



## **ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ОТРАЖАЮЩИМ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМ «ЯДРОМ» В ЦЕНТРЕ И КОНЦЕНТРИЧЕСКИЕ СФЕРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ НА ИХ ОСНОВЕ**

*Ю.А. Зюрюкин, М.В. Павлова*

Предложено решение задачи о стоячих сферических электромагнитных волнах в изотропном пространстве, свободном от источников, в предположении осевой симметрии, при наличии в центре идеально проводящего сферического «ядра». Получены аналитические выражения, определяющие компоненты стоячих сферических Е- и Н-волн, а также выявлена структура линий напряженности полей для различных типов колебаний. Представлено решение задачи о нахождении собственных функций и значений концентрического сферического резонатора.

### **Введение**

В рамках работ [1,2] рассмотрена в новой постановке задача о распространении сферических электромагнитных волн в пространстве, свободном от источников для изотропной среды в предположении осевой симметрии. При этом в качестве исходных соотношений использовались однородные уравнения Максвелла относительно напряженностей электрических и магнитных полей, записанные в сферической системе координат. В итоге получены детализированные аналитические выражения, основанные на строгом решении системы исходных уравнений, для всех компонент полей сходящихся и расходящихся сферических Е- и Н-волн. Описанный подход к решению поставленной задачи позволил авторам непосредственно, минуя принятый в электродинамике для анализа сферических волн вектор Герца [3,4], получить аналитические выражения, которые определяют собой в математическом плане базис сферических функций, отражающих движущиеся к центру или от центра электромагнитные волны.

Целью настоящей работы является, во-первых, решение задачи о стоячих сферических электромагнитных волнах в пространстве, свободном от источников, в случае изотропной среды, в предположении осевой симметрии, при наличии идеально проводящей, находящейся в центре сферы, называемой далее «ядром». Процесс распространения сферических электромагнитных волн рассматривается здесь как переход сходящейся волны в расходящуюся при отражении от «ядра» в центре. Во-вторых, работа преследует цель рассмотреть объёмный резонатор,

образованный проводящей сферой, охватывающей полость резонатора с идеально проводящим сферическим «ядром» в центре, и рассчитать его собственные значения, что ранее никем сделано не было.

## 1. Стоячие сферические электромагнитные волны

Представим сферическую электромагнитную волну, набегающую извне к центру, в котором находится «ядро» в виде идеально проводящей сферы радиуса  $b$ , и отражающуюся от поверхности этого «ядра». При этом процесс отражения рассмотрим как переход сходящейся электромагнитной волны в расходящуюся волну, приводящий к образованию стоячей сферической волны.

В качестве исходных соотношений используем выражения для компонент полей сходящихся и расходящихся сферических Е- и Н-волн, полученные в работах [1,2]. Компоненты Е-волны для  $n=1$  ( $n$  характеризует число лепестков угловой диаграммы амплитудного распределения сферических волн по широте) имеют вид

$$E_{\varphi}^{\pm} = E_{\varphi}^{0\pm}(1 \pm j/(kr)) \exp(j(\omega t \pm kr)) / (kr) \sin \theta, \quad (1)$$

$$H_r^{\pm} = 2jkE_{\varphi}^{0\pm} / (\omega \mu_0 \mu) (1 \pm j/(kr)) \exp(j(\omega t \pm kr)) / (kr)^2 \cos \theta, \quad (2)$$

$$H_{\theta}^{\pm} = \pm kE_{\varphi}^{0\pm} / (\omega \mu_0 \mu) (1 \pm j/(kr) - 1/(kr)^2) \exp(j(\omega t \pm kr)) / (kr) \sin \theta, \quad (3)$$

где  $E_{\varphi}^{0+}$  - постоянная амплитуда, независимая от радиальной и угловой координат, соответствующая сходящейся Е-волне;  $E_{\varphi}^{0-}$  - постоянная амплитуда, соответствующая расходящейся Е-волне. Соответственно используются либо верхние, либо нижние знаки «+» или «-».

