



УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ И СКЕЙЛИНГ В ОТОБРАЖЕНИИ ОКРУЖНОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А.Ю. Жалнин, С.П. Кузнецов

Исследуются свойства скейлинга, имеющие место в окрестности критической точки отображения окружности с числом вращения «золотое среднее» (критическая точка GM) при наличии дополнительного внешнего периодического воздействия на систему. Рассматриваются возмущения неподвижной точки уравнения ренормгруппы Фейгенбаума - Каданова - Шенкера, отвечающие включению периодического воздействия. Показано, что в зависимости от частоты воздействия могут реализоваться два типа скейлинга - периодическое повторение конфигурации областей при преобразовании подобия (скейлинг P-типа) и квазипериодическое поведение (скейлинг Q-типа). Свойства самоподобия окрестности критической точки в пространстве параметров иллюстрируются построенными на компьютере картами ляпуновского показателя на плоскости параметров.

Введение

Известно, что возникновению хаотической динамики в многомерных нелинейных системах часто предшествует несколько бифуркаций рождения колебательных составляющих, отношение частот которых зависит от параметров задачи. Когда соотношение частот иррационально, в системе реализуются квазипериодические режимы. В фазовом пространстве им соответствуют аттракторы в виде торов, размерность которых определяется количеством основных частотных компонент. Лучшее всего исследована задача о переходе к хаосу через разрушение регулярного квазипериодического движения на двумерном торе [1-9], что отвечает наличию в спектре двух основных частот. Простейшей моделью для анализа этой ситуации служит одномерное отображение окружности. Одна из конкретных задач, в которых оно естественным образом возникает, это задача о синхронизации колебаний автогенератора периодической последовательностью коротких импульсов [8, 9]. В биологическом контексте отображение окружности привлекается для теоретического изучения вопросов, связанных с ритмами сердечной деятельности [10].

Мощным методом исследования сложной динамики на пороге перехода к хаосу является, как известно, ренормгрупповой анализ (РГ). Применительно к задаче о разрушении квазипериодического режима в автономном отображении окружности он был развит в работах Фейгенбаума, Каданова и Шенкера [2], а также Остланда, Рэнда и др. [3, 4].

Для детального теоретического исследования традиционно выбирают соотношение частот, заданное иррациональным числом $\omega = (5^{1/2} - 1)/2$ - «золотым средним». Точку в пространстве параметров, в которой соответствующий квазипериодический режим разрушается, будем для краткости именовать критической точкой GM (от слов «golden mean» - золотое среднее) [8, 9]. Как можно показать, в любой сколь угодно малой окрестности этой точки присутствуют периодические, квазипериодические и хаотические режимы. Известно, что критическая точка GM имеет коразмерность 2, то есть исчерпывающий анализ динамики в ее окрестности достигается в рамках двухпараметрического анализа [1-9].

В настоящей работе мы обратимся к достаточно естественной модификации классической модели и рассмотрим отображение окружности под внешним периодическим воздействием. Оно описывает, например, динамику автогенератора при воздействии последовательности импульсов, если она модулирована соответствующим образом. В более широком контексте к этой задаче можно прийти, исследуя определенные ситуации перехода к хаосу через разрушение колебательного режима с тремя основными частотами.

Нашей главной задачей будет исследование свойств скейлинга в окрестности критической точки GM в присутствии периодического внешнего воздействия. Рассматривая возмущения неподвижной точки уравнения ренормгруппы Фейгенбаума - Каданова - Шенкера, отвечающие включению периодического воздействия, мы покажем, что в зависимости от частоты внешнего воздействия могут возникать два типа скейлинга, аналогичные тем, которые были описаны ранее для систем, демонстрирующих удвоения периода [11]. В одном случае это периодическое повторение конфигурации областей при преобразовании подобия (скейлинг P-типа), в другом - квазипериодическое поведение при масштабном преобразовании (скейлинг Q-типа).

Для иллюстрации свойств самоподобия окрестности критической точки в пространстве параметров мы приводим и сопоставляем карты ляпуновских показателей, пересчитанные с учетом констант скейлинга, полученных из анализа ренормгруппы.

Автогенератор под импульсным воздействием и отображение окружности

В качестве исходного примера обратимся к задаче о воздействии последовательности коротких импульсов на автоколебательную систему.

Предположим, что в фазовом пространстве автономной системы имеется предельный цикл, в окрестности которого динамика описывается уравнениями

$$\dot{R} = -\mu R, \tag{1}$$

$$\dot{\theta} = \omega + \eta R, \tag{2}$$

где R - отклонение амплитуды от предельного цикла; μ - коэффициент, характеризующий скорость релаксации к предельному циклу; величина θ характеризует фазу движения изображающей точки на цикле, а ω - частоту автоколебаний. Константа η характеризует степень неизохронности колебаний в системе.

Пусть теперь на систему действует внешняя сила в виде последовательности импульсов. Каждый очередной толчок выводит систему из установившегося режима, после чего амплитуда вновь возвращается к предельному циклу. В результате действия n -го импульса возникает добавка к амплитуде, являющаяся периодической функцией фазы (простейшее предположение состоит в том, что это синус):

$$\Delta R_n = A_n \sin 2\pi\theta_n,$$

где A_n - параметр, характеризующий интенсивность данного импульса, а θ_n - фаза колебаний в момент толчка. Динамика системы в интервале времени между импульсами описывается уравнениями

$$R(t) = (R_n + A_n \sin 2\pi\theta_n) \exp(-\mu t), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_n + \omega t + \eta \int_0^t (R_n + A_n \sin 2\pi\theta_n) \exp(-\mu \tau) d\tau = \\ &= \theta_n + \omega t + \eta \mu^{-1} (1 - \exp(-\mu t)) (R_n + A_n \sin 2\pi\theta_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Если релаксация к предельному циклу происходит так быстро, что возмущение амплитуды успевает затухнуть практически полностью за интервал времени T_n между n -м и $(n+1)$ -м импульсами ($\exp(-\mu T_n) \rightarrow 0$), то для фазы к моменту очередного импульса получаем

