописанный метод определения длительности переходного процесса следующим образом: как и раньше (см. п. 1), итерируем систему (1) достаточно большое число раз N, после чего полагаем, что изображающая точка достигла аттрактора, который теперь, однако, является хаотическим. Тогда, начиная с момента дискретного времени (N+1) все последующие точки будут принадлежать хаотическому аттрактору $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\infty}$. Понятно, что число точек такого аттрактора является бесконечным, однако будем считать, что конечная последовательность $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{M}$, состоящая из M точек ($\mathbf{x}_i^0$=$\mathbf{x}_{N+i}$, $1 \le i \le M$), является хорошим приближением истинного хаотического аттрактора $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\infty}$, и с необходимой степенью точности обладает всеми его свойствами.

Для определения длительности переходного процесса в системе (1) с начальными условиями $\mathbf{x}_0$ необходимо последовательно сравнивать точки последовательности $\{\mathbf{x}_i\}|_{i=0}^{N}$ с точками последовательности $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{M}$ (см. п. 2), обладающей необходимыми свойствами хаотического аттрактора $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\infty}$. Как и раньше (п. 2), переходный процесс считается завершенным в момент дискретного времени k, если начиная именно с этого момента становится справедливым соотношение

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i^0\| < \varepsilon \qquad (0 \le k \le N, 1 \le i \le M), \qquad (4)$$

где $\mathbf{x}_i^0$ - точка хаотического аттрактора, $\mathbf{x}_k$ - элемент анализируемой временной реализации$\{\mathbf{x}_i\}|_{i=0}^{N}$, ε - точность, с которой определяется длительность переходного процесса. Отметим, что если переходный процесс заканчивается в момент дискретного времени k, то все последующие точки $\mathbf{x}_{k+1},...,\mathbf{x}_N$ временной реализации $\{\mathbf{x}_i\}|_{i=0}^{N}$ должны также принадлежать хаотическому аттрактору, а следовательно, в последовательности $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{M}$ должны существовать точки, совпадающие с точками $\mathbf{x}_{k+1},...,\mathbf{x}_N$ с точностью до ε. Поэтому для подтверждения того, что изображающая точка в k-й момент дискретного времени достигла аттрактора, необходимо последующие m точек $\mathbf{x}_{k+1},...,\mathbf{x}_{k+m}$ проверить на соответствие условию (4).

Для того чтобы определить длительность переходного процесса для других начальных условий $\mathbf{x}_0$ или с другой точностью ε, необходимо, как и для случая периодического режима (см. п. 3), проанализировать новую последовательность $\{\mathbf{x}_i\}|_{i=0}^{N}$ с соответствующими значениями начальных условий или точности. Если в фазовом пространстве системы сосуществуют несколько аттракторов, необходимо либо заполнять множество точек $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{M}$ (обладающих свойствами хаотического аттрактора $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\infty}$) для каждого начального условия $\mathbf{x}_0$ заново, либо предварительно найти все возможные аттракторы, реализующиеся в фазовом пространстве динамической системы и определить (тем или иным способом), в бассейне притяжения какого аттрактора находятся начальные условия $\mathbf{x}_0$, чтобы

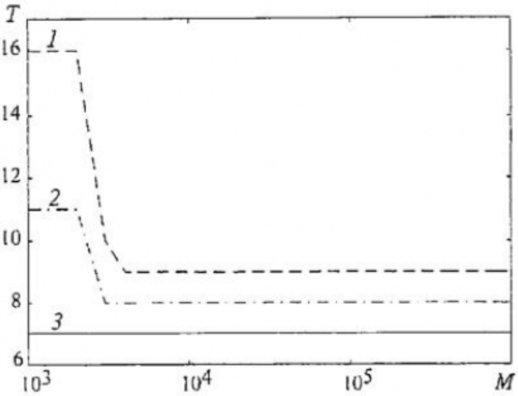

Рис. 1. Зависимость длительности переходного процесса T от количества точек M аттрактора $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{M}$ для значений управляющих параметров a=2.5453, b=0.5188. Максимальное количество итераций $M_{max}=10^6$, максимальная длительность переходного процесса соответствует $N=10^3$ итераций, начальные условия $x_0=0.1$, $y_0=0.1$. Цифрами обозначены кривые, полученные для следующих значений точности ε: кривая *1*- 10^{-3}, *2*- $2{\cdot}10^{-3}$, *3* - 10^{-2}

затем воспользоваться вышеописанным методом определения длительности переходных процессов.

