



## ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИНХРОННОГО ХАОСА В СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

*Е.П. Селезнев, А.М Захаревич*

Численно исследуется влияние асимметрии на синхронный хаос в квадратичных отображениях с диссипативным видом связи. Показано, что с введением асимметрии после потери трансверсальной суперустойчивости синхронный хаотический аттрактор становится фрактальным, а с приближением к границе синхронизации (уменьшением связи) его размерность демонстрирует немонотонное поведение.

Изучение явления хаотической синхронизации имеет как фундаментальное, так и прикладное значение [1-9]. Несомненный интерес в этом направлении представляют исследования явления хаотической синхронизации в симметрично связанных идентичных подсистемах, демонстрирующих один из классических сценариев перехода к хаосу, например, через последовательность удвоений периода [10-11]. Режиму синхронных хаотических колебаний в такой системе соответствует ситуация, когда значения динамических переменных в подсистемах равны. При этом в фазовом пространстве выделяются два направления: диагональное, вдоль которого движения неустойчивы, а соответствующий ляпуновский показатель положителен, и трансверсальное, вдоль которого движение устойчиво, а соответствующий ляпуновский показатель отрицателен. Эволюция системы при изменении параметра нелинейности тождественна эволюции изолированной подсистемы. Целью данной работы является изучение влияния асимметрии (неидентичности подсистем) на структуру синхронного хаотического аттрактора, его корреляционную размерность и ее эволюцию с приближением к границе синхронизации. Численно исследовалась система диссипативно связанных квадратичных отображений

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2), \\ y_{n+1} = \lambda\delta - y_n^2 - k(x_n^2 - y_n^2), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_n$  и  $y_n$  - динамические переменные,  $n=1,2,\dots$  - дискретное время,  $\lambda$  - параметр нелинейности,  $\delta$  - параметр асимметрии,  $k$  - параметр связи.

Следует отметить, что корреляционная размерность является предельной величиной и при ее численной оценке с конечной точностью всегда остается вопрос, что будет на более мелких масштабах? Однако, если есть возможность аналитически оценить размерность множества, то можно проверить полученные

численно результаты. Например, корреляционную размерность критического аттрактора в квадратичном отображении можно оценить аналитически на основе универсальных свойств сценария перехода к хаосу [12,13]. Этот результат можно распространить и на связанные системы, исследуемые в данной работе, и использовать как тест при проведении численных оценок.

При  $\delta=1$  система (1) симметрична относительно замены  $x_n \leftrightarrow y_n$  и для этого случая ее динамика достаточно хорошо изучена. При  $k>0$  в закритической области ( $\lambda > \lambda_c$ , где  $\lambda_c = 1.40115518909\dots$  - критическое значение для изолированных подсистем [13]) система (1) демонстрирует синхронный хаотический режим, фазовый портрет которого расположен на диагонали плоскости  $(x_n, y_n)$ . Поведение связанных систем в этом случае тождественно динамике изолированной подсистемы. Оценка корреляционной размерности хаотического аттрактора при критическом значении параметра  $\lambda = \lambda_c$  дает  $d_c = 0.54$  (рассчитывалась редуцированная корреляционная размерность, для чего использовалось 40000 значений и 5000 опорных точек, рассчитанных с точностью  $10^{-18}$ ), что близко к хаусдорфовой размерности критического аттрактора квадратичного отображения [12,13]. С увеличением параметра  $\lambda$  размерность синхронного аттрактора увеличивается и становится равной 1. Последнее связано с тем, что для квадратичного отображения размерность хаотического аттрактора равна 1, а синхронный аттрактор связанной системы лежит на прямой - диагонали в фазовой плоскости  $x_n = y_n$ .