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega T_n + \eta \mu^{-1} A_n \sin 2\pi\theta_n.$$

Вводя обозначения $r_n = \omega T_n$ и $K_n / (2\pi) = -\eta \mu^{-1} A_n$, приводим отображение в следующей форме:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + r_n - (K_n / (2\pi)) \sin 2\pi\theta_n \pmod{1}. \quad (5)$$

Значок модуля указывает, что значения фазовой переменной θ , отличающиеся на целое число, считаются эквивалентными.

В частном случае, когда внешнее воздействие представляет собой последовательность импульсов одинаковой амплитуды, разделенных равными интервалами времени (то есть $r_n = r$ и $K_n = K$), соотношение (5) превращается в автономное отображение окружности [8, 9]. Нас, однако, интересует более сложный случай, когда параметры импульсов изменяются от шага к шагу. Можно рассмотреть, например, два частных варианта: (i) - последовательные импульсы имеют периодическим образом модулированную амплитуду, но равноудалены во времени, и (ii) - все импульсы имеют одинаковую амплитуду, но модулируется интервал между импульсами. В первом случае в отображении (5) будет изменяться в зависимости от дискретного времени параметр K , во втором - параметр r . Мы предпочитаем сконцентрировать внимание на второй ситуации, которая приводит к задаче об аддитивном периодическом воздействии на отображение окружности. Если задать модуляцию параметра в виде

$$r_n = r + \varepsilon \cos(2\pi\Omega n + \phi),$$

то отображение (5) принимает вид

$$\theta_{n+1} = \theta_n + r - (K_n / (2\pi)) \sin 2\pi\theta_n + \varepsilon \cos(2\pi\Omega n + \phi). \quad (6)$$

где ε , Ω и ϕ есть, соответственно, амплитуда, частота и фаза модуляции параметра.

РГ-анализ критической точки GM

Как известно, на плоскости параметров автономного отображения окружности, то есть при $\varepsilon=0$ в уравнении (6), критическая точка GM имеет координаты [2-4, 8, 9]

$$(r, K)_{GM} = (0.606661063470112\dots, 1). \quad (7)$$

РГ-анализ динамики в этой точке развит в работах [2-4]. Поскольку мы собираемся исследовать свойства скейлинга в окрестности точки ГМ в присутствии внешнего периодического воздействия, необходимо предпринять соответствующую модификацию РГ-анализа. Это можно сделать по аналогии с работами [11-13], где такого рода исследование было проведено для задачи о периодическом воздействии на отображение, демонстрирующее переход к хаосу через удвоения периода по Фейгенбауму.

Перепишем отображение окружности с внешним воздействием (6) в следующем виде:

$$x_{n+1} = \tilde{f}_n(x_n) = f(x_n) + \gamma h_0(x_n) + \varepsilon [Z_0(x_n) \exp(2\pi i \Omega n + i\phi) + \text{с.с.}], \quad (8)$$

где $f(x) = x + r_{\text{GM}}^{-1} / (2\pi) \sin(2\pi x)$ - функция, задающая вид автономного отображения в критической точке ГМ; член $\gamma h_0(x)$ отвечает за сдвиг параметров относительно критической точки; функция $Z_0(x)$ определяется видом внешнего воздействия на систему; «с.с.» означает комплексно-сопряженный член. Сравнивая формулы (6) и (8), видим, что для рассматриваемого нами исходного отображения следует положить $Z_0(x) = 1/2$. Поскольку нас интересует динамика только в окрестности точки ГМ, параметры γ и ε будем считать малыми. Частоту внешнего воздействия Ω полагаем заданной некоторым рациональным числом: $\Omega = p/q$, где p и q целые. Соответственно, период воздействия равен q .

Основная идея РГ-анализа в работах Фейгенбаума - Каданова - Шенкера и Рэнда с соавторами состоит в следующем. «Золотое среднее» может быть аппроксимировано последовательностью подходящих дробей, определяемых отношениями чисел Фибоначчи,

$$\omega = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k, \quad \omega_k = F_{k-1} / F_k, \quad \text{где } F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \dots, F_{k+1} = F_k + F_{k-1}.$$

Введем обозначение $\hat{F}_{k,m}$ для F_k -кратной композиции отображений (8), начиная с шага $n = F_m$

$$\hat{F}_{k,m} x = \tilde{f}_{F_m+F_{k-1}}(\tilde{f}_{F_m+F_{k-2}}(\tilde{f}_{F_m+F_{k-3}}(\dots \tilde{f}_{F_m}(x) \dots))) - F_{k-1}.$$

(Подчеркнем, что задающая исходное отображение функция зависит от дискретного времени, так что нет инвариантности относительно сдвига по индексу m). Далее, оператор эволюции за F_{k+1} итераций представим в виде суперпозиции операторов за F_k и F_{k-1} итераций, то есть

$$\hat{F}_{k+1,0} x = \hat{F}_{k-1,k} \circ \hat{F}_{k,0} x.$$

Стартуя с $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$, определим соответствующие операторы как

$$\hat{F}_{2,0} x = f_2(x) + \gamma h_2(x) + [\varepsilon Z_2(x) \exp(i\phi) + \text{с.с.}],$$

$$\hat{F}_{1,2} x = f_1(x) + \gamma h_1(x) + [\varepsilon Z_1(x) \exp(2\pi i \Omega F_2 + i\phi) + \text{с.с.}].$$