Компоненты Н-волны для  $n=1$  имеют следующий вид:

$$H_{\varphi}^{\pm} = H_{\varphi}^{0\pm}(1 \pm j/(kr)) \exp(j(\omega t \pm kr)) / (kr) \sin \theta, \quad (4)$$

$$E_r^{\pm} = -2jkH_{\varphi}^{0\pm} / (\omega \epsilon_0 \epsilon) (1 \pm j/(kr)) \exp(j(\omega t \pm kr)) / (kr)^2 \cos \theta, \quad (5)$$

$$E_{\theta}^{\pm} = \mp kH_{\varphi}^{0\pm} / (\omega \epsilon_0 \epsilon) (1 \pm j/(kr) - 1/(kr)^2) \exp(j(\omega t \pm kr)) / (kr) \sin \theta. \quad (6)$$

Из граничного условия Леонтовича, выполняемого на поверхности «ядра», найдём соотношение, связывающее независимые амплитуды сходящейся и расходящейся сферических электромагнитных волн. При  $r=b$  должно выполняться условие для Е-волны

$$E_{\varphi}^{+} + E_{\varphi}^{-} = 0 \quad (7)$$

и, соответственно, для Н-волны

$$E_{\theta}^{+} + E_{\theta}^{-} = 0. \quad (8)$$

Пусть  $E_{\varphi}^{0+} = E_{\varphi}^{0-}$ . Подставляя (1) в условие (7) для Е-волны, получим

$$E_{\varphi}^{0-} = -E_{\varphi}^{0+}(kb+j)/(kb-j) \exp(2jkb), \quad (9)$$

где  $E_{\varphi}^{0-}$  - объединённое условное обозначение для Е-типа волн. Используя экспоненциальную форму записи комплексных чисел

$$kb + j = V \exp(j\varphi(kb)), \quad kb - j = V \exp(-j\varphi(kb)),$$

где  $\varphi(kb) = \arctg\{1/(kb)\}$ , получаем соотношение (9) в следующем виде:

$$E_{\varphi}^{0-} = -E_{\varphi}^{0+} \exp(2jb_E), \quad (10)$$

где

$$b_E = \varphi(kb) + kb = \arctg\{1/kb\} + kb \quad (11)$$

есть постоянная, характерная для Е-волны в случае  $n=1$ .

Аналогичные преобразования сделаем для Н-волны. Обозначив  $H_{\varphi}^{0+}=H_{\varphi}^{0-}$  и подставив (6) в условие (8) для Н-волны, получим:

$$H_{\varphi}^{0-} = H_{\varphi}^{0+} [(kb)^2 - 1 + j(kb)] / [(kb)^2 - 1 - j(kb)] \exp(2jkb), \quad (12)$$

где  $H_{\varphi}^{0-}$  - объединённое условное обозначение амплитуды для Н-волн. Пусть

$$(kb)^2 - 1 + j(kb) = B \exp(j\varphi(kb)), \quad (kb)^2 - 1 - j(kb) = B \exp(-j\varphi(kb)),$$

$$\varphi(kb) = \arctg\{kb / [(kb)^2 - 1]\}.$$

Тогда соотношение (12) примет вид

$$H_{\varphi}^{0-} = H_{\varphi}^{0+} \exp(2jb_H), \quad (13)$$

где

$$b_H = \varphi(kb) + kb = \arctg\{kb / [(kb)^2 - 1]\} + kb \quad (14)$$

есть фазовая постоянная, характерная для Н-волны в случае  $n=1$ .