Следует отметить, что длительность переходного процесса T может быть определена некорректно, если число точек M последовательности $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{M}$ окажется маленьким. На рис. 1 приведена зависимость длительности переходного процесса T от числа точек M, определенная с помощью выше-описанного метода. Значения управляющих параметров (a=2.5453, b=0.5188) были выбраны таким образом, чтобы в системе реализовался единственный хаотический аттрактор. Число итераций N, после которого переходный процесс считался наверняка завершенным, было выбрано $N=10^3$. Длительность переходного процесса определялась с различными значениями точности ε, число последовательно контролируемых точек было выбрано равным единице (m=0). Из рисунка видно, что с повышением точности (уменьшением ε) длительность переходного процесса увеличивается (хотя и незначительно, всего на несколько единиц дискретного времени). Одновременно изменяется и количество точек M последовательности $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{M}$, необходимых для корректного определения длительности переходного процесса (ср. кривые *1-3*). Из приведенного рисунка видно, что начиная с некоторого числа точек $M_{min}(\varepsilon)$ длительность переходного процесса перестает изменяться с увеличением M, и, следовательно, при $M>M_{min}(\varepsilon)$ последовательность $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{M}$ обладает свойствами хаотического аттрактора $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\infty}$, необходимыми для корректного определения длительности переходного процесса с заданной точностью ε, когда динамическая система находится в хаотическом режиме.

Обсудим вопрос о количестве точек $M(\varepsilon)$ последовательности $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{M(\varepsilon)}$, необходимых для того, чтобы эта последовательность могла быть использована для определения длительности переходного процесса вместо множества точек $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\infty}$ хаотического аттрактора. Понятно, что последовательность $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{M(\varepsilon)}$ полностью соответствует хаотическому аттрактору $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\infty}$ и обладает его свойствами, необходимыми для определения длительности переходного процесса, если хаотический аттрактор может быть полностью покрыт (в рассматриваемом случае для двумерного отображения) квадратами со стороной ε, центры которых расположены в элементах последовательности $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{M(\varepsilon)}$. В результате проведенных исследований было показано, что для точности $\varepsilon=10^{-2}$, хаотический аттрактор $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\infty}$ отображения Эно при выбранных значениях управляющих параметров полностью покрывается за $N_{max}\sim 15{\cdot}10^6$ итераций. При этом, за 10^5 итераций оказывается покрытым 97.0%, а за 10^6 итераций - 99.7% всех точек хаотического аттрактора $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\infty}$. Для точности $\varepsilon=10^{-3}$ хаотический аттрактор $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^{\infty}$ полностью покрывается за $N_{max}\sim 10^9$ итераций, при этом за 10^6 итераций оказывается покрытым около 94.0% всех точек хаотического аттрактора. Оставшиеся непокрытыми квадратами со стороной ε области аттрактора являются крайне редко посещаемыми изображающей точкой и не оказывают существенного влияния на процедуру определения длительности переходного процесса (см. также

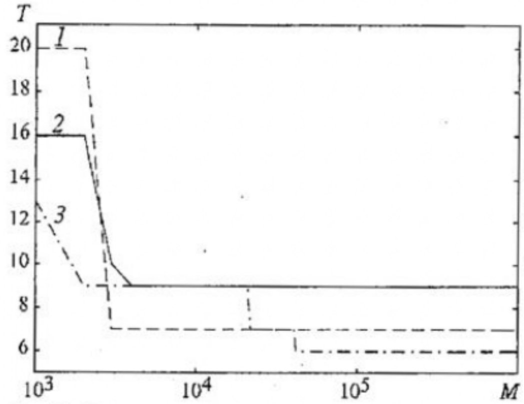

Рис. 2. Зависимость длительности переходного процесса T от количества точек M последовательности $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^M$ для значений управляющих параметров a=2.5453, b=0.5188 при различных начальных условиях: кривая *1* - x_0=0.5, y_0=-0.2; *2* - x_0=0.1, y_0=0.1; *3* - x_0=0.5, y_0=0.1. Максимальное количество итераций $M_{max}=10^6$, точность $\varepsilon=10^{-3}$

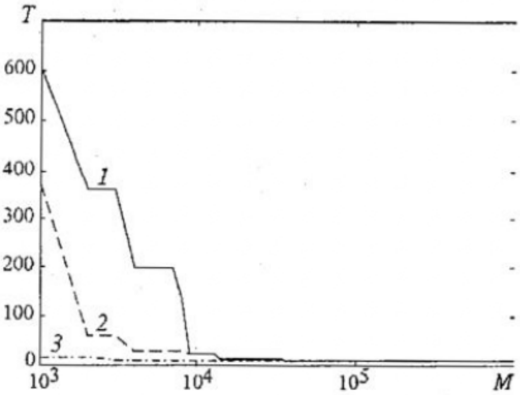

Рис. 3. Зависимость длительности переходного процесса T от количества точек M последовательности $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^M$ для различного числа точек m, поочередно сравниваемых с точками хаотического аттрактора, при тех же значениях управляющих параметров. Максимальное количество итераций $M_{max}=10^6$, точность определения длительности переходного процесса $\varepsilon=10^{-3}$, начальные условия x_0=0.1, y_0=0.1. Кривая *1* соответствует m=20 (последовательно проверяются 20 точек реализации $\{\mathbf{x}_i\}|_{i=0}^N$), кривая *2* - m=10, *3* - m=0

рис. 1). Исходя из вышеизложенного, представляется разумным считать, что для корректного определения длительности переходного процесса системы, находящейся в хаотическом режиме, достаточно $M(\varepsilon)$ точек, при котором покрывается с точностью ε порядка 90% всех точек аттрактора.