При  $\delta \neq 1$  симметрия нарушается, однако режим синхронизации сохраняется. На рис. 1, а приведена структура плоскости параметров  $(k, \lambda)$  при  $\delta = 0.97$ . Светлые области соответствуют периодическим синфазным циклам, светло-серые - синхронным хаотическим режимам, темно-серым обозначена область несинфазных режимов, сплошными обозначены линии бифуркаций удвоения периода, цифрами - период циклов. Рис. 1, б иллюстрирует фазовые портреты хаотических аттракторов и их увеличенные фрагменты. Рассмотрим эволюцию цикла периода 1 с ростом параметра  $\lambda$  при фиксированных  $k=0.5$  и  $\delta=0.97$ . С увеличением  $\lambda$  наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающаяся при  $\lambda \approx 1.4229918\dots$  переходом к синхронному хаосу (фрагмент 1 на рис. 1, б). При  $k=0.5$  детерминант матрицы линеаризации обращается в 0 и все циклы системы (1) (как устойчивые, так и седловые) являются суперустойчивыми в трансверсальном направлении. В этом случае критический аттрактор лежит на прямой, а оценка его корреляционной размерности дает значение  $d_c = 0.5$  (что близко к рассчитанной в [12,13] корреляционной размерности критического аттрактора одномерного квадратичного отображения). Утверждение, что аттрактор при  $k=0.5$  лежит на прямой, легко доказать. Вычтем в системе (1) первое уравнение из второго

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \lambda(\delta - 1) - y_n^2 + x_n^2 - 2k(x_n^2 - y_n^2),$$

после группировки получим следующее выражение:

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \lambda(\delta - 1) - (1 - 2k)(x_n^2 - y_n^2). \quad (2)$$

При  $k=0.5$  выражение (2) принимает вид

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \lambda(\delta - 1)$$

или

$$y_{n+1} = \lambda(\delta - 1) + x_{n+1}.$$

Данное выражение представляет линейную зависимость между динамическими

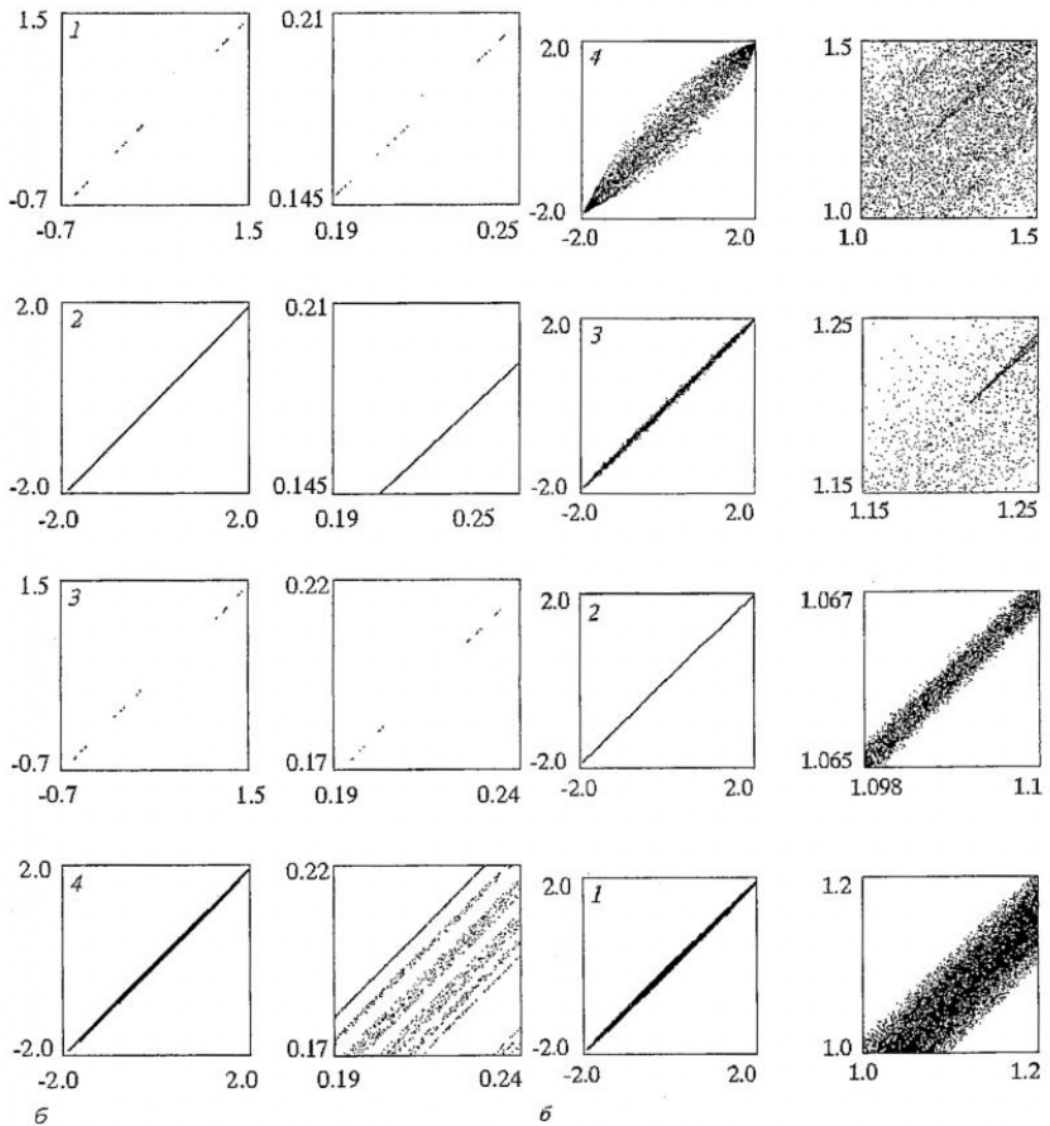
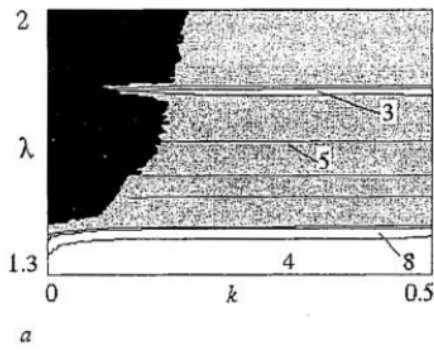