Далее согласно условиям (10) и (13) представим компоненты полей стоячих сферических Е- и Н-волн при наличии «ядра» в центре в случае  $n=1$ . Получим:

а) для стоячей сферической Е-волны

$$E_{\varphi} = 2jE_{\varphi}^{0+} \text{Asin}(kr + \varphi(kr) - b_E) / (kr) \sin\theta \exp(j(\omega t + b_E)), \quad (15)$$

$$H_r = -4kE_{\varphi}^{0+} / (\omega\mu_0\mu) \text{Asin}(kr + \varphi(kr) - b_E) / (kr)^2 \cos\theta \exp(j(\omega t + b_E)), \quad (16)$$

$$H_{\theta} = 2kE_{\varphi}^{0+} / (\omega\mu_0\mu) D \cos(kr + \psi(kr) - b_E) / (kr) \sin\theta \exp(j(\omega t + b_E)); \quad (17)$$

б) для стоячей сферической Н-волны

$$H_{\varphi} = 2H_{\varphi}^{0+} \text{Acos}(kr + \varphi(kr) - b_H) / (kr) \sin\theta \exp(j(\omega t + b_H)), \quad (18)$$

$$E_r = -4jkH_{\varphi}^{0+} / (\omega\varepsilon_0\varepsilon) \text{Asin}(kr + \varphi(kr) - b_H) / (kr)^2 \cos\theta \exp(j(\omega t + b_H)), \quad (19)$$

$$E_{\theta} = -2jkH_{\varphi}^{0+} / (\omega\varepsilon_0\varepsilon) D \cos(kr + \psi(kr) - b_H) / (kr) \sin\theta \exp(j(\omega t + b_H)). \quad (20)$$

Здесь

$$A = ((kr)^2 + 1)^{1/2} / (kr), \quad \varphi(kr) = \arctg\{1 / (kr)\},$$

$$D = ((kr)^4 - (kr)^2 + 1)^{1/2} / (kr)^2, \quad \psi(kr) = \arctg\{kr / ((kr)^2 - 1)\}.$$

## 2. Структура полей стоячих сферических электромагнитных волн

Особый интерес представляет построение картин линий напряженности электрических и магнитных полей для разных типов колебаний. В общем виде

уравнение электрических силовых линий в сферической системе координат можно записать как

$$dr/E_r = rd\theta/E_\theta = r\sin\theta d\varphi/E_\varphi \quad (21)$$

и, соответственно, уравнение магнитных линий есть

$$dr/H_r = rd\theta/H_\theta = r\sin\theta d\varphi/H_\varphi \quad (22)$$

Получим частные уравнения силовых линий с учётом выражений для соответствующих компонент полей для Е- и Н-типов колебаний при  $n=1$ .

**а. Е-тип колебаний.** Для этого типа колебаний уравнение (22) примет вид

$$H_\theta dr = rH_r d\theta \quad (23)$$

В результате подстановки выражений (16), (17) для компонент  $H_r$  и  $H_\theta$  в уравнение (23) и последующего преобразования в соответствии с формулами тригонометрии

$$\sin(\text{arctg}(x)) = x/(1+x^2)^{1/2}, \quad \cos(\text{arctg}(x)) = 1/(1+x^2)^{1/2},$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{-(kr)^2 \cos(kr-b_E) + kr \sin(kr-b_E) + \cos(kr-b_E)}{(kr)^2 \sin(kr-b_E) + krcos(kr-b_E)} d(kr) = 2\text{ctg}\theta d\theta \quad (24)$$

Найдём общее решение данного дифференциального уравнения, взяв неопределённый интеграл соответственно от левой и правой частей уравнения с помощью программы «Mathematics 5.0». После несложных преобразований получим уравнение магнитных силовых линий для Е-волны в присутствии «ядра» в центре также для  $n=1$  в виде

$$|\sin(kr-b_E) + \cos(kr-b_E)/(kr)| \sin^2\theta = C, \quad (25)$$

где  $C$  - постоянная интегрирования, определяющая набор силовых линий и задаваемая произвольным образом;  $b_E$  рассчитывается согласно формуле (11).

**б. Н-тип колебаний.** Дифференциальное уравнение, описывающее электрические силовые линии, принимает в этом случае вид

$$\frac{(kr)^2 \sin(kr-b_H) + krcos(kr-b_H) - \sin(kr-b_H)}{(kr)^2 \cos(kr-b_H) - krsin(kr-b_H)} d(kr) = 2\text{ctg}\theta d\theta \quad (26)$$

Общим решением этого дифференциального уравнения является выражение

$$|\cos(kr-b_H) - \sin(kr-b_H)/(kr)| \sin^2\theta = C, \quad (27)$$

где  $b_H$  рассчитывается согласно формуле (14). Выражение (27) представляет собой уравнение электрических силовых линий для Н-типа стоячей волны в присутствии «ядра» в центре для  $n=1$ .