Здесь следует положить $f_{1,2}(x) = f(x)$, $h_{1,2}(x) = h_0(x)$, $Z_{1,2}(x) = Z_0(x)$. Оператор $\hat{F}_{3,0}$ может быть представлен в виде композиции: $\hat{F}_{3,0} = \hat{F}_{1,2} \circ \hat{F}_{2,0}$. Тогда можно записать:

$$x_{F_3} = \hat{F}_{3,0} x = f_1(f_2(x)) + \gamma [f'_1(f_2(x)) h_2(x) + h_1(f_2(x))] + \\ + \varepsilon \{ \exp(i\phi) [f'_1(f_2(x)) Z_2(x) + Z_1(f_2(x)) \exp(2\pi i \Omega F_2)] + \text{с.с.} \}.$$

Последний оператор приводится к виду

$$\hat{F}_{3,0}x = f_3(x) + \gamma h_3(x) + \varepsilon [Z_3(x) \exp(i\phi) + \text{с.с.}], \quad (9)$$

где

$$f_3(x) = f_1(f_2(x)), \quad (10)$$

$$h_3(x) = f'_1(f_2(x))h_2(x) + h_1(f_2(x)), \quad (11)$$

$$Z_3(x) = f'_1(f_2(x))Z_2(x) + Z_1(f_2(x)) \exp(2\pi i \Omega F_2). \quad (12)$$

Введем новую переменную $X = A_m x$, отличающуюся от старой масштабом на фактор A_m , который выбирается как $A_m = 1/f_m(0)$, и определим перенормированные функции

$$f_m(x) = g_m(A_m x)/A_m, \quad h_m(x) = \varphi_m(A_m x)/A_m, \quad Z_m(x) = \psi_m(A_m x)/A_m.$$

Введем также для удобства фазовую переменную $w_k = 2\pi \Omega F_k$, которую в дальнейшем условимся называть *перенормируемой фазой*. Тогда система уравнений (9)-(12) может быть переписана в виде

$$\hat{F}_{3,0}X = g_3(X) + \gamma \varphi_3(X) + \varepsilon [\psi_3(X) \exp(i\phi) + \text{с.с.}], \quad (13)$$

$$g_3(X) = \alpha_3 \alpha_2 g_1(\alpha_2^{-1} g_2(X/\alpha_3)), \quad (14)$$

$$\varphi_3(X) = \alpha_3 g'_1(\alpha_2^{-1} g_2(X/\alpha_3)) \varphi_2(X/\alpha_3) + \alpha_3 \alpha_2 \varphi_1(\alpha_2^{-1} g_2(X/\alpha_3)), \quad (15)$$

$$\psi_3(X) = \alpha_3 g'_1(\alpha_2^{-1} g_2(X/\alpha_3)) \psi_2(X/\alpha_3) + \alpha_3 \alpha_2 \psi_1(\alpha_2^{-1} g_2(X/\alpha_3)) \exp(iw_2), \quad (16)$$

$$w_3 = w_2/(F_2/F_3), \quad (17)$$

где

$$\alpha_{m+1} = A_{m+1}/A_m = 1/[\alpha_m g_{m-1}(\alpha_m^{-1} g_m(0))].$$

Как видим, новый набор $\{g_3, \varphi_3, \psi_3, w_3\}$, определяющий оператор эволюции $\hat{F}_{3,0}$, выражается посредством определенных соотношений через два предыдущих набора $\{g_1, \varphi_1, \psi_1, w_1\}$ и $\{g_2, \varphi_2, \psi_2, w_2\}$. Повторяя аналогичные рассуждения снова и снова, можно построить последовательность операторов эволюции $\hat{F}_{k,0}$, заданных наборами $\{g_k, \varphi_k, \psi_k, w_k\}$.

Согласно результатам работ [2-4] (см. также [8, 9]), последовательность функций g_k сходится к универсальной функции $g(X)$, являющейся решением функционального уравнения

$$g(X) = \alpha^2 g(\alpha^{-1} g(X/\alpha)), \quad (18)$$

где

$$\alpha = -1.28857455395436\dots$$

есть универсальная константа, являющаяся пределом последовательности коэффициентов перенормировки α_k .

Последовательность функций φ_k ведет себя как

$$\varphi_k(X) = \sum_i (\delta_i)^k \chi_i(X), \quad (19)$$

где δ_i и χ_i - собственные числа и функции, полученные из решения уравнения

$$\delta^2 \chi(X) = \delta \alpha \cdot g'(\alpha^{-1} g(X/\alpha)) \chi(X/\alpha) + \alpha^2 \chi(\alpha^{-1} g(X/\alpha)).$$

С точки зрения асимптотического поведения (при больших k), из всего спектра собственных значений существенны только два:

$$\delta_1 = -2.83361065589116... \quad \text{и} \quad \delta_2 = \alpha^2 = 1.66042438109870....$$

Они и отвечают за двухпараметрический скейлинг структуры языков Арнольда на плоскости (r, K) автономного отображения [1-9].

Обратимся теперь к новой части РГ-анализа, к уравнениям (16) и (17). Интересуясь асимптотическим поведением решения, мы можем заменить g_k и α_k , соответственно, на g и α и записать на k -й итерации преобразования РГ

$$\psi_{k+1}(X) = \alpha g'(\alpha^{-1} g(X/\alpha)) \psi_k(X/\alpha) + \alpha^2 \psi_{k-1}(\alpha^{-1} g(X/\alpha)) \exp(iw_k), \quad (20)$$

$$w_{k+1} = w_k / (F_k / F_{k+1}). \quad (21)$$

Существенно, что уравнение (20) содержит переменный коэффициент в последнем члене, который зависит от перенормируемой фазы $w_k = \{2\pi \Omega F_k\}$.