Рис. 1. *a* - плоскость параметров  $(k, \lambda)$  при  $\delta=0.97$ ; *b* - фазовые портреты и их увеличенные фрагменты в зависимости от параметров  $k$  и  $\lambda$ :  $\lambda=1.4229918\dots$ ,  $k=0.5$  (1);  $\lambda=2$ ,  $k=0.5$  (2);  $\lambda=1.422693\dots$ ,  $k=0.4$  (3);  $\lambda=2$ ,  $k=0.4$  (4)

Рис. 2. *a* - зависимость корреляционной размерности  $d_c$  от параметра  $k$  при  $\lambda=2.0$ , *b* - фазовые портреты и их увеличенные фрагменты при следующих значениях параметра  $k$ : 0.3 (1); 0.25 (2); 0.24 (3); 0.225 (4)

переменными и справедливо для любых  $n$ , следовательно, аттрактор системы (1) при  $k=0.5$  будет лежать на прямой.

При дальнейшем увеличении параметра  $\lambda$  происходит последовательное уменьшение связности синхронного хаотического аттрактора (фрагмент 2 на рис. 1, б иллюстрирует односвязный характер), а его размерность увеличивается и достигает  $d_c=1$ . Таким образом, при введении асимметрии в случае трансверсальной суперустойчивости фрактальные свойства синхронного хаоса аналогичны симметричному случаю.

Уменьшение связи приводит к тому, что синфазные устойчивые и седловые циклы системы (1) не являются суперустойчивыми в трансверсальном направлении, а неустойчивые многообразия седловых циклов не лежат на одной прямой. Фрагмент 3 на рис. 1, б иллюстрирует критический аттрактор при  $k=0.4$ . С ростом параметра  $\lambda$  каждый элемент критического аттрактора эволюционирует в фазовом пространстве в отдельном направлении, а в итоге критический аттрактор не лежит на прямой и остается фрактальным (фрагмент 4 на рис. 1, б).

Рис. 2, а иллюстрирует зависимость корреляционной размерности синхронного хаоса от параметра связи при  $\lambda=2.0$ , а рис. 2, б - фазовые портреты аттракторов и их выделенные фрагменты. С уменьшением связи размерность становится больше 1, аттрактор не лежит на диагонали фазовой плоскости, а увеличение масштаба выявляет его сложную фрактальную структуру в виде бесконечного множества линий (фрагмент 4 на рис. 1, б). С дальнейшим уменьшением связи наблюдается расширение аттрактора в трансверсальном направлении (фрагмент 1 на рис. 2, б) и увеличение его размерности. При этом «линейчатая» структура синхронного аттрактора проявляется на более мелких масштабах. Логично предположить, что с приближением к границе синхронизации размерность аттрактора, как и второй ляпуновский показатель, будет монотонно увеличиваться.