Таким образом, полученные уравнения силовых линий позволяют определить структуру электромагнитного поля для разных типов колебаний при наличии «ядра» в центре и делают возможным построение набора силовых линий этих полей в меридианных плоскостях. Силовыми линиями электрического поля для колебаний Е-типа и магнитного для колебаний Н-типа являются концентрические окружности, лежащие в плоскостях, параллельных экваториальной.

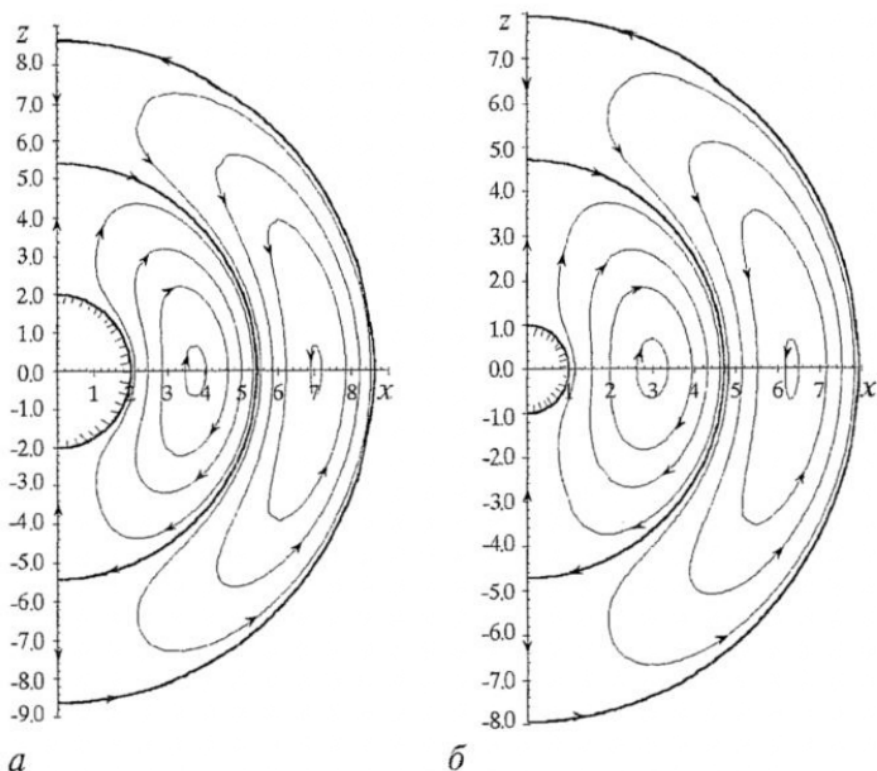


Рис. 1. Структура магнитного поля стоячей сферической E-волны в меридианной плоскости при наличии «ядра» для случая  $n=1$  и различных значений безразмерного радиуса «ядра»  $kb$ : а - 2; б - 1

В соответствии с результатами численного решения уравнений (25) и (27) проведено построение картин силовых линий, отражающих структуру полей стоячих сферических электромагнитных волн при  $n=1$  для различных значений радиуса «ядра», находящегося в центре.

На рис. 1, а изображены вихри магнитных линий для E-типа колебаний при  $b_E=2.4636$ . Аналогичная картина магнитных линий показана на рис. 1, б для  $b_E=1.7854$ . Магнитные линии являются замкнутыми и вблизи «ядра» огибают его сферическую поверхность.