Очевидно, асимптотическое поведение функций ψ_k будет определяться свойствами последовательности w_k . Проведенные нами численные расчеты показали, что для всех протестированных рациональных значений частоты $\Omega = p/q$ последовательность w_k оказывается периодической (с точностью до несущественных разностей, кратных 2π). Соответствующий период будем обозначать $N(\Omega)$. Он кратен тому периоду, с которым в последовательности Фибоначчи встречаются числа, делимые без остатка на q . Данные по периодам $N(\Omega)$ для различных частот воздействия Ω приведены в таблице.

Итак, функциональное уравнение (20) содержит переменный коэффициент с периодом $N(\Omega)$ по «ренормвремени» k . Посредством подстановки

$$\psi_{Nk+i}(X) = v^k \xi_i(X) \quad (22)$$

уравнение (20) сводится к системе линейных уравнений, определяющей задачу на собственные числа и собственные векторы. Решив ее, можно найти спектр величин v , собственных чисел линеаризованного уравнения РГ, и собственные векторы, каждый из которых определяется набором функций-компонент $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$.

Фактически, из всех собственных чисел, имеющих место при заданном параметре частоты Ω , нас будет интересовать только самое большое по абсолютной величине, так как именно оно отвечает за новые свойства скейлинга в пространстве параметров, связанные с периодическим внешним воздействием.

Чтобы определить старшее собственное значение v численно, поступаем следующим образом. Функции аппроксимируются полиномами, а преобразование РГ, которому они подвергаются, реализовано в виде компьютерной программы. Эта программа на выходе выдает новый набор коэффициентов для очередной функции по наборам для двух предыдущих. Задавая «затравочные» функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, получаем последующие функции путем прямых итераций отображений (20) и (21). При $k \rightarrow \infty$ последовательность функций $\{\psi_k(x)\}_{k=0,1,2,\dots,\infty}$ ведет себя как

$$\{\psi_{Nk+1}, \psi_{Nk+2}, \dots, \psi_{Nk+N}\}_{k=0,1,2,\dots,\infty} \rightarrow \{v^k \xi_1, v^k \xi_2, \dots, v^k \xi_N\}_{k=0,1,2,\dots,\infty},$$

где v - наибольшее по модулю собственное число. Таким образом, его можно найти как отношение

$$v = \psi_{(N+1)k}(0) / \psi_{Nk}(0).$$

Итак, периодическое воздействие определенной частоты Ω на отображение окружности приводит к появлению нового собственного числа линеаризованного

Таблица

Ω	Период $N(\Omega)$	$ v $	$\arg v$	Тип скейлинга
0	1	2.83361065	π	P
$1/7$	16	690109.532	0.0	P
$1/6$	24	112818867	0.0	P
$2/11$	10	2202.30663	0.79101604	Q
$1/5$	20	4192174.76	0.0	P
$3/14$	48	$1.35984624 \times 10^{16}$	0.0	P
$2/9$	24	119101569	0.0	P
$3/13$	28	6.21312900×10^9	0.0	P
$1/4$	6	95.5105145	0.59851103	Q
$4/15$	40	$1.52212247 \times 10^{13}$	0.09557059	Q
$3/11$	10	1335.00232	0.65025055	Q
$5/18$	24	25524454.0	0.0	P
$2/7$	16	100480.780	0.0	P
$5/17$	36	$5.13620730 \times 10^{11}$	0.0	P
$3/10$	60	$6.31537750 \times 10^{19}$	0.0	P
$4/13$	28	309689580	0.0	P
$1/3$	8	329.570755	0.0	P
$5/14$	48	$2.03335713 \times 10^{15}$	0.0	P
$4/11$	10	2166.74895	-0.39638565	Q
$7/19$	18	1633210.57	-1.24919695	Q
$3/8$	12	16700.1629	-0.56210947	Q
$8/21$	16	1062840.11	-0.65025184	Q
$5/13$	28	$1.73437205 \times 10^{10}$	0.0	P
$7/18$	24	267302442	0.0	P
$2/5$	20	4192174.76	0.0	P
$7/17$	36	$3.60438506 \times 10^{11}$	0.0	P
$5/12$	24	206389500	1.14787857	Q
$8/19$	18	413134.129	0.52055924	Q
$3/7$	16	78245.8906	0.0	P
$7/16$	24	187703591	-0.78777353	Q
$4/9$	24	16037145.9	0.0	P
$5/11$	10	943.996261	0.12189284	Q
$1/2$	3	7.38728606	π	P

уравнения ренормгруппы, так что свойства скейлинга в окрестности критической точки GM в пространстве параметров будут определяться тройкой констант

$$\{\delta_1^N, \delta_2^N, v\}.$$

Обратим внимание на правило перенормировки временного масштаба, вытекающее из уравнения (21). На каждой итерации преобразования РГ фазовая

переменная w_k умножается на показатель F_k/F_{k-1} , в пределе стремящийся к ω^{-1} . Следовательно, полному периоду РГ-преобразования отвечает пересчет характерного временного масштаба динамических режимов на фактор ω^{-N} .