Однако с приближением параметра  $k$  к значению 0.25 синхронный аттрактор начинает сжиматься в трансверсальном направлении (хотя второй ляпуновский показатель увеличивается), его размерность уменьшается и становится близкой к 1, но он также не лежит на прямой (фрагмент 2 на рис. 2, б). Следует отметить, что в окрестности значений  $\lambda=2.0$  и  $k=0.25$  происходят бифуркации удвоения периода седловых циклов, вложенных в синхронный хаотический аттрактор. Поэтому причиной такого сжатия может быть изменение конфигурации многообразий неустойчивых циклов. Дальнейшее уменьшение связи приводит вновь к росту корреляционной размерности и расширению аттрактора в трансверсальном направлении (фрагменты 3, 4 на рис. 2, б). С приближением к границе области синхронизации наблюдается дальнейшее расширение аттрактора, однако размерность опять уменьшается.

В итоге можно сделать следующие выводы: в симметрично связанных системах при трансверсальной суперустойчивости асимметрия (неидентичность) подсистем не оказывает влияние на размерность синхронного хаотического аттрактора, то есть размерностные характеристики аттрактора остаются такими же, как и у аттрактора изолированной подсистемы. С потерей суперустойчивости размерность аттрактора увеличивается, демонстрируя с приближением к границе синхронизации немонотонное поведение.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант N02-02-17578, молодежного гранта РАН № 23, при поддержке CRDF, REC-006.*

## Библиографический список

1. Yamada T., Fujisaka H. Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems // Prog. Theor. Phys. 1983. Vol.69. P.32.
2. Пиковский А.С. Взаимодействие странных аттракторов // Препринт № 79. ИПФ АН СССР. Горький. 1983. 21 с.
3. Pecora L.M., Carrol T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64. P.821.
4. Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V. et al. Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. World Scientific, Singapore. 1994.
5. Hasler M., Maistrenko Yu., and Popovych O. Simple example of partial synchronization of chaotic systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol.58, № 5. P. 6843.
6. Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Popovich A., and Mosekilde E. Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57, № 3. P. 2713.
7. Astakhov V., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V. Non-bifurcational mechanism of loss of chaos synchronization in coupled nonidentical systems // Phys. Lett. A. 1999. Vol. 258. P. 99.
8. Postnov Dmitry, Han Seung Kee, and Kook Hyungtae. Synchronization of diffusively coupled oscillators near the homoclinic bifurcation // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, № 3. P. 2799.
9. Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Popovych O., Mosekilde E. Desynchronization of chaos in coupled logistic maps // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, № 3. P. 2817.
10. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
11. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ. 1990. Т. 60, № 10. С.19.
12. Halsey T.S., Jensen M.H., Kadanoff L.P. et al. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // Phys.Rev. A. 1986. Vol. 33. P.1141.
13. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1, 2. С. 15.

Саратовское отделение  
ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 04.09.02

## FRactal PROPERTIES OF SYNCHRONOUS CHAOS IN COUPLED MAPS

*Ye.P. Seleznev, A.M. Zakharevich*

We investigate numerically the influence of asymmetry on synchronous chaos in the system of dissipatively coupled quadratic maps. It is shown that the synchronous chaotic attractor becomes fractal after the loss of transversal superstability in the asymmetrical system. Correlation dimension of the attractor demonstrates nonmonotonic dependence on the coupling coefficient near the synchronization boundary (at the coupling decrease).



*Селезнев Евгений Петрович* - родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990). Старший научный сотрудник Саратовского отделения института радиотехники и электроники РАН, доцент факультета нелинейных процессов СГУ. Автор и соавтор более 50 научных работ. Область научных интересов - экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических системах.



*Захаревич Андрей Михайлович* - родился в Саратове (1982). Студент 4-го курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов - нелинейная динамика радиофизических систем.