На рис. 2, а показан набор электрических силовых линий для H-типа колебаний при  $b_H=2.588$ . Электрические силовые линии вблизи «ядра» подходят по нормали к его поверхности, что подтверждает выполнение граничного условия. Рис. 2, б также отображает структуру электрического поля H-типа стоячей волны с «ядром» в центре системы координат при  $b_H=2.57$ . Заметим, что в окрестности «ядра» общая картина силовых линий несколько искажается при уменьшении размера «ядра», и отдельные силовые линии электрического поля становятся замкнутыми.

Весьма интересным является предельный переход, когда идеально проводящее «ядро», находящееся в центре, устремляется в точку, то есть когда  $kb \rightarrow 0$ . Анализ показывает, что в этом случае картины магнитных силовых линий для E-типа и картины электрических силовых линий для H-типа совпадают. На рис. 3 в правой полуплоскости изображён набор силовых линий в виде вихрей, являющихся магнитными для E-типа стоячей волны и электрическими для H-волны, при условии нахождения «ядра», асимптотически стремящегося к нулю, в центре рассматриваемой системы координат для  $n=1$ . Слева представлены кривые

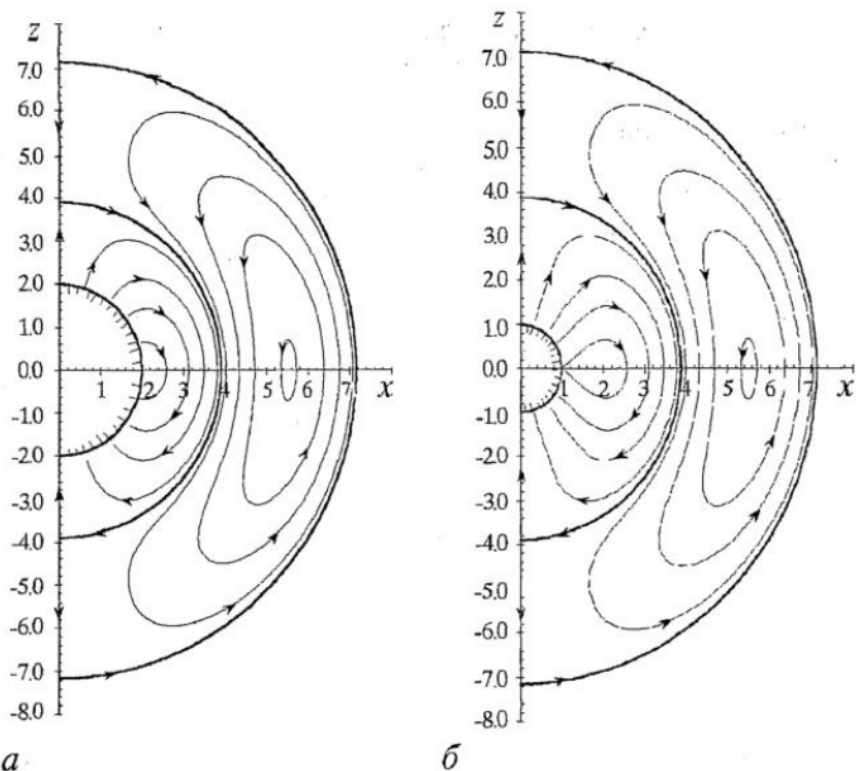


Рис. 2. Структура электрического поля стоячей сферической Н-волны в меридианной плоскости при наличии «ядра» для случая  $n=1$  и различных значений  $kb$ : а - 2; б - 1

зависимости нормированных амплитуд компонент стоячих Е- и Н-типов колебаний от нормированной координаты  $kr$  при постоянном значении  $\theta$ .

Амплитуды полей и в этом случае принимают конечные значения в центре. Именно эта ситуация отмечена в работах [3,4] как единственно возможная реальная ситуация, но без введения понятия устремляющегося в точку идеально проводящего «ядра». Как видно из нашего рассмотрения, для её реализации требование присутствия «ядра», хотя и с устремляющимися к нулю размерами, обязательно. При этом изображённая на рис. 3 структура полей сформировалась как результат отражения сходящейся волны от «ядра». Эти особенности авторы работ [3,4] принципиально не учли.