Типы скейлинга в отображении окружности в присутствии внешнего воздействия

Рассмотрим оператор эволюции на k -й итерации РГ-преобразования

$$\hat{F}_{kN} X = g_k(X) + \gamma \varphi_k(X) + \varepsilon [\psi_k(X) \exp(i\phi) + \text{c.c.}]$$

или, учитывая асимптотические свойства функций (см. (18), (19) и (22)),

$$\hat{F}_{kN} X = g_k(X) + \Delta r \cdot \delta_1^{Nk} \cdot \chi_1(X) + \Delta K \cdot \delta_2^{Nk} + \varepsilon [v^k \xi_1(X) \exp(i\phi) + \text{c.c.}], \quad (23)$$

где $\Delta r = r - r_{GM}$, $\Delta K = K - 1$. Отсюда следует, что в общем случае могут присутствовать три рода существенных возмущений неподвижной точки уравнения РГ.

Во-первых, при вариации параметра r включается возмущение, которому за полный период РГ-преобразования $N(\Omega)$ соответствует константа скейлинга δ_1^N .

Во-вторых, вариации параметра K отвечает тип возмущения, для которого масштабная константа за период РГ-преобразования равна δ_2^N .

Наконец, третий вид возмущения возникает с включением внешнего периодического воздействия, и с ним ассоциируются новые закономерности скейлинга, за которые отвечает константа v .

Результаты расчетов показывают, что в зависимости от частоты воздействия Ω собственное число v может оказаться действительным или комплексным. Это приводит к возникновению двух типов скейлинга, которые, следуя терминологии работы [11], будем называть P- и Q-типом, соответственно.

Чтобы сделать объяснения более простыми и наглядными, ограничимся обсуждением ситуации, когда присутствуют только первый и третий виды возмущения, для чего в уравнении (23) положим $\Delta K = 0$.

Рассмотрим сначала случай действительного собственного числа v . (Это имеет место, в частности, при $\Omega = 1/2$ или $1/3$.) Как видно из (23), перенормировка параметров $\Delta r \rightarrow \Delta r \delta_1^{Nk}$ и $\varepsilon \rightarrow \varepsilon / v^k$ при действительном v приводит к тому, что вид оператора эволюции на характерном временном масштабе, умноженном на ω^{-Nk} , будет совпадать с исходным. Поэтому в системе будет реализоваться динамический режим, подобный первоначальному, но с другим характерным временным масштабом.

На рис. 1, а, б приводится иллюстрация скейлинга для случая $\Omega = 1/2$. На рис. 1, а представлена карта на плоскости параметров $(\Delta r, \varepsilon)$, где в каждой точке значение ляпуновского показателя кодируется оттенком серого цвета. Для построения аналогичной карты на рис. 1, б мы пересчитываем масштаб по осям координат по правилу $(\Delta r, \varepsilon) \rightarrow (\Delta r / \delta_1^3, \varepsilon / v)$ и умножаем в каждой точке карты значение ляпуновского показателя на ω^{-3} . Сравнивая полученные карты, мы видим, что они визуальнo практически неотличимы. (На самом деле, степень соответствия становится тем лучше, чем меньшая окрестность критической точки рассматривается.)

Частоте воздействия $\Omega = 1/3$ соответствует тот же тип скейлинга. Проиллюстрируем его, выбрав другую плоскость параметров. Заметим, что внешнее воздействие имеет помимо амплитуды еще один параметр - фазу, и построим ляпуновскую карту в координатах $A = \varepsilon \cos \phi$, $B = \varepsilon \sin \phi$. Если изменить масштаб по обеим осям на фактор v , а временной масштаб - на фактор ω^{-8} (так как $N(1/3) = 8$), то получаем картинку, подобную исходной (см. рис. 1, в, г).