Таким образом, для точности $\varepsilon=10^{-2}$ является достаточным $M(\varepsilon)=10^5$, а для $\varepsilon=10^{-3}$ - $M(\varepsilon)=10^6$ точек.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость длительности переходного процесса, определяемой в соответствии с описываемой методикой, от количества точек M последовательности $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^M$ при различных начальных условиях.

Рассмотрим теперь вопрос о том, каким должно быть число точек m последовательности $\{\mathbf{x}_i\}|_{i=0}^N$, для которых проверяется соотношение (4) после того, как некоторая k-я точка $\mathbf{x}_k$ совпадает с некоторой наперед заданной точностью ε с одной из точек аттрактора $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^M$. На рис. 3 представлены результаты определения длительности переходного процесса для разных значений m. Из рисунка видно, что выбор больших значений m лишь увеличивает число точек последовательности $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^M$, которые нужно учесть для корректного определения длительности переходного процесса, в то время как метод с наименьшим значением m=0 обладает наилучшими характеристиками. Таким образом, для определения длительности переходного процесса имеет смысл считать, что переходный процесс завершился после того, как точка $\mathbf{x}_k$ совпала с наперед заданной точностью ε с одной из точек последовательности $\{\mathbf{x}_i^0\}|_{i=1}^M$.

Для иллюстрации использования предлагаемого метода на рис. 4, *а* приведен вид зависимости длительности переходных процессов от начальных условий для отображения Эно. Видно, что наиболее светлые точки на плоскости начальных условий, в которых длительность переходного процесса минимальна, совпадают с точками аттрактора 4, *б*.

Таким образом, в работе предложен метод определения длительности переходных процессов для систем с дискретным временем, находящихся в режиме хаотических колебаний, и показана возможность его использования на примере

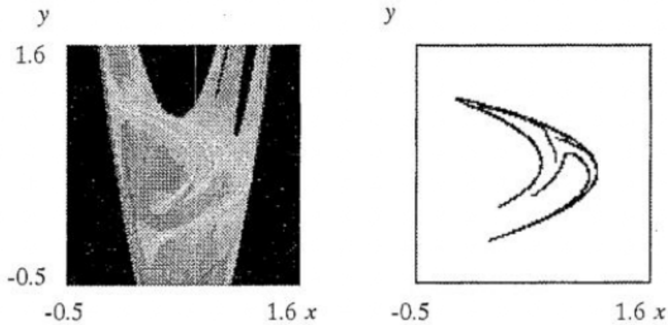

Рис. 4. *а* - Градациями серого цвета показана длительность переходных процессов для различных начальных условий в отображении Эно (3). Значения управляющих параметров a=2.5453, b=0.5188, точность $\varepsilon=10^{-2}$, $M=10^6$, m=0. *б* - Вид хаотического аттрактора, существующего в фазовом пространстве для отображения Эно, при выбранных значениях управляющих параметров. Максимальная длительность переходного процесса T=20. Черным цветом показаны начальные условия, стартуя из которых,изображающая точка уходит на бесконечность

эталонного отображения нелинейной динамики - отображения Эно. По всей видимости, предлагаемый метод можно использовать и для потоковых систем, используя метод сечения Пуанкаре.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 01-02-17392 и 00-15-96673), а также Научно-образовательного центра «Нелинейная динамика и биофизика» при Саратовском госуниверситете (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union).

Библиографический список

1. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е* . Универсальные скейлинговые закономерности переходных процессов // Доклады Академии Наук. 2002. Т. 383, № 3. С.322-325.

2. *Bezruchko B.P., Dikanev T.V., Smirnov D.A.* Role of transient processes for reconstruction of model equations from time series // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 036210.

3. *Henon M.* On the numerical computation of Poincaré maps // Physica D. 1982. Vol. 5. P. 412-414.

4. *Kaufmann Z., Lustfeld H.* Comparison of averages of flows and maps // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 055206(R).

5. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor. // Commun. Math. Phys. 1976. Vol. 50. P. 69-77.

6. *Хенон М.* Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы/ Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир. 1981. С. 152.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 26.06.02

TECHNIQUE OF DEFINITION OF TRANSIENT PROCESS DURATION FOR DYNAMIC SYSTEM WITH DISCRETE TIME AT CHAOTIC OSCILLATION MODE

A.A. Koronovskii, A.V. Starodubov, A.E. Hramov

In present work the technique of definition of transition process duration is considered for two-dimensional reference dynamic system with discrete time (The Henon map), at chaotic oscillation mode.

Стародубов Андрей Викторович - родился в Саратове (1982). Студент третьего курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов - переходные процессы в нелинейных динамических системах.