Отметим, что подобным образом нами были рассчитаны и построены соответствующие картины силовых линий для  $n=2, n=3$ . Для этих случаев имело место деление вихрей по широте в соответствии со значением  $n$ .

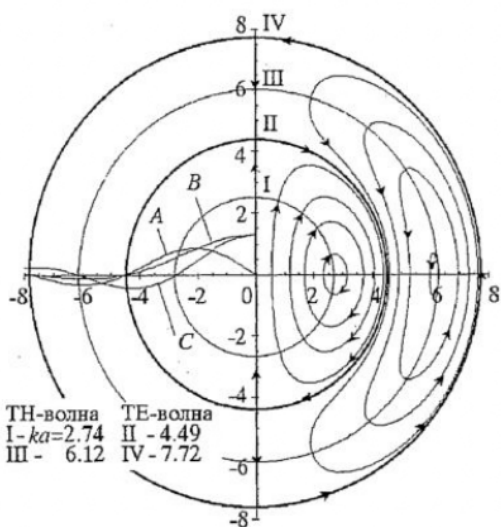


Рис. 3. Структура полей стоячей сферической электромагнитной волны при наличии «ядра» для  $n=1$  при  $kb \rightarrow 0$ . Здесь А -  $E_\phi$  или  $H_\phi$ ; В -  $H_r$  или  $E_r$ ; С -  $H_\theta$  или  $E_\theta$ ; а - радиус внешней сферы

### 3. Концентрические сферические резонаторы с осевой симметрией типов колебаний

Понятие «электрической стенки», принятое в электродинамике, позволяет перейти к анализу так называемого концентрического сферического резонатора с осевой симметрией типов колебаний. Рассмотрим объёмный резонатор, представляющий собой шаровую полость с находящимся в центре «ядром» в виде идеально проводящей сферы радиуса  $b$  и ограниченную извне идеально проводящей сферой радиуса  $a$ .

Найдем собственные значения и собственные функции этого резонатора, позволяющие определить наборы его резонансных частот и структуры полей, им соответствующие. В полости резонатора возможно существование лишь таких полей, которые удовлетворяют граничному условию Леонтовича

$$\text{для E-волны} \quad E_{\varphi}(kr)|_{r=a} = 0, \quad (28)$$

$$\text{для H-волны} \quad E_{\theta}(kr)|_{r=a} = 0. \quad (29)$$

**а.** Пусть в концентрическом сферическом резонаторе осуществляются колебания E-типа при  $n=1$ . Подставив соотношение (15) для  $E_{\varphi}$  в условие (28), нетрудно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$\text{tg}(ka - b_E) = -1/(ka). \quad (30)$$

После преобразования (30) с учётом формулы (11), определяющей  $b_E$ , и в соответствии с тригонометрическими соотношениям

$$\text{tg}(\text{arctg}x) = x, \quad \text{tg}(x+y) = (\text{tg}x + \text{tg}y)/(1 - \text{tg}x\text{tg}y)$$

получим следующий вид дисперсионного уравнения:

$$[kbtg(ka-kb) - 1]/[kb + \text{tg}(ka-kb)] = -1/(ka), \quad (31)$$

численное решение которого позволяет определить  $ka$  при заданном значении  $kb$ .

**б.** Пусть в концентрическом сферическом резонаторе осуществляются H-колебания. Дисперсионное уравнение для случая  $n=1$

$$\text{tg}(ka - b_H) = ka/[1-(ka)^2] \quad (32)$$

после соответствующих преобразований примет вид

$$\{[1-(kb)^2]\text{tg}(ka-kb) + kb\}/\{[1-(kb)^2] - kbtg(ka-kb)\} = ka/[1 - (ka)^2]. \quad (33)$$

В табл. 1 представлены собственные значения  $ka$  для  $n=1$ , являющиеся решениями полученных дисперсионных уравнений для E- и H-типов колебаний, рассчитанные для сферического резонатора с «ядром» при  $kb=2$  и  $kb=1$ .