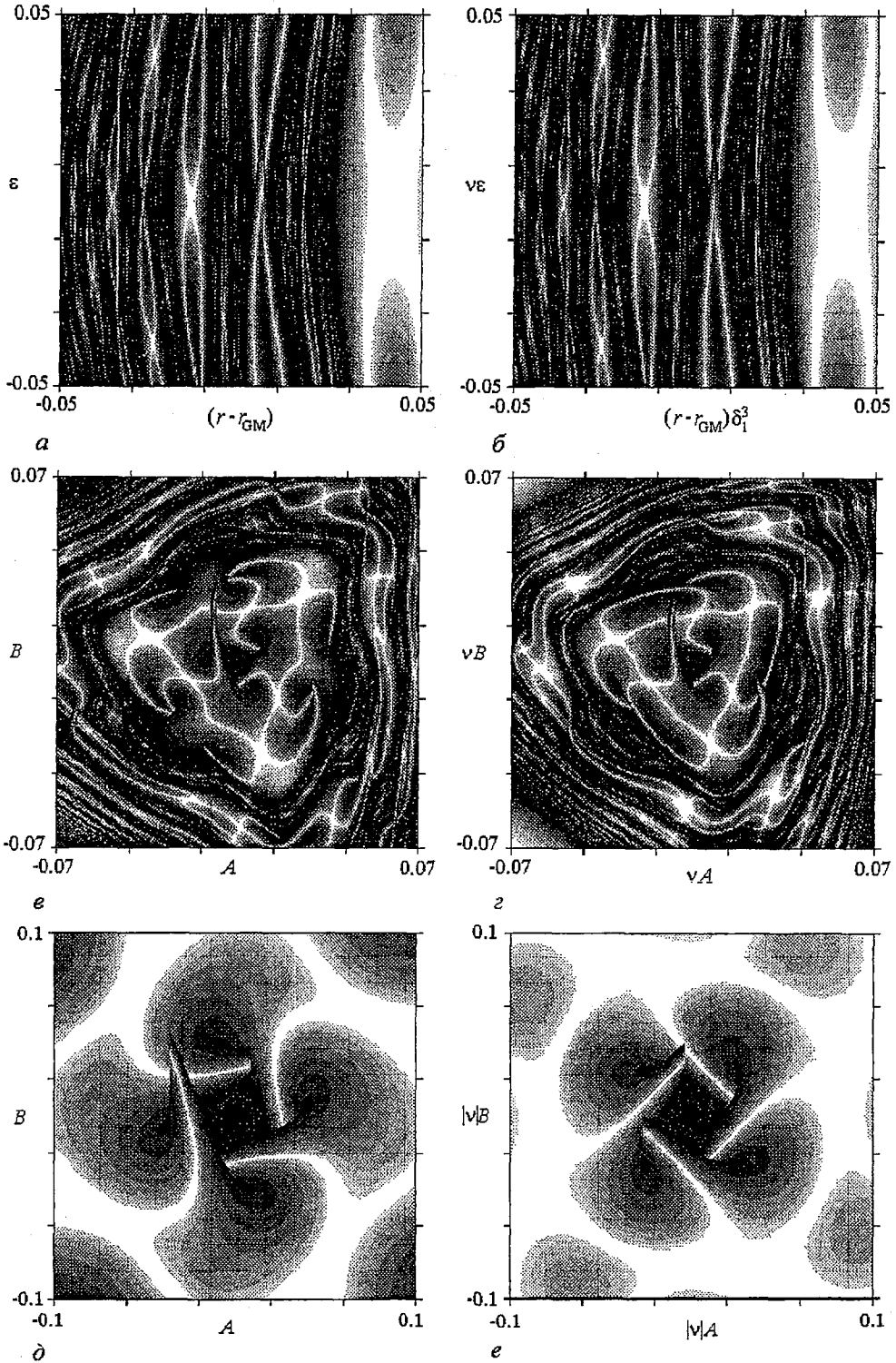


Рис. 1. Карты ляпуновских показателей для периодически возбуждаемого отображения окружности (6) (при $K=1$): на плоскости параметров $(\Delta r, \epsilon)$ для значения параметра (частоты) $\Omega=1/2$ (a, б), и на плоскости $(A = \epsilon \cos \phi, B = \epsilon \sin \phi)$ для $\Omega=1/3$ (в, г) и для $\Omega=1/4$ (д, е). Тона серого цвета от белого до черного соответствуют значениям ляпуновского показателя в интервале от минус бесконечности до нуля. Увеличение малых фрагментов карт (б, г, е) иллюстрирует наличие скейлинга Р-типа (а-г) и Q-типа (д-е). Увеличение фрагментов сопровождается пересчетом значения ляпуновского показателя путем умножения на фактор $\omega^{-N(\Omega)}$

Другой тип устройства окрестности критической точки возникает, если собственное число ν при данной частоте периодического воздействия Ω оказывается комплексным. В этом случае можно переписать уравнение (23) в виде

$$\hat{F}_{Nk+1} X = g(X) + \Delta r \delta_1^{Nk} \chi_1(X) + \varepsilon [|\nu|^k \xi_1(X) \exp(i\phi + ik \arg \nu) + \text{с.с.}]. \quad (24)$$

Обратим внимание, что под знаком экспоненты появилось слагаемое $ik \arg \nu$, которое можно интерпретировать как добавку к фазе внешнего периодического воздействия. Следовательно, на плоскости параметров (A, B) перенормировка осей координат на фактор $|\nu|^k$ не приведет к воспроизведению структуры окрестности критической точки. Из рис. 1, δ , e видно, что характерная структура окрестности повторяется с точностью до поворота на некоторый определенный угол. Для того чтобы получить воспроизведение динамических режимов, следует перейти к координатам (A', B') , определяемых по правилу $A' + iB' = (A + iB)/\nu^k$, то есть осуществить поворот плоскости (A, B) на угол $(-k \arg \nu)$. Физически в каждой конкретной точке пространства параметров это соответствует изменению фазы периодического воздействия на систему на соответствующую величину.

Обобщенные данные по значениям константы ν для различных частот Ω и соответствующим типам скейлинга приведены в таблице. Значения Ω задаются как рациональные числа первых шести уровней построения так называемого дерева Фейри [14]. В таблице представлены данные лишь для частот из интервала $\Omega \in [0, 1/2]$, поскольку другая половина единичного интервала устроена симметричным образом.

Хорошей иллюстрацией скейлинга P- и Q-типа могут служить «коллажи» из ляпуновских карт, выполненных на плоскости $(\Delta r, \varepsilon)$ в двойном логарифмическом масштабе. В этих координатах замена переменных $\Delta r \rightarrow \Delta r / |\delta_1^N|$ и $\varepsilon \rightarrow \varepsilon / |\nu|$ отвечает сдвигу вдоль двух осей координат на величины $N \ln |\delta_1|$ и $\ln |\nu|$, соответственно.

Принимая во внимание скейлинг, мы можем строить ляпуновские карты в двойном логарифмическом масштабе в некоторой области изменения параметров Δr и ε для разных итераций преобразования PГ, а потом упорядочить эти карты так, чтобы покрыть некоторый широкий интервал изменения $\lg |\Delta r|$ и $\lg |\varepsilon|$. При построении карт значение ляпуновского показателя в каждой точке нормируется на фактор $|\nu - r_{GM}|^\beta$, где $\beta = -\log_{|\delta_1|} ((5^{1/2} - 1)/2)$. На рис. 2, a , b такие «коллажи» представлены для $\Omega = 1/3$ и $\Omega = 1/4$. В первом случае на карте можно видеть периодическое повторение формы областей (скейлинг P-типа). Во втором случае (Q-тип скейлинга) повторение фрагментов карты не наблюдается, хотя в среднем граница хаоса располагается вдоль прямой линии вполне определенного наклона.