Таблица 1

$ka$			
E- тип		H- тип	
$kb=1$	$kb=2$	$kb=1$	$kb=2$
4.7181	5.4229	1.9717	5.5453
7.9434	8.6315	5.5275	8.756
11.1205	11.8039	8.7385	11.9286
14.2812	14.9633	11.9112	15.0879
17.4361	18.1165	15.0706	18.241

Подобные представленным расчеты были проведены нами также для  $n=2$  и  $n=3$ , хотя имеется принципиальная возможность анализа ситуации и с большими значениями  $n$ . В целях сокращения объема статьи данные этих расчетов здесь не приведены.

### Заключение

Таким образом, получены аналитические выражения, определяющие компоненты стоячих сферических Е- и Н-волн, а также уравнения силовых линий для различных типов колебаний при наличии «ядра» в центре. Численное решение этих уравнений позволило построить и представить графически картины силовых линий, определяющих соответствующие им структуры полей стоячих сферических Е- и Н-волн, для различных значений радиуса «ядра». Проведен анализ поведения полей вблизи идеально проводящего «ядра» при изменении его радиуса от конечного значения до бесконечно малого. Решена задача о нахождении собственных функций и собственных значений концентрического сферического резонатора, что позволило определить наборы его резонансных частот и структуры полей, им соответствующие. Все полученные решения обладают принципиальной новизной.

### Библиографический список

1. Павлова М.В., Зюрюкин Ю.А. Анализ осесимметричных сферических электромагнитных волн в изотропной среде // Проблемы управления и связи: Сб. трудов Международной научно-технической конференции. Саратов: СГТУ, 2000. С. 91.
2. Zyuryukin Yu. A., Pavlova Mariya V. Axially symmetric spherical electromagnetic waves in isotropic medium // «Coherent optics of ordered and random media». Saratov fall meeting, 2000. Proc. SPIE. 2000. Vol. 4242. P. 53.
3. Семёнов А.А. Теория электромагнитных волн. М.: Изд-во МГУ, 1968. 194 с.
4. Гуревич Л.Г. Полые резонаторы и волноводы. М.: Сов. радио, 1952. 75с.

*Саратовский государственный  
технический университет*

*Поступила в редакцию 3.09.2002*

### AXIALLY SYMMETRIC SPHERICAL ELECTROMAGNETIC WAVES IN ISOTROPIC SPACE WITH IDEALLY CONDUCTING REFLECTING «CORE» AT THE CENTER AND CONCENTRIC SPHERICAL CAVITIES ON THEIR BASIS

*Yu.A. Zyuryukin, M.V. Pavlova*

Decision of the problem of standing spherical electromagnetic waves in isotropic space free from the sources in the assumption of axially symmetry and in the presence of the ideally conducting reflecting «core» at the center is suggested. Analytical expressions, permitting to determine the components for standing spherical E- and H- waves, are obtained and the structures of the force field strengths for various modes are exposed. Decision of the task of the finding of eigenfunctions and eigenvalues for concentric spherical cavities are presented also.





*Зюрюкин Юрий Анатольевич* - родился в 1940 году, окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника» (1962). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1967) и доктора (1987) по специальности «Радиофизика». Профессор (1989), чл.-корр. Российской академии естественных наук и член Российского акустического общества (1994). С 2000 года является членом Международного института электрорадионженеров (IEEE). С 1985 года по настоящее время - заведующий кафедрой физики Саратовского государственного технического университета. Является соавтором 17 изобретений СССР. Общее число научных публикаций свыше 170.

Основные научные интересы - электродинамика и исследование физических принципов создания элементной базы СВЧ-акустооптоэлектроники и акустооптики, технология изготовления их базовых элементов, а также разработка принципов построения устройств обработки информации на основе использования СВЧ электромагнитных и упругих волн.



*Павлова Мария Валентиновна* - родилась в 1977 году, окончила физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика» (1999). Аспирант кафедры физики Саратовского государственного технического университета. Имеет 7 публикаций по материалам предполагаемой кандидатской диссертации. Основные научные интересы - электродинамика СВЧ.