Заключение

В данной работе были проанализированы свойства скейлинга в пространстве параметров периодически возбуждаемого отображения окружности в окрестности критической точки GM, отвечающей разрушению квазипериодичности с числом вращения «золотое среднее». Были рассмотрены возмущения неподвижной точки уравнения ренормгруппы Фейгенбаума - Каданова - Шенкера, соответствующие включению периодического воздействия. При этом возникает новое собственное число линеаризованного уравнения ренормгруппы, зависящее от параметра частоты воздействия. Это собственное число может быть действительным или комплексным, соответственно, в пространстве параметров реализуются два типа скейлинга:

- периодический (P-тип), когда структуры в пространстве параметров

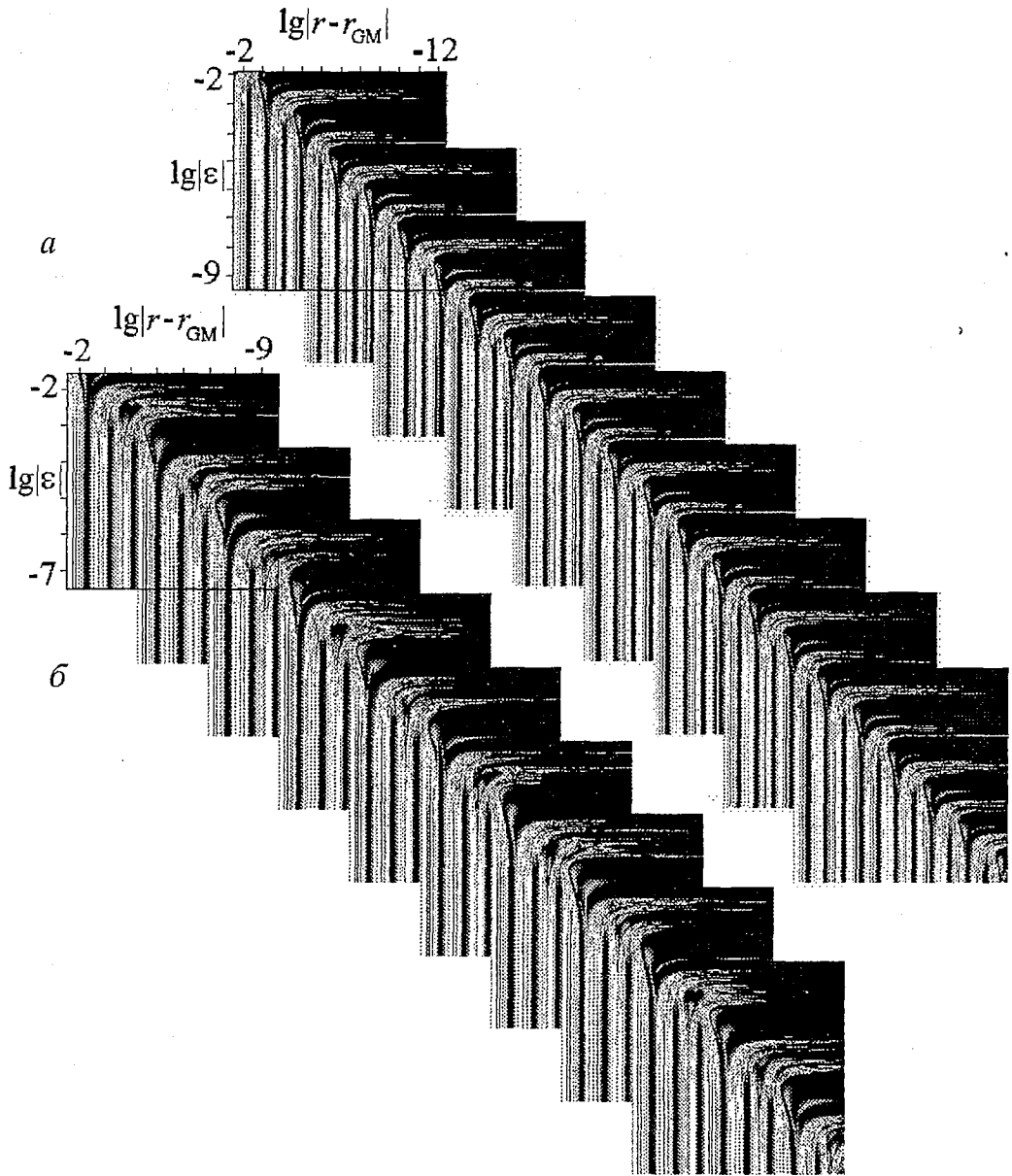


Рис. 2. «Коллажи», составленные из фрагментов ляпуновских карт в двойном логарифмическом масштабе ($\lg|r-r_{GM}|$, $\lg|\epsilon|$). Тона серого цвета от белого до черного соответствуют значениям перенормированного ляпуновского показателя $\Lambda/|r-r_{GM}|^\beta$, где $\beta = -\log_{5/4}((5^{1/2}-1)/2)$, от минус бесконечности до нуля. Можно наблюдать периодическое повторение конфигураций динамических режимов (P-тип скейлинга) для $\Omega=1/3$ (a), и квазипериодическое чередование фрагментов, соответствующее Q-типу скейлинга, при $\Omega=1/4$ (б)

воспроизводятся в малых масштабах при перенормировке координат на факторы скейлинга;

- квазипериодический (Q-тип), при котором двумерная структура динамических режимов на плоскости параметров является квазипериодической, но в трехмерном пространстве параметров воспроизводится при пересчете масштаба с точностью до поворота на некоторый угол.

Известно, что тип поведения, ассоциирующийся с критической точкой GM, с присущими ему универсальными свойствами скейлинга может наблюдаться в различных нелинейных диссипативных системах [15-19], автономное отображение

окружности может рассматриваться как наиболее удобный для исследования представитель соответствующего класса универсальности. Обнаружение новых закономерностей скейлинга в динамике отображения окружности при внешнем периодическом воздействии позволяет предположить, что аналогичные явления будут иметь место и в других системах, относящихся к тому же классу универсальности, при наличии периодического воздействия. По-видимому, того же рода закономерности будут проявляться в определенных областях пространства параметров при рассмотрении задачи перехода к хаосу через разрушение трехчастотной квазипериодичности. В общем случае эта задача чрезвычайно сложна, и поэтому любые частные результаты, проливающие свет на особенности соответствующей динамики, могут оказаться важными для продвижения в ее анализе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №00-02-17509.

Библиографический список

1. *Shenker S.J.* Scaling behavior in a map of a circle onto itself: Empirical results // *Physica D*. 1982. Vol. 5. P. 405.
2. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis // *Physica D*. 1982. Vol. 5. P. 370.
3. *Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.* Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49, № 2. P. 132.
4. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // *Physica D*. 1983. Vol. 8. P. 303.
5. *Jensen M.H., Bak P., Bohr T.* Complete devil's staircase, fractal dimension, and universality of mode-locking structure in the circle map // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 1637.
6. *Kim S., Ostlund S.* Universal scaling in circle map // *Physica D*. 1989. Vol. 39, № 2-3. P. 365.
7. *Cvitanovic P., Gunaratne G.H., Vinson M.J.* On the mode-locking universality for critical circle map // *Nonlinearity*. 1990. Vol. 3. P. 873.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М., Физматлит, 2001, 296с.
9. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Иванов Н.Ю., Осин А.А.* Скейлинг при переходе к хаосу через разрушение квазипериодического движения с отношением частот, заданным золотым средним // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2000. Т. 8, № 4. С. 3.
10. *Arnold V.I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // *CHAOS*. 1991. Vol. 1, № 1. P. 20.
11. *Ivan'kov N.Yu., Kuznetsov S.P.* Different types of scaling in the dynamics of period-doubling maps under external periodic driving // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2000. Vol. 5. P. 223.
12. *Кузнецов С.П.* О воздействии периодического внешнего возмущения на систему, демонстрирующую переход порядок - хаос через бифуркации удвоения периода // *Письма в ЖЭТФ*. 1984. Т. 39, № 3. С. 113.
13. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Renormalization group for the response function and spectrum of the period-doubling system // *Phys. Lett. A*. 1989. Vol. 140, № 4. P. 166.
14. *Graham R.L., Knuth D.E., and Patashnik O.* *Concrete Mathematic*. Addison - Wesley Publ. 1989.
15. *Bohr T., Bak P., Jensen M.H.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. 2. Josephson junctions, charge-density waves, and standard maps // *Phys. Rev. A*. 1984. Vol. 30. P. 1970.

16. *Glazier J.A., Gunaratne G., Libchaber A.* $F(\alpha)$ curves - experimental results // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37. P. 523.

17. *Glazier J.A., Libchaber A.* Quasi-periodicity and dynamical systems - An experimentalists view // IEEE Trans. on Circuits and Systems. 1988. Vol. 35. P. 790.

18. *Stavans J., Helsot F., Libchaber A.* Fixed winding number and the quasi-periodic route to chaos in a convective fluid // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 595.

19. *Леву Б.Г.* Новый глобальный фрактальный формализм описывает различные сценарии перехода к хаосу // Физика за рубежом. Вып. 87. М.: Мир, 1987, 263с.

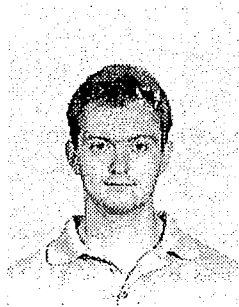
*Саратовский государственный
университет
Саратовское отделение Института
радиотехники и электроники РАН*

*Поступила в редакцию 29.03.02
после доработки 2.09.02*

UNIVERSALITY AND SCALING IN THE CIRCLE MAP UNDER EXTERNAL PERIODIC DRIVING

A.Yu. Jalnine, S.P. Kuznetsov

We investigate scaling properties of a neighborhood of the «golden mean» critical point in the circle map in presence of external periodic forcing upon the system. We consider such perturbations of the fixed point of the Feigenbaum-Kadanoff-Shenker renormalization group equation, which are initiated by periodic forcing. We show that, depending upon the frequency of external forcing, two types of scaling behavior can be observed. The first (P-type) is associated with periodic repetition of the structures of dynamical regimes in parameter space under subsequent scaling transformations. For the second case (Q-type of scaling) quasiperiodic behavior of structures in the parameter space takes place. The both types of scaling are illustrated by parameter-space diagrams for re-scaled Lyapunov exponents.



Жалнин Алексей Юрьевич - родился в Балапове Саратовской области (1977). Окончил физико-технический лицей № 1 Саратова (1995), факультет нелинейных процессов СГУ (2000). Аспирант кафедры динамических систем СГУ. Область научных интересов: квазипериодическая динамика, странные пехотические аттракторы, хаотическая синхронизация.



Кузнецов Сергей Петрович родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений при переходе к хаосу. Занимается также исследованиями в области квантового хаоса. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати. Соавтор двух монографий и одной популярной книги. Автор нескольких оригинальных учебных курсов, прочитанных им в разные годы на кафедрах электроники, радиофизики и факультета нелинейных процессов СГУ. Соросовский профессор (2000). Член американского физического общества. E-mail: kuz@spkuz.saratov.su.